

Mathematische Abhandlungen aus dem Verlage mathematischer Modelle
von Martin Schilling in Halle a. S.

Neue Folge Nr. 3.

Die
Horopterkurve

mit einer

Einleitung in die Theorie der kubischen Raumkurve.

Von

Dr. Walther Ludwig.

Abhandlung zu dem Modell Serie XXVIII, Nr. 6.

Halle a. S.
Verlag von Martin Schilling.
1902.

Die
Horopterkurve

mit einer

Einleitung in die Theorie der kubischen Raumkurve.

Von

Dr. Walther Ludwig.

Mit fünf Figuren.

Halle a. S.
Verlag von Martin Schilling.
1902.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort	6
I. Die kubische Raumkurve.	
§ 1. Projektive Ebenenbüschel	
§ 2. Die Erzeugung der kubischen Raumkurve durch drei projektive Ebenenbüschel	11
§ 3. Die Erzeugung der kubischen Raumkurve durch zwei kollineare Bündel	14
§ 4. Die gestaltlichen Verhältnisse der kubischen Raumkurve.	18
II. Der Horopter.	
§ 5. Die physiologischen Grundlagen der Theorie des Horopters und ihre geometrische Bedeutung	21
§ 6. Die geometrischen Eigenschaften des Horopters	25
§ 7. Die gestaltlichen Verhältnisse des Horopters.	30

Vorwort.

Die vorliegende Abhandlung soll als Begleitschrift zu den sechs Modellen zur Theorie der kubischen Raumkurve und ihrer Anwendung in der physiologischen Optik dienen, die von dem Verfasser gleichzeitig in demselben Verlage veröffentlicht sind. Die kubische Raumkurve verdient ja eine ganz besondere Berücksichtigung bei der Auswahl der Beispiele, die dem Anfänger die allgemeine Theorie der Raumkurven näher bringen sollen; denn sie zeigt die Eigenschaften der doppelt gekrümmten Kurven in überaus einfacher Weise und besitzt dabei so leicht zu überblickende Formen, dass jeder, der sie einmal gesehen hat, sie ohne Mühe sich wieder deutlich vorstellen kann. Ausserdem hat sie aber auch ein weitergehendes Interesse wegen ihrer schönen projektiven Eigenschaften und wegen ihres Auftretens in der physiologischen Optik. Diese neuen Modelle*) verdanken ihre Entstehung der Anregung des Herrn Geheimrates Klein in seinem im W.-S. 1900/01 an der Universität Göttingen abgehaltenen Seminar. Ganz neu ist vor allem die von Herrn Professor Schilling veranlasste Art der Ausführung der ersten vier Modelle. Während bisher Raumkurven nur aus Draht gebogen oder auf den Oberflächen von Körpern aus Holz, Gips oder anderer undurchsichtiger Masse aufgezeichnet wurden, sind hier die Cylinder, welche die Kurven tragen, aus durchsichtigem Celluloid angefertigt und gestatten es daher, in jeder Stellung des Modells den ganzen Verlauf der Kurve auf dem Cylinder mit einem Blick zu erkennen. Die Modelle lassen sich infolgedessen gut projizieren und können dann auch zur Erläuterung mancher Eigenschaften der ebenen Kurven dienen, wie z. B. zur Veranschaulichung des Überganges vom eigentlichen Doppelpunkt zum Rückkehrpunkt und zum isolierten

*) Bisher gab es nur die kleinen Gipsmodelle der Raumkurven dritter Ordnung und ihrer Cylinder, welche 1880 gleichfalls auf Veranlassung von Herrn Geheimrat Klein durch Herrn Ernst Lange, jetzt Direktor der Realschule in Chemnitz, in demselben Verlage als Serie VI, Nr. 6 a b c d veröffentlicht sind. Aus demselben Zeit stammt ein von Herrn Klein angeregtes und von Herrn Lange ausgeführtes Fadenmodell der Tangentenfläche der kubischen Ellipse, welches sich im Besitze des math. Instituts der techn. Hochschule zu München befindet.

Doppelpunkt. Die Modelle 1—4 stellen die vier Typen dar, die man bei der kubischen Raumkurve je nach ihrem Verhalten zur unendlich fernen Ebene unterscheidet, nämlich: die kubische Ellipse, die kubische Hyperbel, die kubische parabolische Hyperbel und die kubische Parabel; (siehe Seite 18 der Abhandlung.) Modell 5 zeigt die abwickelbare Fläche der Tangenten der kubischen Ellipse; (siehe Seite 19).

Das Modell 6 endlich dient zur Veranschaulichung der Bedeutung der kubischen Raumkurve in der physiologischen Optik. Blickt man mit beiden Augen nach einem Punkte im Raume hin, so vereinigen sich die auf den beiden Netzhäuten entworfenen Bilder dieses Punktes zu einer einzigen Empfindung; man sieht den Punkt einfach. Von den übrigen Punkten des Raumes werden bei dieser bestimmten Augenstellung nur gewisse Punkte einfach gesehen, die anderen aber doppelt, eine Thatsache, deren wir uns allerdings für gewöhnlich nicht bewusst werden. Den Ort der bei einer bestimmten Augenstellung einfach gesehenen Punkte des Raumes nun nennt man den zu dieser Augenstellung gehörigen Horopter; derselbe ist eine kubische Raumkurve und im Modell 6 dargestellt; (siehe Seite 32 und 33).

Obwohl also die Theorie des Horopters als eine physiologische Anwendung der projektiven Geometrie besonderes Interesse verdient, ist sie meines Wissens bisher noch nicht soweit geführt worden, dass man Gestalt und Lage des Horopters für jede Augenstellung angeben kann. Dies geschieht nun im zweiten Teil dieser Abhandlung unter Annahme der vereinfachenden Hypothese, dass in der (auf Seite 20 definierten) Grundstellung der Augen immer je zwei parallele Sehstrahlen auf korrespondierende Netzhautstellen treffen. Unsere Hypothese gestattet eine einfache mathematische Behandlung der Horoptertheorie und führt zu einer guten Annäherung an die Wirklichkeit dann, wenn der fixierte Raumpunkt nicht zu fern liegt. Da einige Kenntnis der Theorie der kubischen Raumkurve vorausgesetzt werden muss und auch eine Erläuterung der Modelle 1—5 nicht überflüssig zu sein scheint, ist im ersten Teil der Abhandlung ein kurzer Überblick über die grundlegenden projektiven Eigenschaften der kubischen Raumkurve gegeben. Natürlich kann darin nur das Notwendigste enthalten sein, und selbst dies nur in knapper Form, weshalb auch einige Sätze (besonders Umkehrungen) ohne Beweis angeführt worden sind. Die mathematischen Entwicklungen habe ich so einfach zu gestalten gesucht, als es die Forderung der Strenge zulässt.

Die physiologischen Grundlagen der Horoptertheorie sind aus dem Handbuch der physiologischen Optik von H. v. Helmholtz (Zweite Auflage, Hamburg und Leipzig 1896, § 27 und § 31) entnommen; daselbst findet man auch ausführliche Angaben über Geschichte (Seite 913 ff.) und

Litteratur (Seite 1295 ff.) der Horoptertheorie. Von dort nicht erwähnten Arbeiten sind mir zwei bekannt geworden:

Fr. Schur, Über die Horopterkurve. (Sitzungsberichte der Dorpater Naturforschergesellschaft, 2. Nov. 1889.)

Fred. Schuh, Die Horopterkurve. (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band 47, 1902.)

Die letztere Arbeit, die am 27. Juni 1902 erschienen ist, habe ich nicht mehr benutzen können.

I. Die kubische Raumkurve.

§ 1. Projektive Ebenenbüschel.

Ist im Raume ein xyz -Koordinatensystem gegeben, und setzen wir abkürzungshalber

$a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 \equiv A(x, y, z)$, $b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 \equiv B(x, y, z)$
u. s. w., so stellen die Gleichungen

$$A(x, y, z) = 0, \quad B(x, y, z) = 0$$

zwei Ebenen A und B dar und die Gleichung

$$(1.) \quad z \cdot A(x, y, z) + \lambda \cdot B(x, y, z) = 0$$

eine dritte, die durch die Schnittlinie g der ersten beiden geht; diese dritte Ebene dreht sich um g , wenn wir die „Parameter“ z, λ verändern, und zwar entspricht jedem Wert des Verhältnisses $z : \lambda$ eine bestimmte Ebene aus g , die wir passend mit dem Symbol $(z : \lambda)$ bezeichnen können. Es lässt sich zeigen, dass wir auf diese Weise zu allen Ebenen des Ebenenbüschels (g) kommen; daher ist die Gleichung (1.) mit den beiden Parametern z, λ die Gleichung des Ebenenbüschels (g); insbesondere liefert sie A für $z = 1, \lambda = 0$ und B für $z = 0, \lambda = 1$. Ganz ebenso ist ein zweiter Ebenenbüschel (g') durch die Gleichung

$$(2.) \quad \mu \cdot C(x, y, z) + \nu \cdot D(x, y, z) = 0$$

gegeben; jedoch sind weder A und B noch C und D ausgezeichnet unter den Ebenen dieser Büschel, sondern wir können z. B. C und D durch irgend zwei andere Ebenen A', B' aus (g') ersetzen, deren Gleichungen lauten:

$$A'(x, y, z) \equiv \mu_1 \cdot C(x, y, z) + \nu_1 \cdot D(x, y, z) = 0$$

und

$$B'(x, y, z) \equiv \mu_2 \cdot C(x, y, z) + \nu_2 \cdot D(x, y, z) = 0;$$

dann ist (g') ausgedrückt durch die Gleichung

$$(2a.) \quad z' \cdot A'(x, y, z) + \lambda' \cdot B'(x, y, z) = 0,$$

und die neuen Parameter z', λ' hängen mit den alten μ und ν , so zusammen, dass

$$z' : \lambda' = (\nu_2 \mu - \mu_2 \nu) : (-\nu_1 \mu + \mu_1 \nu).$$

Die Ebenenbüschel (g) und (g') heissen nun projektiv auf einander be-

zogen, wenn jeder Ebene $(z:\lambda)$ des ersten diejenige Ebene $(\mu:\nu)$ des zweiten zugeordnet wird, die durch die Gleichungen

$$(3.) \quad \mu:\nu = (\alpha z + \beta \lambda) : (\gamma z + \delta \lambda)$$

bestimmt ist; umgekehrt entspricht dann jeder Ebene $(\mu:\nu)$ des zweiten Büschels wieder eine und nur eine Ebene $(z:\lambda)$ des ersten, nämlich diejenige für

$$z:\lambda = (\delta \mu - \beta \nu) : (-\gamma \mu + \alpha \nu),$$

vorausgesetzt, dass $\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$ ist. Insbesondere sind den Ebenen A und B in (g') zwei Ebenen A' und B' mit den Gleichungen

$$A'(x, y, z) \equiv \alpha \cdot C(x, y, z) + \gamma \cdot D(x, y, z) = 0,$$

$$B'(x, y, z) \equiv \beta \cdot C(x, y, z) + \delta \cdot D(x, y, z) = 0$$

zugeordnet, und mit ihrer Hilfe können wir die Gleichung von (g') auf die Form (2a) bringen, wobei

$$z':\lambda' = (\delta \mu - \beta \nu) : (-\gamma \mu + \alpha \nu)$$

ist, hierdurch geht die Gleichung (3.) über in

$$z':\lambda' = z:\lambda.$$

Zwei projektive Ebenenbüschel (g) und (g') lassen sich demnach immer durch zwei Gleichungen

$$(4.) \quad \begin{cases} z \cdot A(x, y, z) + \lambda \cdot B(x, y, z) = 0, \\ z \cdot A'(x, y, z) + \lambda \cdot B'(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ausdrücken, so dass einander je zwei Ebenen mit demselben Wert von $z:\lambda$ entsprechen.*)

Jedes Paar entsprechender Ebenen $(z:\lambda)$ hat eine Schnittlinie l ; für jeden Punkt derselben gelten gleichzeitig die Gleichungen (4.) und folglich die durch Elimination von z und λ aus ihnen folgende

$$(5.) \quad \eta^2(x, y, z) \equiv A(x, y, z) \cdot B'(x, y, z) - B(x, y, z) \cdot A'(x, y, z) = 0,$$

welche eine Fläche II. Grades η^2 darstellt. Wir erhalten so einfach unendlich viele Geraden l , die sämtlich auf η^2 liegen; ihre Gesamtheit heisst eine Regelschar und sei mit \mathcal{A} bezeichnet. Ebenso erzeugen die projektiven Ebenenbüschel

*) Hierzu sei folgendes bemerkt: Eine Projektivität zwischen zwei Ebenenbüscheln ist noch nicht durch zwei Paar entsprechender Ebenen bestimmt; denn man kann die Gleichungen der Ebenen je mit einem beliebigen konstanten Faktor multiplizieren und erhält, wenn man dann ihre linken Seiten statt $A(x, y, z)$ u. s. w. in (4.) eingeführt, eine ganz andere projektive Beziehung der beiden Büschel, die mit der ursprünglichen nur gerade die beiden gegebenen Paare entsprechender Ebenen gemeinsam hat. Sind die konstanten Faktoren aber bestimmt — und dazu genügt ein drittes gegebenes Paar entsprechender Ebenen —, so ist die Projektivität eindeutig festgelegt.

$$(4a.) \quad \begin{cases} \mu \cdot A(x, y, z) + \nu \cdot A'(x, y, z) = 0, \\ \mu \cdot B(x, y, z) + \nu \cdot B'(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

deren Axen zu \mathcal{A} gehören, eine Regelschar Γ , die gleichfalls auf \mathcal{U}^2 liegt und die g und g' enthält. Ein Punkt von \mathcal{U}^2 bestimmt, wenn man seine Koordinaten in (4.) und (4a.) einsetzt, einen Wert $z:\lambda$ und einen Wert $\mu:\nu$ und somit je eine Gerade aus \mathcal{A} und Γ , die durch ihn gehen. Wir sehen hieraus: Durch jeden Punkt von \mathcal{U}^2 geht aus jeder der beiden darauf liegenden Regelscharen eine und nur eine Gerade; jede Gerade einer Regelschar ist gegen alle übrigen derselben windschief und schneidet alle Geraden der anderen Regelschar. Zwei solche Regelscharen heissen verbundene Regelscharen; ihre Trägerfläche \mathcal{U}^2 ist ein einschaliges Hyperboloid oder in besonderem Falle ein hyperbolisches Paraboloid. Es gilt der Satz, dass jede Regelschar erzeugt gedacht werden kann durch zwei in passender Weise projektiv gemachte Ebenenbüschel, deren Axen irgend zwei Geraden der verbundenen Regelschar sind.

Wir haben hierbei stillschweigend vorausgesetzt, dass die Axen g und g' der erzeugenden Ebenenbüschel windschief sind; schneiden sie sich aber, so gehört die Ebene ($g g'$) zu beiden Büscheln. Rechnen wir sie als B zum ersten, so entspricht ihr B' im zweiten, rechnen wir sie als A' zum zweiten, so entspricht ihr A im ersten, und es ist $B(x, y, z) \equiv A'(x, y, z)$. Die beiden Gleichungenpaare (4.) und (4a.) sind also nur eins, und folglich fallen die beiden Regelscharen \mathcal{A} und Γ in eine zusammen, der g und g' angehören; die Geraden derselben laufen alle durch den Schnittpunkt von g und g' , weil durch ihn ja alle Ebenen der beiden Büschel gehen. Wir haben also in diesem Falle die Kantenschar eines Kegels II. Grades erhalten; man kann zeigen, dass irgend zwei Geraden aus ihr als Axen zweier projektiven Ebenenbüscheln genommen werden können, die sie erzeugen. Ein besonderer Fall hiervon wiederum ist es, wenn g und g' parallel sind; dann ist das Erzeugnis ein Kegel mit parallelen Kanten oder, wie man auch sagen kann, mit unendlich fernem Scheitel: ein Cylinder II. Grades.

§ 2. Die Erzeugung der kubischen Raumkurve durch drei projektive Ebenenbüschel.

Zu den beiden Ebenenbüscheln (g) und (g') nehmen wir jetzt noch einen dritten (g'') hinzu, den wir uns durch eine Gleichung von der Form

$$(4b.) \quad z \cdot A''(x, y, z) + \lambda \cdot B''(x, y, z) = 0$$

geben können; dann erhalten wir in der oben geschilderten Weise durch (g') und (g'') eine Fläche II. Grades \mathcal{O}^2 mit der Gleichung

(5a.) $\Phi^2(x, y, z) \equiv A'(x, y, z) \cdot B''(x, y, z) - B'(x, y, z) \cdot A''(x, y, z) = 0$
 und durch (g'') und (g) eine Fläche II. Grades X^2 mit der Gleichung

(5b.) $X^2(x, y, z) \equiv A''(x, y, z) \cdot B(x, y, z) - B''(x, y, z) \cdot A(x, y, z) = 0.$

Im allgemeinen Falle, den wir allein ins Auge fassen, werden Φ^2 , X^2 , ψ^2 drei verschiedene allgemeine Flächen oder Kegel II. Grades sein; jede trägt zwei von unseren Geraden g, g', g'' und zwar so, dass jede Gerade immer auf zwei Flächen liegt.

Wir können aber die drei projektiven Ebenenbüschel auch gleichzeitig betrachten; dann gehören aus ihnen immer drei Ebenen zusammen, die demselben Wertsystem $z : \lambda = 1 : t$ entsprechen, und schneiden sich in einem Punkte P . Durch diesen nun gehen die drei Schnittlinien, die sie zu je zweien haben und die beziehentlich auf Φ^2, X^2, ψ^2 liegen; mithin ist P ein allen drei Flächen gemeinsamer Punkt. Auf diese Weise bekommen wir einfach unendlich viele Punkte P , deren jeder der Schnittpunkt eines Tripels entsprechender Ebenen ist und die sämtlich den drei Flächen Φ^2, X^2, ψ^2 gleichzeitig angehören; man erkennt umgekehrt auch leicht, dass jeder allen drei Flächen gemeinsame Punkt der Schnittpunkt eines Tripels zugeordneter Ebenen ist; insbesondere zählen zu ihnen die beiden Schnittpunkte von g mit Φ^2 , diejenigen von g' mit X^2 und die von g'' mit ψ^2 . Die Koordinaten x, y, z unserer Punkte P nun bestimmen sich aus den Gleichungen (4.) und (4b.) als Funktionen von $t = \frac{\lambda}{z}$ in folgender Form:

$$(6.) \quad \begin{cases} x = \frac{p_0 t^3 + p_1 t^2 + p_2 t + p_3}{n_0 t^3 + n_1 t^2 + n_2 t + n_3}, \\ y = \frac{q_0 t^3 + q_1 t^2 + q_2 t + q_3}{n_0 t^3 + n_1 t^2 + n_2 t + n_3}, \\ z = \frac{r_0 t^3 + r_1 t^2 + r_2 t + r_3}{n_0 t^3 + n_1 t^2 + n_2 t + n_3}, \end{cases}$$

wobei die p, q, r, n sich aus den Koeffizienten der $A(x, y, z)$ u. s. w. zusammensetzen; die Punkte P erfüllen also die Raumkurve, deren Parameterdarstellung die Gleichungen (6.) sind. Setzen wir x, y, z nach (6.) in die Gleichung einer Ebene ein, so ergibt sich eine kubische Gleichung in t , deren Wurzeln, für t in (6.) eingeführt, die Schnittpunkte der Ebene mit der Raumkurve liefern; deshalb heisst eine derartige Kurve eine kubische Raumkurve oder Raumkurve III. Ordnung. Die unsrige sei mit R^3 bezeichnet; wir wissen, dass auf g, g', g'' je zwei von ihren Punkten liegen; also sind g, g', g'' Sehnen der R^3 . Somit haben wir gefunden:

Drei projektive Ebenenbüschel erzeugen als Ort der Schnittpunkte jedreier entsprechender Ebenen eine kubische Raumkurve, welche die Axen der Büschel zu Sehnen hat.

Zwei Flächen II. Grades schneiden sich in einer Raumkurve IV. Ordnung; dieselbe zerfällt, wenn wir zwei von den Flächen Φ^2 , X^2 , Ψ^2 nehmen, in R^3 und eine ihrer Sehnen g , g' , g'' . Drei Flächen II. Grades schneiden sich im allgemeinen in acht getrennten Punkten; es ist also eine Besonderheit, dass Φ^2 , X^2 , Ψ^2 eine ganze Kurve gemeinsam haben. Nun stellt die Gleichung

$$(7.) \quad u \cdot \Phi^2(x, y, z) + v \cdot X^2(x, y, z) + w \cdot \Psi^2(x, y, z) = 0$$

wieder eine Fläche II. Grades dar, auf der alle gemeinsamen Punkte jener drei Flächen liegen, und wir erhalten, wenn wir den Verhältnissen $u:v:w$ alle möglichen Werte geben, doppelt unendlich viele derartige Flächen, einen „Bündel von Flächen II. Grades“; ein solcher hat im allgemeinen acht „Grundpunkte“, in unserem Fall aber in R^3 eine ganze Kurve solcher Punkte. R^3 ist also Grundkurve eines besonderen Bündels von Flächen II. Grades; da die Verhältnisse $u:v:w$ immer eine Fläche dieses Bündels bestimmen, soll dieselbe mit dem Symbol $(u:v:w)$ bezeichnet werden.

Wir können uns die kubische Raumkurve R^3 nicht durch die projektiven Büschel (g) , (g') , (g'') , sondern unmittelbar durch die Parameterdarstellung (6.) gegeben denken; nehmen wir dann eine Sehne, so schneidet jede durch sie gehende Ebene die R^3 ausser in den beiden Stützpunkten der Sehne, deren Parameter t_1 und t_2 seien, noch in einem weiteren Punkt mit dem Parameterwert t ; die Gleichung der Ebene lautet daher, als Determinante geschrieben,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p_0 t_1^3 + \dots & q_0 t_1^3 + \dots & r_0 t_1^3 + \dots & n_0 t_1^3 + \dots \\ p_0 t_2^3 + \dots & q_0 t_2^3 + \dots & r_0 t_2^3 + \dots & n_0 t_2^3 + \dots \\ p_0 t^3 + \dots & q_0 t^3 + \dots & r_0 t^3 + \dots & n_0 t^3 + \dots \end{vmatrix} = 0$$

und kann durch geeignete Umrechnung auf die Form

$$C(x, y, z) + t \cdot D(x, y, z) = 0$$

gebracht werden, wobei sich die Koeffizienten von $C(x, y, z)$ und $D(x, y, z)$ aus den p, q, r, n und aus t_1 und t_2 zusammensetzen. Verändern wir t , so dreht sich die Ebene um unsere Sehne; diese ist also die Axe des Ebenenbüschels

$$x \cdot C(x, y, z) + \lambda \cdot D(x, y, z) = 0,$$

und eine Ebene $(x:\lambda)$ aus ihm schneidet die R^3 ausser in den Stützpunkten der Sehne noch in dem Punkt, für welchen $t = \frac{\lambda}{x}$ ist. Da dies für alle Sehnen gilt, erkennen wir:

Die Ebenenbüschel um die Sehnen einer kubischen Raumkurve sind unter einander in der Weise projektiv, dass die zusammengehörigen Ebenen immer durch denselben Punkt der

Kurve gehen. Deshalb kann die kubische Raumkurve erzeugt gedacht werden durch die projektiven Ebenenbüschel um irgend drei ihrer Sehnen. Bei der Auswahl derselben ist aber auf folgendes zu achten: Die Ebenenbüschel um zwei Sehnen erzeugen eine Fläche II. Grades, die durch die R^3 geht und somit zum Bündel (7.) gehört; auf derselben liegen, wie wir noch sehen werden, unendlich viele Sehnen, und unter diesen darf sich die dritte zur Erzeugung der R^3 auszuwählende Sehne nicht befinden, da ihr Büschel in diesem Falle mit den anderen beiden dieselbe Fläche II. Grades erzeugen würde.

§ 3. Die Erzeugung der kubischen Raumkurve durch zwei kollineare Bündel.

Wir nehmen zwei beliebige Punkte unserer R^3 und dürfen, da A, A', A'' und B, B', B'' zwei beliebige Tripel entsprechender Ebenen in den Büscheln $(g), (g'), (g'')$ sind, ohne Schädigung der Allgemeinheit unserer Ausführungen die Punkte O und Q wählen, in denen sich A, A', A'' und B, B', B'' schneiden. Hinsichtlich der durch O und der durch Q gehenden Ebenen, welche die Ebenenbündel (O) und (Q) bilden, können wir ganz analoge Ausführungen machen, wie in § 1 über die Ebenenbüschel (g) und (g') , nämlich: Der Bündel (O) wird dargestellt durch die Gleichung

$$\xi \cdot A(x, y, z) + \eta \cdot A'(x, y, z) + \zeta \cdot A''(x, y, z) = 0,$$

in der A, A', A'' durch drei beliebige andere Ebenen aus ihm ersetzt werden können, die aber nicht durch dieselbe Gerade gehen dürfen; jedes Wertsystem für die Verhältnisse $\xi : \eta : \zeta$ bestimmt eine Ebene aus (O) , der wir das Symbol $(\xi : \eta : \zeta)$ beilegen. Dasselbe gilt vom Ebenenbündel (Q) , dessen Gleichung

$$\xi' \cdot B(x, y, z) + \eta' \cdot B'(x, y, z) + \zeta' \cdot B''(x, y, z) = 0$$

lautet. Zwischen (O) und (Q) wird eine Kollineation hergestellt durch Gleichungen zwischen ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' , die analog sind den Gleichungen (3.) zwischen α, λ und μ, ν und sich wiederum zu

$$\xi' : \eta' : \zeta' = \xi : \eta : \zeta$$

vereinfachen, wenn die Ebenen A und B, A' und B', A'' und B'' sich in der Kollineation entsprechen. Zwei kollineare Ebenenbündel lassen sich also stets durch zwei Gleichungen

$$(8.) \quad \begin{cases} \xi \cdot A(x, y, z) + \eta \cdot A'(x, y, z) + \zeta \cdot A''(x, y, z) = 0, \\ \xi' \cdot B(x, y, z) + \eta' \cdot B'(x, y, z) + \zeta' \cdot B''(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ausdrücken, wobei einander immer je zwei Ebenen mit demselben Wertsystem $\xi : \eta : \zeta$ zugeordnet sind*).

*) Hierzu ist das Analoge wie zu den Gleichungen (4.) zu bemerken.

Die Haupteigenschaft der Kollineation ist nun folgende: Nehmen wir zwei Ebenen A_1 und A_2 von (O) , deren Symbole $(\xi_1 : \eta_1 : \zeta_1)$ und $(\xi_2 : \eta_2 : \zeta_2)$ seien, und die entsprechenden Ebenen B_1 und B_2 aus (Q) , so erkennen wir sofort, dass jeder Ebene aus (O) mit der Gleichung

$$(9a.) \quad \mu \cdot A_1(x, y, z) + \nu \cdot A_2(x, y, z) \equiv (\mu\xi_1 + \nu\xi_2) \cdot A(x, y, z) + (\mu\eta_1 + \nu\eta_2) \cdot A'(x, y, z) + (\mu\zeta_1 + \nu\zeta_2) \cdot A''(x, y, z) = 0$$

vermöge der Kollineation in (Q) die Ebene entspricht, deren Gleichung lautet:

$$(9b.) \quad \mu \cdot B_1(x, y, z) + \nu \cdot B_2(x, y, z) \equiv (\mu\xi_1 + \nu\xi_2) \cdot B(x, y, z) + (\mu\eta_1 + \nu\eta_2) \cdot B'(x, y, z) + (\mu\zeta_1 + \nu\zeta_2) \cdot B''(x, y, z) = 0;$$

(9a.) und (9b.) liefern uns also zwei Ebenenbüschel, die so projektiv sind, dass einander immer zwei Ebenen zugeordnet sind, die bereits vermöge der Kollineation zusammengehören; mit anderen Worten, durchläuft in dem einen Bündel eine Ebene einen Büschel, so beschreibt die ihr in dem kollinearen Bündel entsprechende Ebene einen dazu projektiven Büschel. Hierdurch sind die Axen der beiden Ebenenbüschel einander zugeordnet, so dass wir gleichzeitig eine eindeutige Beziehung zwischen den durch O und Q gehenden Geraden, den Strahlen der Strahlenbündel (O) und (Q) , erhalten; in dieser sind den Strahlen, die in einer Ebene des einen Bündels liegen, die Strahlen in der entsprechenden Ebene des anderen Bündels zugeordnet, und es zeigt sich bei näherer Betrachtung, dass sie ebenfalls den Namen Kollineation verdient, und dass sich umgekehrt aus ihr in analoger Weise wiederum die Kollineation der Ebenenbündel ergibt. Wir dürfen also über beide Beziehungen zusammenfassend sagen:

In zwei kollinearen Bündeln ist jedem Strahl des einen ein Strahl des anderen und jeder Ebene des einen eine Ebene des anderen zugeordnet; liegt in einem Bündel ein Strahl in einer Ebene, so gilt dasselbe von den entsprechenden Elementen im anderen Bündel.

Zwei entsprechende Ebenenbüschel (9a.) und (9b.) nun erzeugen eine Regelschar; die Trägerfläche derselben hat die Gleichung

$$A_1(x, y, z) \cdot B_2(x, y, z) - A_2(x, y, z) \cdot B_1(x, y, z) = 0$$

oder, wenn wir bedenken, dass

$$A_1(x, y, z) \equiv \xi_1 \cdot A(x, y, z) + \eta_1 \cdot A'(x, y, z) + \zeta_1 \cdot A''(x, y, z)$$

u. s. w. ist, und

$$(10.) \quad \eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2 = u, \quad \zeta_1\xi_2 - \xi_1\zeta_2 = v, \quad \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2 = w$$

setzen,

$$(11.) \quad u \cdot [A'(x, y, z) \cdot B''(x, y, z) - B'(x, y, z) \cdot A''(x, y, z)] \\ + v \cdot [A''(x, y, z) \cdot B(x, y, z) - B''(x, y, z) \cdot A(x, y, z)] \\ + w \cdot [A(x, y, z) \cdot B'(x, y, z) - B(x, y, z) \cdot A'(x, y, z)] = 0.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (5.), (5 a.), (5 b.), (7.) erkennen wir sofort, dass diese Fläche zu dem Bündel von Flächen II. Grades gehört, dessen Grundkurve unsere kubische Raumkurve R^3 ist; und zwar können wir auf diese Weise jede Fläche $(u:v:w)$ desselben erhalten, wenn wir drei der Grössen $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ beliebig annehmen und die übrigen drei aus (10.) bestimmen. So bekommen wir z. B. die Fläche ψ^2 für $\xi_1 = 1, \eta_1 = \zeta_1 = 0, \xi_2 = 0, \eta_2 = 1, \zeta_2 = 0$, von den schon durch die Gleichungen (4 a.) dargestellten projektiven Ebenenbüscheln erzeugt als Trägerfläche der Regelschar Γ .

Die Geraden der sämtlichen sich so ergebenden Regelscharen sind dadurch charakterisiert, dass sich in jeder von ihnen zwei in der Kollineation einander entsprechende Ebenen schneiden; deshalb giebt es ihrer doppelt unendlich viele und kann ihre Gesamtheit als ein Erzeugnis der Kollineation zwischen (O) und (Q) angesprochen werden. In diesem Strahlensystem ist jede Gerade eindeutig bestimmt durch die Werte von $\xi:\eta:\zeta$, die dem sich in ihr begegnenden Paar entsprechender Ebenen zukommen, und sei deswegen ebenfalls mit dem Symbol $(\xi:\eta:\zeta)$ bezeichnet; insbesondere haben die Geraden g, g', g'' , von denen wir ausgingen und die auch zum System gehören, die Symbole $(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)$. — Es erhebt sich nun sofort die Frage, wann eine Gerade $(\xi:\eta:\zeta)$ auf einer bestimmten Fläche $(u:v:w)$ liegt: Die letztere wird erzeugt durch die Ebenenbüschel (9 a.) und (9 b.), wenn ξ_1, η_1 u. s. w. den Gleichungen (10.) genügen; folglich müssen die Ebenen (8.), deren Schnittlinie die Gerade $(\xi:\eta:\zeta)$ ist, ein Paar entsprechender Ebenen aus diesen Büscheln sein, wenn die Gerade auf der Fläche liegen soll. Dann muss es aber ein Verhältnis $\mu:\nu$ so geben, dass

$$\xi:\eta:\zeta = (\mu\xi_1 + \nu\xi_2) : (\mu\eta_1 + \nu\eta_2) : (\mu\zeta_1 + \nu\zeta_2)$$

ist; das ist aber nur möglich, wenn

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder, nach (10.),

(12.)

$$u\xi + v\eta + w\zeta = 0$$

ist. Dieser Gleichung also, welche die gesuchte Bedingung ist, genügen einerseits alle Systemgeraden $(\xi:\eta:\zeta)$, die auf einer bestimmten Fläche $(u:v:w)$ liegen, und andererseits alle Flächen $(u:v:w)$, die eine bestimmte Systemgerade $(\xi:\eta:\zeta)$ enthalten. Ist sie jedoch nicht erfüllt, so schneidet die Gerade $(\xi:\eta:\zeta)$ die Fläche $(u:v:w)$ in zwei Punkten, deren Koordinaten gleichzeitig die drei Gleichungen (8.) und (11.) und folglich auch die aus ihnen abgeleiteten befriedigen müssen: Wir eliminieren aus (11.) mit Hilfe von (8.) das erste Mal $A(x, y, z)$ und $B(x, y, z)$, das

zweite Mal $A'(x, y, z)$ und $B'(x, y, z)$, das dritte Mal $A''(x, y, z)$ und $B''(x, y, z)$ und lassen die von 0 verschiedenen und von x, y, z unabhängigen Faktoren $u\xi + v\eta + w\zeta, \frac{1}{\xi}, \frac{1}{\eta}, \frac{1}{\zeta}$ fort; dann erhalten wir die drei Gleichungen (5 a.), (5 b.), (5.), die gleichzeitig nur für Punkte unserer R^3 erfüllt sind. Demnach liegen die gesuchten beiden Schnittpunkte auf der R^3 . Vorausgesetzt ist dabei, dass keine der Grössen ξ, η, ζ verschwindet; ist jedoch etwa $\zeta = 0$, so können wir zwar nur die ersten beiden Eliminationen ausführen, die uns (5 a.) und (5 b.) liefern, aber die ganze Gerade ($\xi : \eta : 0$) liegt nach (12.) auf der durch $u = 0, v = 0, w = 1$ bestimmten Fläche Ψ^2 , so dass die Gleichung (5.) für ihre sämtlichen Punkte und nicht bloss für die beiden Schnittpunkte erfüllt ist; es gilt daher dasselbe wie vorher, und wir haben gefunden, dass jede Systemgerade Sehne der R^3 ist. Auch die Umkehrung dieses Satzes ist leicht zu beweisen.

Jede Fläche $(u : v : w)$ des Bündels (7.), dessen Grundkurve R^3 ist, trägt also eine Regelschar Σ , die aus Sehnen der R^3 besteht. Zwei Flächen $(u_1 : v_1 : w_1)$ und $(u_2 : v_2 : w_2)$ haben eine Sehne ($\xi : \eta : \zeta$) gemeinsam, welche sich nach (12.) aus den beiden Gleichungen

$$u_1\xi + v_1\eta + w_1\zeta = 0, \quad u_2\xi + v_2\eta + w_2\zeta = 0$$

bestimmt; folglich gilt für alle Flächen des Bündels, was wir in § 2 nur für Φ^2, X^2, Ψ^2 nachwiesen, nämlich, dass die vollständige Schnittkurve je zweier von ihnen sich aus R^3 und einer Sehne zusammensetzt. — Ist eine Fläche $(u : v : w)$ allgemein, so liegt auf ihr noch eine zweite Regelschar T , und diese besteht aus einfachen Treffgeraden der R^3 ; zwei beliebige Geraden nämlich aus Σ und T schneiden sich, liegen daher in einer Ebene und bilden zusammen die vollständige Schnittkurve dieser Ebene mit der Trägerfläche; somit müssen sich auf sie die drei Schnittpunkte der R^3 mit derselben Ebene verteilen, wobei immer einer und nur einer auf die Gerade aus T fällt, da sich auf derjenigen aus Σ bereits zwei und nur zwei befinden. — Ist die Fläche $(u : v : w)$ jedoch ein Kegel, so muss ihr Scheitel ein Punkt der R^3 sein; denn sonst enthielte, da die Kegelkanten Sehnen sind, eine Ebene durch zwei derselben vier Punkte der R^3 , was ohne Ausartung der Kurve nicht möglich ist. Ein Kegel $(u : v : w)$ besteht daher aus Sehnen, und zwar, wie unschwer zu erkennen, aus allen Sehnen der R^3 , die von einem Punkte der Kurve ausgehen; mit anderen Worten: Die Sehnen einer kubischen Raumkurve, die von einem Punkte ausgehen, bilden einen Kegel II. Grades. — Die betrachtete Fläche $(u : v : w)$ können wir uns immer auch erzeugt denken durch projektive Ebenenbüschel um zwei Geraden aus Σ , also um zwei Sehnen der R^3 , und sehen, dass dabei jede zwei entsprechenden Ebenen denselben dritten Schnittpunkt mit der Kurve haben; somit kommen wir hier auf die projektiven Ebenenbüschel zurück, die wir am Ende von § 2 behandelten.

Zwei entsprechende Strahlen aus (O) und (Q) treffen sich im allgemeinen nicht, da zwei Gerade im Raum, die sich begegnen sollen, eine Bedingung erfüllen müssen; schneiden sie sich aber, so erzeugen die entsprechenden Ebenenbüschel aus (O) und (Q) , deren Axen sie sind, einen der Kegel des Flächenbündels (7.), so dass der Schnittpunkt als Scheitel des Kegels auf R^3 liegt. Ist andererseits P ein Punkt der Kurve, so sind die Strahlen OP und QP einander in der Kollineation zugeordnet; denn nehmen wir zwei Sehnen s_1 und s_2 der R^3 , die von P ausgehen, so entsprechen in der Kollineation den dieselben mit O verbindenden Ebenen (Os_1) und (Os_2) in (Q) die Ebenen (Qs_1) und (Qs_2) und folglich auch der Schnittlinie OP der ersten beiden Ebenen die Schnittlinie QP der letzten beiden Ebenen. Also ist R^3 der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen aus (O) und (Q) . Bedenken wir noch, dass O und Q zwei beliebige Punkte der R^3 waren, so können wir zusammenfassend sagen:

Die Bündel, deren Scheitel irgend zwei Punkte einer kubischen Raumkurve sind, kann man so kollinear auf einander beziehen, dass sie die Kurve selbst als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen und ihr Sehnensystem als Gesamtheit der Schnittlinien entsprechender Ebenen erzeugen.

Es können uns aber als das Ursprüngliche zwei beliebige kollineare Bündel (O) und (Q) durch die Gleichungen (8.) gegeben sein; dann nehmen wir die Schnittlinien g, g', g'' von A und B, A' und B', A'' und B'' , machen die Ebenenbüschel um sie gemäss den Gleichungen (4.) und (4b.) projektiv, wiederholen darauf mit unwesentlichen Abänderungen unseren bisherigen Gedankengang und finden die Umkehrung des obigen Satzes:

Zwei kollineare Bündel erzeugen eine durch ihre Scheitel gehende kubische Raumkurve und ihr Sehnensystem.

Eine Ausnahme jedoch sei erwähnt: Sind die Bündel (O) und (Q) perspektiv zu derselben Ebene ε , d. h. schneiden sich je zwei entsprechende Strahlen in einem Punkte (und somit je zwei entsprechende Ebenen in einer Geraden) von ε , so besteht natürlich der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen aus ε und dem sich in dieser Kollineation selbst entsprechenden Strahl OQ . — Auch sonst kann die kubische Raumkurve in Folge von Besonderheiten der sie definierenden Gebilde ausarten; es sei in dieser Hinsicht nur angeführt, dass sie in einen Kegelschnitt und eine durch einen Punkt desselben gehende Gerade zerfallen kann.

§ 4. Die gestaltlichen Verhältnisse der kubischen Raumkurve.

Eine Ebene ε hat mit der kubischen Raumkurve R^3 drei Schnittpunkte M, N, P ; in ihr liegen somit drei Sehnen $m \equiv NP, n \equiv PM, p \equiv MN$. Ferner gehen von M, N, P drei Kegel M^2, N^2, P^2 von Sehnen

der Kurve aus, deren jeder von ε in zwei Kanten geschnitten wird: M^2 in n und p , N^2 in p und m , P^2 in m und n . Es sind nun vier Fälle möglich, da M , N , P durch die Wurzeln einer kubischen Gleichung bestimmt sind und diese entweder eine reelle und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln hat oder drei reelle, von denen sich zwei zu einer Doppelwurzel oder die sich alle drei zu einer dreifachen Wurzel vereinigen können.

Im ersten Fall sei etwa M der reelle Punkt; dann ist m eine Sehne mit konjugiert imaginären Stützpunkten, aber selbst reell; denn, machen wir M und einen anderen reellen Punkt der R^3 zu Scheiteln kollinearier Bündel, durch die R^3 erzeugt wird, so schneiden sich ε und die ihr im zweiten Bündel zugeordnete Ebene in einer Sehne der Kurve, die ebenso wie die Ebenen reell ist und nur unsere m sein kann. Von den Kegeln ist allein M^2 reell; aber er hat mit ε keine reellen Schnittkanten, da auch n und p imaginär sind.

Im zweiten Fall sind M , N , P drei reelle und getrennte Punkte, so dass nichts weiter zu bemerken ist.

Der dritte Fall entsteht aus dem zweiten, wenn wir bei festgehaltener R^3 die Ebene ε um eine der drei Sehnen drehen, etwa um m , und zwar so lange, bis M in N hineinfällt; dann bleiben ausser m noch N , P , N^2 , P^2 fest, während p , die Kantenschar von N^2 durchlaufend, schliesslich in die zu N gehörige Tangente der Kurve übergeht und n , sich auf P^2 bewegend, mit m zusammenfällt; nach Vollendung der Drehung berührt daher ε den P^2 längs m und hat mit dem Kegel $M^2 \equiv N^2$ zwei reelle Schnittkanten, $m \equiv n$ und p . Es liegen jetzt in ε ein Punkt N und die in ihm berührende Tangente der R^3 , ferner ein weiterer Punkt P derselben und die Sehne $m \equiv NP$; ε berührt die Kurve in N .

Der vierte Fall ergibt sich wieder aus dem dritten, wenn wir ε so um p drehen, dass P sich dem N unbegrenzt nähert; ausser p bleiben N und N^2 fest; dagegen rückt m , die Kantenschar von N^2 durchlaufend, immer mehr an p heran, so dass ε sich gleichzeitig der zu N gehörigen Schmiegungeebene der R^3 und der längs p den N^2 berührenden Ebene nähert und schliesslich mit diesen beiden Ebenen, die hiernach identisch sein müssen, zusammenfällt. Jetzt liegt also in ε ein Punkt N der Kurve und die zugehörige Tangente p , und ε ist Schmiegungeebene der R^3 in N und Berührungsebene von N^2 längs p .

Aus diesen Überlegungen können wir folgendes entnehmen: Unter den reellen Sehnen der R^3 sind drei Arten zu unterscheiden, eigentliche Sehnen mit reellen und getrennten Stützpunkten, uneigentliche Sehnen mit konjugiert imaginären Stützpunkten und (als Übergang zwischen beiden) Tangenten. — Die Berührungsebene eines Kegels P^2 längs einer Kante PN schneidet den zum zweiten Stützpunkt N derselben gehörigen Kegel N^2 ausser in PN noch in der Tangente, die R^3 in N berührt. — Sind p die

Tangente und ε die Schmiegungebene der R^3 in einem Punkte N , so wird der Kegel N^2 von ε längs p berührt.

Die behandelten vier Fälle können nun auch eintreten, wenn ε die unendlich ferne Ebene ist; es werden dann nur die Kegel zu Cylindern, die Tangenten der Kurve in ihren unendlich fernen Punkten zu Asymptoten und die Berührungsebenen der Cylinder längs ihrer unendlich fernen Kanten zu Asymptotenebenen. Bedenken wir aber, dass es drei verschiedene Typen von Cylindern II. Grades giebt, — den elliptischen Cylinder ohne, den hyperbolischen Cylinder mit zwei reellen unendlich fernen Kanten und den parabolischen Cylinder mit einer reellen unendlich fernen Kante, längs deren die unendlich ferne Ebene ihn berührt, — so erkennen wir, dass unsere vier Fälle uns gestaltlich ganz verschiedene Typen der kubischen Raumkurve liefern müssen; diese sind:

1) Die kubische Ellipse mit einem reellen unendlich fernen Punkt und einer reellen Asymptote; mit dieser zusammen liegt sie auf einem elliptischen Cylinder, wie Modell 1 zeigt.

2) Die kubische Hyperbel mit drei getrennten reellen unendlich fernen Punkten und drei reellen Asymptoten; sie liegt mit jeder der letzteren zusammen auf einem hyperbolischen Cylinder, in dessen Asymptotenebenen sich jedesmal ihre beiden anderen Asymptoten befinden; die Kurve ist in Modell 2 auf dem einen dieser drei Cylinder dargestellt.

3) Die kubische parabolische Hyperbel, welche die unendlich ferne Ebene in einem reellen Punkt schneidet und in einem zweiten berührt; nach dem ersten geht die einzige Asymptote der Kurve, mit der zusammen sie, wie in Modell 3, auf einem parabolischen Cylinder liegt; der zweite bestimmt die Richtung der Kanten eines hyperbolischen Cylinders, der unsere Kurve ebenfalls trägt.

4) Die räumliche kubische Parabel, welche die unendlich ferne Ebene zur Schmiegungebene hat; durch sie geht nur ein parabolischer Cylinder, auf dem sie in Modell 4 dargestellt ist.

Durch jeden Punkt des Raumes der nicht auf der kubischen Raumkurve R^3 liegt, geht eine und nur eine reelle Sehne, deren Wertsystem $\xi : \eta : \zeta$ sich aus den Gleichungen (8.) bestimmt, wenn man in sie für x, y, z die Koordinaten des Punktes einführt. Betrachtet man daher von irgend einem Punkte aus die R^3 , so können von ihr nur zwei Punkte sich decken, die Stützpunkte der von jenem Punkte ausgehenden Sehne, und sie hat, wenn dieselben reell sind, einen scheinbaren Doppelpunkt. Jenachdem also durch den Punkt, von dem aus eine kubische Raumkurve gesehen wird, eine eigentliche oder eine uneigentliche Sehne geht, hat sie einen scheinbaren Doppelpunkt oder nicht; im ersten Fall ist die Projektion der kubischen Raumkurve aus dem Punkte auf irgend eine Ebene eine ebene Kurve III. Ordn. mit gewöhnlichem

Doppelpunkt und im zweiten Fall eine solche mit isoliertem Doppelpunkt. Diese beiden Arten von Punkten des Raumes nun werden von einander getrennt durch die Fläche, die durch die Tangenten der kubischen Raumkurve gebildet wird und von deren Punkten aus gesehen die Kurve eine scheinbare Spitze hat; die Projektion der kubischen Raumkurve aus einem solchen Punkte auf eine Ebene ist eine ebene Kurve III. Ordn. mit Spitze (Rückkehrpunkt). Diese Fläche nun ist im Modell 5 für die im ersten Modell abgebildete kubische Ellipse dargestellt, begrenzt durch ihre Schnittkurven mit vier passend gewählten Ebenen; sie hat die kubische Ellipse zur Gratkurve und enthält ihre Asymptote, die durch einen weiss-roten Faden angedeutet ist. (Genauerer hierüber siehe in: F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Leipzig 1902, Seite 424 bis 437.)

II. Der Horopter.

§ 5. Die physiologischen Grundlagen der Theorie des Horopters und ihre geometrische Bedeutung.

Blickt man mit beiden Augen nach einem Punkte im Raume hin, so vereinigen sich die auf den beiden Netzhäuten entworfenen Bilder dieses Punktes zu einer einzigen Empfindung; man sieht den Punkt einfach. Von den übrigen Punkten des Raumes werden bei dieser bestimmten Augenstellung nur gewisse Punkte einfach gesehen, die anderen aber doppelt, eine Thatsache, deren wir uns allerdings für gewöhnlich nicht bewusst werden. Den Ort der bei einer bestimmten Augenstellung einfach gesehenen Punkte des Raumes nun nennt man den zu dieser Augenstellung gehörigen Horopter.

Wenn wir den Horopter mathematisch behandeln und dabei zu anschaulichen Ergebnissen kommen wollen, so müssen wir uns mit einer Annäherung an die Wirklichkeit begnügen, die wir durch die folgenden Sätze genau festlegen werden; dabei soll jedem dieser — wie ausdrücklich bemerkt sei, empirisch gefundenen*) — Sätze seine geometrische Bedeutung sofort angefügt werden.

Satz I: In jedem Auge giebt es einen „Kernpunkt“ von der Eigenschaft, dass die nach ihm zielenden Lichtstrahlen ungebrochen durch die optischen Medien des Auges hindurchgehen.

Die Gesamtheit der durch den Kernpunkt gehenden Geraden oder Strahlen wollen wir das Kernbündel nennen; jeder Strahl desselben

*) Siehe Helmholtz, a. a. O.

trifft also die Netzhaut des Auges in einem ganz bestimmten Punkte, welcher das Bild eines jeden in dem Strahl gelegenen Raumpunktes aufnimmt. Daher werden wir uns das Kernbündel als mit dem Auge fest verbunden und mit ihm bewegt denken können.

Satz II: Der Kernpunkt des Auges ist zugleich der Drehpunkt desselben.

Er bleibt also bei allen Augendrehungen im Kopfe und somit bei unbewegtem Kopfe auch im Raume fest. Wir wollen im folgenden immer voraussetzen, dass der Kopf still, und zwar aufrecht und gerade gehalten wird; dann ist die Medianebene des Kopfes vertikal und die zu ihr senkrechte Verbindungslinie der Kernpunkte der beiden Augen horizontal.

Satz III: In jedem Auge giebt es eine ausgezeichnete Netzhautstelle, die Mitte der Fovea centralis, auf welcher der „Blick- oder Fixationspunkt“ abgebildet wird, d. h. der Raumpunkt, auf welchen wir den Blick richten.

Der diese Stelle treffende Strahl des Kernbündels, die sogenannte Blicklinie, ist also insofern ein ausgezeichneter Strahl desselben, als sie immer nach dem jedesmaligen Blickpunkt gerichtet wird und uns hierdurch die Stellung des Auges bei gegebenem Blickpunkt bestimmen hilft; und zwar handelt es sich dabei immer nur um den einen Halbstrahl der Blicklinie, nämlich um denjenigen, der durch die Pupille hindurchtritt. Wir werden daher immer nur diesen einen Halbstrahl der Blicklinie in Betracht ziehen und zeichnen.

Satz IV: (Das Gesetz von Donders:) Ist die Lage der Blicklinie in Beziehung zum Kopfe gegeben, so gehört zu ihr eine ganz bestimmte Stellung des Auges, die unabhängig ist von dem Wege, auf welchem die Blicklinie in diese Lage gebracht ist.

Das Auge und mit ihm das Kernbündel können also bei gegebener Blicklinie sich nicht um dieselbe beliebig drehen, sondern müssen eine gewisse, ihnen von der Natur vorgeschriebene Stellung einnehmen.

Satz V: (Das Gesetz von Listing:) Es giebt eine „Grundstellung“, in die man jede andere natürliche Stellung des Auges durch eine Drehung um diejenige Axe überführen kann, welche sowohl auf der Blicklinie der Grundstellung als auch auf der Blicklinie der gegebenen Stellung senkrecht steht. — Die Blicklinie der Grundstellung ist zur Medianebene des Kopfes parallel und bei aufrechter Kopfhaltung horizontal.

Dieses Gesetz gewährt uns die Möglichkeit, die Stellung des Kernbündels bei gegebener Blicklinie aus der bekannten Grundstellung abzuleiten. Es seien in Fig. 1 K der Kernpunkt, a, f_1, f_2 die Blicklinien der Grundstellung und zweier anderer Augenstellungen, ferner d_1 auf a und f_1 , d_2 auf a und f_2 senkrecht; wollen wir das Kernbündel aus der ersten oder zweiten Stellung in die Grundstellung bringen, so müssen wir es nach dem obigen Gesetz mit d_1 , beziehentlich d_2 als Drehaxe um den Winkel $\varphi_1 = \sphericalangle f_1 a$, beziehentlich $\varphi_2 = \sphericalangle f_2 a$ drehen. Umgekehrt geht das Auge aus der Grundstellung in die beiden Stellungen 1 und 2 über durch Drehung um dieselben Axen, aber mit den Drehungswinkeln $-\varphi_1$ und $-\varphi_2$. Bemerket sei, dass d_1, d_2 und überhaupt alle Drehaxen des Listingschen Gesetzes in der Ebene ε liegen, die in K auf a senkrecht steht.

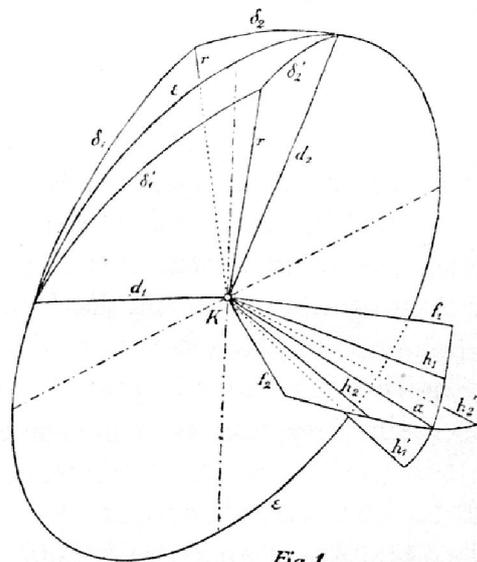


Fig. 1.

Wollen wir nun von der Stellung 1 zur Stellung 2 kommen, so gehen wir zunächst durch Drehung des Kernbündels mit d_1 als Drehaxe und φ_1 als Drehungswinkel von der Stellung 1 in die Grundstellung und aus dieser durch Drehung mit d_2 als Drehaxe und $-\varphi_2$ als Drehungswinkel in die Stellung 2 über. Haben wir dabei den besonderen Fall, dass a, f_1, f_2 in einer Ebene liegen, so fallen d_1 und d_2 in den zu dieser Ebene senkrechten Strahl d hinein; es ist daher die Aufeinanderfolge der beschriebenen beiden Drehungen nichts anderes als eine — eventuell ihren Drehungssinn wechselnde — Drehung um d ; das heisst aber:

Zwei natürliche Augenstellungen, deren Blicklinien mit der Blicklinie der Grundstellung in einer Ebene liegen, lassen sich durch Drehung um den zu dieser Ebene senkrechten Strahl des Kernbündels unmittelbar in einander überführen.

Im allgemeinen Fall aber, in dem d_1 und d_2 verschiedene Strahlen sind, müssen wir die beiden oben angegebenen Drehungen genauer betrachten: Die erste Drehung (mit d_1 als Axe und φ_1 als Drehungswinkel) verwandelt die Halbierungslinie h_1 des Winkels $\sphericalangle f_1 a$ in den zu derselben i. Bez. auf a symmetrischen Strahl h'_1 (siehe Fig. 1) und folglich die in K zu h_1 senkrechte Ebene δ_1 in die zu h'_1 senkrechte, also zu δ_1 i. Bez. auf ε symmetrische Ebene δ'_1 ; dabei geht jeder Strahl des Kernbündels, der in δ_1 liegt, in den zu ihm bez. ε symmetrischen Strahl von δ'_1 über. Es ist wohl kaum nötig, noch zu erwähnen, dass sich δ_1 und δ'_1 in d_1 schneiden.

— Ersetzen wir in dem soeben Gesagten überall den Index 1 durch 2, so gilt es genau für die Drehung mit d_2 als Axe und g_2 als Drehungswinkel. Diese ist aber die Umkehrung unserer zweiten Drehung (mit d_2 als Axe und $-g_2$ als Drehungswinkel); bei der letzteren wird also jeder Strahl des Kernbündels, der in δ'_2 liegt, in den zu ihm bez. ε symmetrischen Strahl von δ_2 verwandelt. — Nehmen wir nun die Schnittlinie r von δ_1 und δ_2 und die Schnittlinie r'^* von δ'_1 und δ'_2 , so sind dieselben zu einander i. Bez. auf ε symmetrisch; demnach wird durch die erste Drehung r in r' und durch die zweite r' in r übergeführt. Lassen wir daher die beiden Drehungen, wie oben angegeben, auf einander folgen und fassen nur die Anfangsstellung 1 und die Endstellung 2 ohne Rücksicht auf die Zwischenstellungen auf, so sehen wir, dass der Strahl r an seinem Platze geblieben ist; mithin können wir uns die zweite Stellung aus der ersten unmittelbar durch eine Drehung um r hervorgegangen denken. Wir haben also gefunden:

Jede zwei natürlichen Augenstellungen lassen sich unmittelbar in einander überführen durch Drehung des Kernbündels um den Schnittstrahl r der Ebenen, welche senkrecht stehen auf den Halbierungslinien h_1 und h_2 der Winkel zwischen der Blicklinie a der Grundstellung und den Blicklinien f_1 und f_2 der beiden gegebenen Stellungen.

Man erkennt sofort, dass in diesem Satz das Listingsche Gesetz und der vorhin abgeleitete Satz als Spezialfälle enthalten sind. Ein weiterer Ort für r ist die Ebene, welche längs der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle f_1 f_2$ auf der Ebene ($f_1 f_2$) senkrecht steht; denn f_1 und f_2 müssen mit r gleiche Winkel bilden, da sie durch Drehung um r in einander verwandelt werden. Ferner steht r senkrecht auf der Ebene ($h_1 h_2$); denn es ist h_1 zu δ_1 , h_2 zu δ_2 , folglich die Ebene ($h_1 h_2$) zu den Ebenen δ_1 und δ_2 und somit auch zu ihrer Schnittlinie r normal.

Satz VI: Die Netzhäute unserer beiden Augen sind punktweise so auf einander bezogen, dass jeder Stelle der einen eine und nur eine Stelle der andern korrespondiert. Die physiologische Bedeutung dieser Beziehung ist die, dass ein Raumpunkt nur dann einfach gesehen wird, wenn seine Bilder in den beiden Augen auf korrespondierende Netzhautstellen fallen. Insbesondere korrespondieren die Mitten der beiden Foveae centrales mit einander.

Dieser Satz ist der erste, der uns eine Beziehung zwischen den beiden Augen des Menschen giebt; durch ihn ist eine ein-eindeutige Verwandtschaft zwischen den beiden Kernbündeln hergestellt:

*) In Fig. 1 ist der Accent bei r' vergessen worden.

Jedem Strahl des einen Bündels ist ein ganz bestimmter Strahl des anderen zugeordnet, und diese Zuordnung bleibt erhalten, wie man auch die Augen und mit ihnen die Kernbündel drehen mag; insbesondere entsprechen einander immer die beiden Blicklinien. Nur diejenigen Raumpunkte werden bei einer bestimmten Augenstellung einfach gesehen, in denen sich zwei korrespondierende Strahlen aus den beiden Kernbündeln schneiden; zu diesen Punkten gehört — wie es ja sein muss — der Blickpunkt. Der Horopter wird somit durch die Verwandtschaft zwischen den beiden Kernbündeln erzeugt und enthält den Blickpunkt.

Satz VII: Wenn beide Augen in der Grundstellung sind, d. h. wenn wir bei aufrechter, gerader Kopfhaltung unseren Blick auf denjenigen unendlich fernen Punkt der Medianebene unseres Kopfes richten, der im Horizont liegt, so sind je zwei entsprechende Strahlen der Kernbündel parallel.

Durch diesen Satz erfahren wir, wie die Verwandtschaft zwischen den beiden Kernbündeln beschaffen ist: Verschieben wir die parallel gestellten Bündel so parallel zu sich selbst, dass ihre Scheitel in einen Punkt zusammenfallen, so decken sich je zwei entsprechende Strahlen. Wie demnach auch die Augenstellung sei, immer stehen die beiden Kernbündel zu einander in der Verwandtschaft der Kongruenz; der zugehörige Horopter ist der Ort der Punkte, in denen sich je zwei entsprechende Strahlen der beiden kongruenten Kernbündel schneiden.

Hiermit ist aber eine eindeutige Beziehung zwischen den Ebenen der Kernbündel verbunden; zugeordnet sind einander je zwei Ebenen, die zusammenfallen, wenn die Kernbündel zur Deckung gebracht werden. Einem Strahl und einer durch ihn gehenden Ebene des einen Bündels entsprechen im anderen Bündel ein Strahl und eine Ebene, die wiederum vereinigt liegen. Hieraus schon folgt, dass die Kongruenz ein besonderer Fall der Kollineation ist; im nächsten Paragraphen werden wir es mit unseren Mitteln nachweisen.

§ 6. Die geometrischen Eigenschaften des Horopters.

Im folgenden soll, ausser wenn wir es ausdrücklich bemerken, eine allgemeine Lage des Blickpunktes angenommen werden, in der keine Besonderheiten auftreten, vermöge deren der Horopter ausarten kann; die Ausartungen sollen vielmehr erst am Ende des nächsten Paragraphen behandelt werden.

Der Kernpunkt des rechten Auges sei mit K_1 , derjenige des linken mit K_2 bezeichnet. Die Blicklinien der Grundstellung und zwar nur die in Betracht kommenden Halbstrahlen derselben seien a_1 und a_2 ; sie stehen

auf der Geraden $K_1 K_2$ senkrecht und sind beide nach vorn gerichtet. F sei ein beliebiger Punkt im Raume vor uns, und f_1, f_2 seien die Blicklinien für den Fall, dass F Blickpunkt ist, d. h. diejenigen Halbstrahlen, die von K_1 und K_2 aus- und durch F hindurchgehen.

Wie wir aus der Grundstellung in die zu betrachtende Augenstellung übergehen, ist nach dem Dondersschen Gesetze gleichgültig. Wir denken uns daher, dass wir zunächst denjenigen unendlich fernen Punkt fixieren, auf den f_1 hinzeigt, so dass die zugehörigen Blicklinien f_1 und f'_2 parallel und gleichgerichtet sind; die Drehungen der Augen aus der Grundstellung in diese Stellung geschehen nach dem Listingschen Gesetz um parallele Axen und sind genau gleich, so dass wiederum ebenso wie in der Grundstellung entsprechende Strahlen der beiden Kernbündel parallel sind. Dann ist aber jeder unendlich ferne Punkt und ferner auch jeder Punkt der durch K_1 und K_2 gehenden Geraden Schnittpunkt zweier entsprechender Strahlen, also Horopterpunkt; wir haben somit nebenbei den Satz bewiesen:

Ist der Blickpunkt unendlich fern, so besteht der Horopter aus der ganzen unendlich fernen Ebene und der Verbindungsgeraden der Kernpunkte.

Aus dieser Stellung erst, in der je zwei entsprechende Strahlen parallel sind, gehen wir in diejenige mit F als Blickpunkt über; dazu halten wir das erste Kernbündel fest und drehen das zweite von links

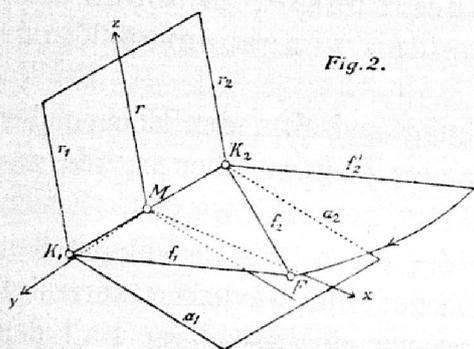


Fig. 2.

nach rechts (siehe Fig. 2.) mit derjenigen Drehungsaxe r_2 , welche wir gemäss den in § 5 im Anschluss an Satz V bewiesenen Sätzen konstruieren; der Drehungswinkel ψ erreicht dabei in der Wirklichkeit nie die Grösse eines gestreckten Winkels. Bei der Drehung des zweiten Bündels ist r_2 der einzige reelle Strahl desselben, der unbewegt, und deshalb auch der

einzigste, der seinem entsprechenden Strahl im ersten Bündel parallel bleibt; ist der letztere r_1 , so bilden r_1 und r_2 das einzige reelle Paar von entsprechenden und parallelen Strahlen in unseren Kernbündeln. Es ist daher empfehlenswert, r_1 und r_2 zur Festlegung von Koordinatensystemen in den beiden Bündeln zu benutzen; wir machen also r_1 zur z_1 - und r_2 zur z_2 -Axe und geben beiden den positiven Sinn nach oben gerichtet. Ausgezeichnet sind ferner die Ebenen $(r_1 f_1)$ und $(r_2 f_2)$, welche die Blicklinien enthalten und deshalb einander in der Kongruenz entsprechen; wir machen sie zur $x_1 z_1$ - und zur $x_2 z_2$ -Ebene; die in ihnen liegenden zu r_1 und r_2 senkrechten Strahlen sind ebenfalls einander zugeordnet und werden als x_1 - und x_2 -Axen genommen, deren positive Halbaxen auf derselben Seite von r_1 , bzw. r_2 liegen sollen, wie f_1 , bzw. f_2 . Auch die zu den Ebenen $(r_1 f_1)$ und $(r_2 f_2)$

senkrechten Kernstrahlen sind einander entsprechende; wir wählen sie zur y_1 - und zur y_2 -Axe und legen auf sie den positiven Sinn von links nach rechts gehend. Denken wir uns jetzt die Kernbündel zur Deckung gebracht, so fallen diese beiden Koordinatensysteme genau zusammen; folglich werden je zwei Ebenen, die dabei sich auf einander legen, also in der Kongruenz einander entsprechen, in den Koeffizienten ihrer Gleichungen übereinstimmen. Somit liefern uns die Gleichungen

$$(1.) \quad \begin{cases} \xi x_1 + \eta y_1 + \zeta z_1 = 0 \\ \xi x_2 + \eta y_2 + \zeta z_2 = 0 \end{cases}$$

alle Paare entsprechender Ebenen der beiden Kernbündel, wenn wir den Verhältnissen $\xi : \eta : \zeta$ nach einander alle möglichen Werte beilegen.

Zur weiteren Untersuchung benutzen wir ein xyz -Koordinatensystem, in das wir die beiden anderen überführen: Der Ursprung desselben sei der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{K_1 K_2}$ (siehe Fig. 2), — seine z -Axe von gleicher Richtung und gleichem positiven Sinn wie die z_1 - und z_2 -Axe, — seine x -Axe senkrecht zu der Ebene, in welcher die z -Axe und $\overline{K_1 K_2}$ liegen, und mit einem nach derjenigen Seite dieser Ebene gerichteten positiven Sinn, auf welcher sich F befindet, — endlich die y -Axe in jener Ebene senkrecht zur z -Axe und mit solchem positiven Sinn, dass auch dieses Koordinatensystem den beiden früheren kongruent ist. Dasselbe lässt sich dann durch eine Drehung mit festbleibender z -Axe um einen — im Drehsinn von der positiven x - zur positiven y -Axe positiv zu rechnenden — Winkel ψ_1 , bezw. ψ_2 dem $x_1 y_1 z_1$ -, bezw. $x_2 y_2 z_2$ -System parallel stellen; es ist dabei der oben angeführte Winkel ψ , um den wir das erste Kernbündel drehen müssen, wenn es dem zweiten parallel gestellt werden soll, einschliesslich des Vorzeichens gegeben durch

$$\psi = \psi_2 - \psi_1,$$

und wir wollen im folgenden durchweg von dem schon erledigten Fall eines unendlich fernen Blickpunktes, in dem $\psi = 0$ ist, absehen.

Da wir nun im xyz -System die Koordinaten von K_1 mit $0, b, c$ und diejenigen von K_2 mit $0, -b, -c$ bezeichnen können, so lauten die Formeln, welche zwischen den Koordinaten $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ eines beliebigen Raumpunktes bestehen, folgendermassen:

$$(2.) \quad \begin{cases} x_1 = x \cos \psi_1 + (y - b) \sin \psi_1, \\ y_1 = -x \sin \psi_1 + (y - b) \cos \psi_1, \\ z_1 = z - c; \end{cases}$$

$$(3.) \quad \begin{cases} x_2 = x \cos \psi_2 + (y + b) \sin \psi_2, \\ y_2 = -x \sin \psi_2 + (y + b) \cos \psi_2, \\ z_2 = z + c. \end{cases}$$

Werte von t ($t = t'$ und $t = \frac{1}{t'}$) ergeben, gleiche x , aber entgegengesetzt gleiche y und entgegengesetzt gleiche z besitzen, also zu einander i. Bez. auf die x -Axe symmetrisch liegen. Nun steht die x -Axe in M auf K_1K_2 senkrecht und ist somit in der Ebene enthalten, die in M zu K_1K_2 normal ist, d. h. in der Medianebene unseres Kopfes. Wir haben also gefunden:

Der Horopter ist eine kubische Ellipse, die auf einem Rotationscylinder liegt und eine in der Medianebene des Kopfes befindliche Symmetrieaxe besitzt.

Aus (8.) sieht man, dass diese Symmetrieaxe die Asymptote der Kurve schneidet; sie trifft aber auch die Kurve selbst, nämlich in dem sich für $t = 1$ aus (6.) ergebenden Punkte

$$(9.) \quad x = -b \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Die beiden Kernpunkte bilden auch ein Paar symmetrischer Punkte des Horopters; dies ist in geometrischer Beziehung das einzige Besondere, das sich von ihnen aussagen lässt; denn man kann (siehe Schur a. a. O.) jede zwei symmetrischen Horopterpunkte zu Scheiteln zweier kongruenter Bündel machen, welche die vorgelegte Horopterkurve ebenfalls erzeugen.

Die Frage nun, ob die ganze so erhaltene Horopterkurve eine physiologische Bedeutung hat, muss mit nein beantwortet werden. Liegt nämlich der Blickpunkt rechts oder links, so schiebt sich die undurchsichtige Hülle des rechten, bzw. linken Augapfels zwischen den Kernpunkt desselben und die Punkte des Kurvenstückes K_1K_2 , so dass dieses Auge — ganz abgesehen davon, dass jene Punkte ja im Kopf des Menschen verdeckt sind — keine Bilder von ihnen erhalten kann; deshalb rechnet man das Stück der Horopterkurve zwischen K_1 und K_2 oft nicht zum Horopter und unterscheidet dann zwischen der Horopterkurve, als dem mathematischen Begriff, und dem Horopter, als dem physiologischen Begriff.

Dagegen haben die Sehnen der Horopterkurve — natürlich auch nur soweit sie im Gesichtsfelde verlaufen — eine physiologische Bedeutung. Durch jede Sehne nämlich gehen zwei entsprechende Ebenen der Kernbündel; nehmen wir in der einen Ebene irgend einen Kernstrahl und in der anderen den entsprechenden, so begegnen sich dieselben im allgemeinen nicht, sondern treffen die Schnittgerade der Ebenen in zwei verschiedenen Punkten; die Bilder dieser beiden Punkte aber fallen auf korrespondierende Netzhautstellen und werden deshalb zu einer einzigen Empfindung vereinigt, wofern sie nicht durch irgend ein äusseres Merkmal von einander unterschieden sind. Dies geschieht längs der ganzen Geraden, und deshalb wird jede Sehne der Horopterkurve einfach gesehen, obwohl von ihren einzelnen Punkten dasselbe i. A. nicht gilt.

§ 7. Die gestaltlichen Verhältnisse des Horopters.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen die wichtigsten geometrischen Eigenschaften der Horopterkurve abgeleitet haben, können wir uns jetzt unserer hauptsächlichsten Aufgabe zuwenden, nämlich der Untersuchung darüber, welchen Einfluss die verschiedenen möglichen Lagen des Blickpunktes auf die Gestalt und Lage des Horopters haben. Wie bisher nehmen wir dabei eine gerade und aufrechte Kopfhaltung an und versehen alles, was zum rechten Auge gehört, mit dem Index 1 und alles, was zum linken Auge gehört, mit dem Index 2.

Der Blickpunkt F befindet sich immer vor dem Kopfe, also vor der Frontalebene ε , die vertikal durch die Kernpunkte K_1 und K_2 läuft; dabei ist, wie wir sogleich sehen werden, von Bedeutung, wie er gegen diejenige Horizontalebene η , welche durch K_1 und K_2 geht, und gegen die Medianebene μ des Kopfes liegt, welche vertikal ist und die Strecke $\overline{K_1 K_2}$ in M halbiert. Die Blicklinien a_1 und a_2 der Grundstellung nämlich fallen in η hinein und sind zu ε normal, zu μ parallel; somit bilden K_1, K_2, a_1, a_2 , also diejenigen Stücke, welche neben F den Horopter bestimmen, zusammen eine Figur, die η und μ zu Symmetrieebenen hat. Hieraus folgt ohne weiteres:

Sind zwei Blickpunkte zu einander in Bezug auf die Horizontal- oder die Medianebene symmetrisch gelegen, so sind es auch die zu ihnen gehörigen Horopter.

Daher genügt es, wenn wir den Blickpunkt F in einem der vier Teile annehmen, in die der Halbraum vor ε durch η und μ zerlegt wird. Es liege also F oberhalb von η und rechts von μ ; dann ist

$$\overline{K_1 F} < \overline{K_2 F}, \sphericalangle K_2 K_1 F > \sphericalangle K_1 K_2 F^*),$$

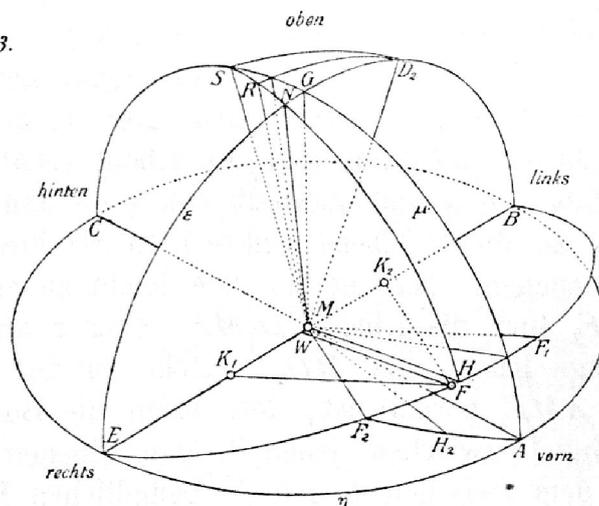
und es liegen die Blicklinien f_1 und f_2 oberhalb von η . Zunächst müssen wir nun die Lage unseres xyz -Koordinatensystems ermitteln: Seine z -Axe war parallel dem Strahl r_2 aus K_2 (siehe Fig. 2), um den wir nach dem Listingschen Gesetz das zweite Kernbündel aus der Stellung mit der zu f_1 parallelen Blicklinie f_2' in die endgültige Stellung mit der Blicklinie f_2 drehen mussten; sie ging ferner durch M , und deshalb werden wir sie unmittelbar finden können, wenn wir die ganze zur Konstruktion von r_2 nötige Figur parallel mit sich selbst nach M verschieben. Mit anderen Worten, wir denken uns M als den Kernpunkt eines Auges, dessen Grundstellung die mit a_1 und a_2 gleichgerichtete Blicklinie a hat; von diesem Auge sind zwei Stellungen gegeben, deren Blicklinien mit f_1 und f_2 gleichgerichtet sind. Die erste Stellung kann nach dem Listingschen Gesetz in die zweite durch eine Drehung übergeführt werden, deren Drehungsaxe wir r

*) In dieser Weise bezeichnete Strecken und Winkel werden von uns nur hinsichtlich ihrer Grösse, aber nicht ihres Richtungs- oder Drehsinnes betrachtet.

und deren Drehungswinkel wir ψ nennen; dann ist r unsere z -Axe und ψ nach Grösse und Drehsinn der in § 6 eingeführte Winkel $\psi = \psi_2 - \psi_1$.

— Die Konstruktion von r wollen wir in Fig. 3 vollziehen; der Anschaulichkeit halber bedienen wir uns dabei der axonometrischen Darstellung (1:1:1) und schneiden alle Ebenen und Strahlen aus M mit der oberhalb von η befindlichen Hälfte der um M mit dem Radius \overline{MF} beschriebenen Kugel. Diese Halbkugel treffe die Ebenen ε und μ in den Halbkreisen \overline{BGE} und \overline{AGC} ;

Fig. 3.



dabei sei A vorn, so dass $MA \equiv a$, B links, C hinten, E rechts. Mit F_1 und F_2 benennen wir die Durchstosspunkte der zu f_1 und f_2 , also zu K_1F und K_2F parallelen Blicklinien des in M gedachten Auges.

Wir haben jetzt auf dem Halbkreise, den die Ebene (K_1FK_2) in die Halbkugel vor ε und oberhalb von η einzeichnet, die Punkte B, F_1, F, F_2, E in der angegebenen, von links nach rechts laufenden Reihenfolge und wollen noch sehen, wie sich der Punkt H , welcher den Bogen zwischen F_1 und F_2 halbiert, unter sie einordnet: Ist W der Punkt, in welchem die Halbierende des Winkels $\sphericalangle K_1FK_2$ die Gerade K_1K_2 trifft, so ist

$$\overline{K_1W} : \overline{K_2W} = \overline{K_1F} : \overline{K_2F}$$

und folglich

$$\overline{K_1W} < \overline{K_2W}.$$

Also befindet sich W rechts von M und, weil WF und MH parallel sind, auch F rechts von H . — Ferner ist

$$\sphericalangle BMF_1 = \sphericalangle K_2K_1F, \quad \sphericalangle EMF_2 = \sphericalangle K_1K_2F,$$

somit

$$\sphericalangle BMF_1 > \sphericalangle EMF_2$$

und, da $\sphericalangle F_1MH = \sphericalangle F_2MH$ ist, auch

$$\sphericalangle BMH > \sphericalangle EMH;$$

das heisst aber, dass H rechts von μ liegt.

Wir haben also auf einem vor ε und oberhalb von η gelegenen Halbkreise der Reihe nach von links nach rechts die Punkte B, F_1, H, F, F_2, E ; von diesen befinden sich immer H und die folgenden Punkte rechts von μ , während F_1 auf die rechte oder die linke Seite von μ fallen kann.

Quadranten \widehat{AG} . — Diese Lage unseres Koordinatensystems haben wir in Fig. 4 angedeutet, welche der Fig. 3 genau entspricht.

Wir hatten nun für die Drehung um die z -Axe den von der positiven x -Axe zur positiven y -Axe gehenden Drehsinn als den positiven gewählt; derselbe entspricht der Reihenfolge der Punkte B, F_1, H, F, F_2, E . Also hat der Winkel ψ der Drehung, durch welche das in M gedachte Auge aus der Stellung mit der Blicklinie MF_1 in diejenige mit der Blicklinie MF_2 übergeführt wird, positiven Sinn:

$$\psi > 0.$$

Hiermit sind die Vorzeichen der Konstanten in unseren Formeln bestimmt. Wir sehen aus (9.) und (8.), dass von den Schnittpunkten der Horopterkurve und ihrer Asymptote mit der x -Axe der erstere hinter und der letztere vor ε liegt. Ferner ist der in (6.) vorkommende Ausdruck $t^2 + 2t \cos \psi + 1$ für alle reellen Werte von t positiv, weil er nur für imaginäre Werte von t ($-\cos \psi \pm i \sin \psi$) verschwindet und für $t = 0$ den positiven Wert 1 hat; also haben y und z immer gleiches Vorzeichen, nämlich das positive, wenn

$$-1 < t < +1,$$

und das negative, wenn

$$t < -1 \text{ oder } t > +1.$$

Daher wird die Horopterkurve durch ihren Schnittpunkt ($t = 1$) mit der x -Axe in zwei Zweige geteilt, von denen der eine oberhalb der xy - und rechts von der xz -Ebene, der andere aber unterhalb der xy - und links von der xz -Ebene liegt; der erste Zweig, der den rechten Kernpunkt ($t = 0$) enthält, nähert sich der in der xz -Ebene befindlichen Asymptote von rechts, der zweite, der den linken Kernpunkt ($t = \infty$) trägt, dagegen von links, wobei sich der erste nach oben und der zweite nach unten ins Unendliche erstreckt. — Auf welchem der beiden Zweige haben wir nun den Blickpunkt F zu suchen? Weil in Fig. 3 die Ebene (RMH) auf der Ebene ($BHFE$) senkrecht steht und F zwischen H und E liegt, ist

$$\sphericalangle RMH < \sphericalangle RMF < \sphericalangle RME < \frac{\pi}{2};$$

also hat F eine positive z -Koordinate und befindet sich auf dem rechten Zweig der Horopterkurve, d. h. rechts von der Asymptote.

Jetzt können wir die Lage und den Verlauf der Horopterkurve folgendermassen beschreiben:

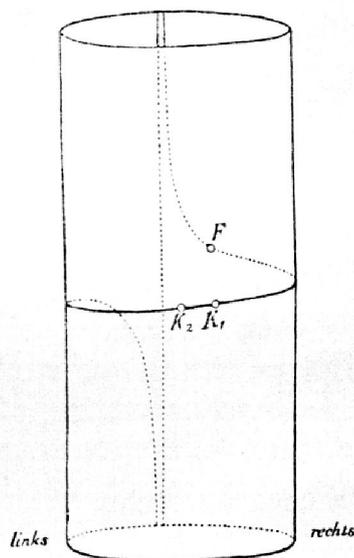


Fig. 5.

Liegt der Blickpunkt bei aufrechter und gerader Kopfhaltung rechts oben, so steht die Asymptote der Horopterkurve vor uns und links vom Blickpunkte; sie ist nach rechts und hinten (d. h. dem Gesichte zu) geneigt. So ist auch die Stellung des Rotationscylinders, auf dem die Horopterkurve verläuft; sie selbst (siehe Fig. 5) kommt von unten her auf der linken Seite der Asymptote aus dem Unendlichen, windet sich nach Art einer rechtsgängigen Schraube um den Cylinder herum, wobei sie zuerst den linken, dann den rechten Kernpunkt und endlich den Blickpunkt trifft, und nähert sich dann von rechts her wieder der Asymptote, um an deren rechter Seite nach oben ins Unendliche zu verschwinden.

Übertragen wir dieses Ergebnis nach den Gesetzen der Symmetrie auf die Lagen des Blickpunktes in den drei anderen Teilen, in welche der Raum vor ε durch η und μ zerfällt, so erhalten wir die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Ergebnisse:

Der Blickpunkt liegt gegen die Median- und die Horizontal-ebene	Die Asymptote		Die Horopterkurve			
	liegt vorn und i. Bez. auf den Blickpunkt	ist geneigt	nähert sich der Asymptote		ist gewunden nach Art	trägt den Blickpunkt auf ihrem
			unten	oben		
rechts oben	links	nach rechts und hinten	von links	von rechts	einer rechtsgängigen Schraube	rechten Zweig
links oben	rechts	nach links und hinten	von rechts	von links	einer linksgängigen Schraube	linken Zweig
links unten	rechts	nach rechts und vorn	von links	von rechts	einer rechtsgängigen Schraube	linken Zweig
rechts unten	links	nach links und vorn	von rechts	von links	einer linksgängigen Schraube	rechten Zweig

Zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse soll unser Modell Nr. 6 dienen; es ist die verkleinerte Darstellung eines wirklichen Falles mit

rechts oben befindlichem Blickpunkt: Auf einer schwarz gehaltenen Säule sind zwei Kugeln angebracht, welche die Kernpunkte der Augen bedeuten; eine dritte Kugel stellt den Blickpunkt und die sie mit den beiden ersten Kugeln verbindenden Stäbe die Blicklinien dar; diese Teile sind aus Kupfer gearbeitet und rotgelb. Die Horopterkurve ist in Messing (hellgelb), ihre Asymptote und ihre Symmetrieaxe in Nickel (weiss) ausgeführt. Durch die beiden starken weissen Linien auf dem Fussbrett sind die Lagen der Medianebene μ und der Frontalebene ε angegeben und durch den kleinen schwarzen Ring an der Asymptote die Lage der durch die Kernpunkte gehenden Horizontalebene η . Um die Neigung der Asymptote hervorzuheben, ist ihre orthogonale Projektion als feine weisse Linie auf dem Fussbrett eingezeichnet.

Es sind nun noch die beiden Fälle zu betrachten, dass F in η oder in μ selbst liegt: Ist zunächst F ein Punkt von η , so fallen in Fig. 3 MF_1 und MF_2 in die Ebene η hinein, die auch MA enthält; also gilt der erste in § 5 im Anschluss an Satz V bewiesene Satz, nach dem MR senkrecht auf η steht. Dann ist aber η die xy -, μ die xz -, ε die yz -Ebene und vor allem K_1K_2 die y -Axe unseres Koordinatensystems; mithin haben wir $c = 0$. In (6.) ist deshalb für alle Werte von t $z = 0$, ausser für $t = -1$, wo $z = \frac{0}{0}$, also unbestimmt wird; folglich stellen die Gleichungen (6.) keine allgemeine Raumkurve dar, sondern einen Kreis in der xy -Ebene, dessen Gleichungen (vergl. (7.))

$$x^2 + y^2 - 2bx \operatorname{ctg} \psi - b^2 = 0, \quad z = 0$$

lauten, und die zur xy -Ebene senkrechte Gerade, die durch die Gleichungen (8.) gegeben ist. Wir haben also gefunden:

Liegt der Blickpunkt in der durch die Kernpunkte gehenden Horizontalebene, so besteht die Horopterkurve aus dem durch diese drei Punkte bestimmten Kreis und aus der vertikalen Geraden, welche durch den vorderen Schnittpunkt dieses Kreises mit der Medianebene läuft.

Der Horopter bleibt in diesem Falle ungeändert, wenn man den Blickpunkt längs des Kreises verschiebt.

Liegt ferner F in μ , und zwar oberhalb von η , so fällt in Fig. 3 auch H in μ hinein und somit R auf den Bogen \widehat{GS} ; also ist auch jetzt μ unsere xz -Ebene und K_1K_2 unsere y -Axe, so dass wiederum $c = 0$. Die positive x -Axe aber geht jetzt in μ zwischen F und A hindurch, weshalb F ein von 0 verschiedenes positives z hat. Wir folgern hieraus:

Befindet sich der Blickpunkt in der Medianebene des Kopfes, so besteht die Horopterkurve aus einem die Kernpunkte enthaltenden Kreis und aus einer ihn schneidenden Geraden: Die Ebene des Kreises geht zwischen dem Blick-

punkt und der Horizontalebene hindurch (und zwar so, dass sie die Winkel $\sphericalangle a_1 f_1$ und $\sphericalangle a_2 f_2$ zwischen den Blicklinien der Grundstellung und denen der betrachteten Augenstellung halbiert). Die Gerade ist die aus dem Blickpunkt auf diese Ebene gefällte Senkrechte; sie liegt in der Medianebene und ist nach hinten (d. h. auf das Gesicht zu) geneigt, wenn der Blickpunkt oberhalb, und nach vorn, wenn er unterhalb der Horizontalebene ist.

