IX. Reihe: Raumkurven dritter Ordnung.

14 Modelle zusammen *M* 600,—.

Eine zugehörige Abhandlung wird nach ihrem Erscheinen den Abnehmern der Modelle frei zugestellt.

Gruppe A: Die Kurve mit ihren Asymptoten. 4 Drahtmodelle zusammen . . . . *M* 45,—

Nr. 337.	Räumliche Ellipse	*M* 12,—	
Nr. 338.	Räumliche Hyperbel	„ 16,—	
Nr. 339.	Räumliche hyperbolische Parabel	„ 16,—	
Nr. 340.	Räumliche Parabel	„ 6,—	

Gruppe B: Die abwickelbare Tangentenfläche. 4 Fadenmodelle zusammen . . . . „ 225,—

Nr. 341.	Räumliche Ellipse	*M* 60,—	
Nr. 342.	Räumliche Hyperbel	„ 60,—	
Nr. 343.	Räumliche hyperbolische Parabel	„ 60,—	
Nr. 344.	Räumliche Parabel	„ 50,—	

Gruppe C: Die Kurve als teilweiser Schnitt von Kegeln (bzw. Zylindern). 4 Fadenmodelle mit Drahtkurven zusammen . . „ 235,—

Nr. 345.	Räumliche Ellipse: Ellipt. Zylinder und Kegel	*M* 60,—	
Nr. 346.	Räumliche Hyperbel: Drei hyperbol. Zylinder	„ 60,—	
Nr. 347.	Räumliche hyperbolische Parabel: Hyperbolischer und parabolischer Zylinder	„ 60,—	
Nr. 348.	Räumliche Parabel: Parabol. Zylinder u. Kegel	„ 60,—	

Gruppe D: Die beiden dualen Erzeugungen der Kurve (ihre abwickelbare Fläche und ein Schmiegungstetraeder). 2 Fadenmodelle mit Drähten zusammen . . . . „ 120,—

Nr. 349.	Schnitt zweier Kegel mit gemeins. Erzeugender.	*M* 65,—	
Nr. 350.	Eingehüllte d. Ebenen, die 2 Kegelschnitte mit gemeinsamer Tangente berühren	„ 60,—	

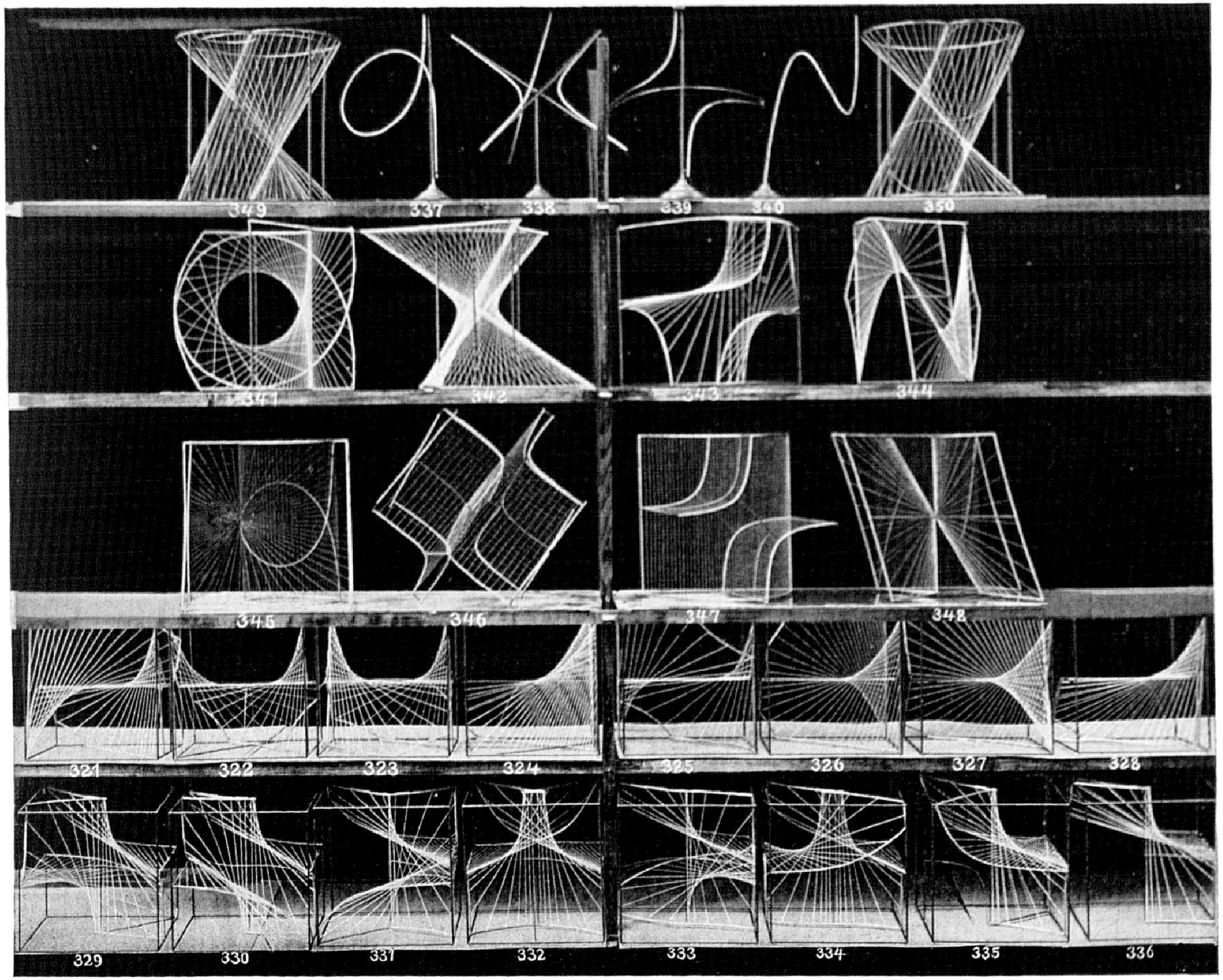
Die Raumkurven 3. Ordnung stehen als Raumkurven der niedrigsten Ordnung den ebenen Kegelschnitten an Wichtigkeit und in mancherlei Eigenschaften nahe. In drei von den vier Gruppen dieser Reihe werden die vier Kurvenarten behandelt, die durch das Verhalten gegen das Unendlichferne zu unterscheiden sind: die (kubische räumliche) Ellipse, die Hyperbel, die hyperbolische Parabel und die Parabel. Während die Gestalt der Kurve an und für sich, wie auch in ihren Projektionen am deutlichsten in Drahtkurven hervortritt (Gruppe A), die sich im ersten und zweiten Fall an eine bzw. drei geradlinige Asymptoten, im dritten Fall an eine geradlinige und an eine parabolische Asymptote annähert, geben die in Fadenmodellen dargestellten abwickelbaren Tangentenflächen Aufschluß über die Lagen der Tangenten und Schmiegungsebenen (Gruppe B). Außerdem ist es von Wert, die Kurve, die ja aus jedem ihrer Punkte durch einen Kegel zweiter Ordnung projiziert wird, als Schnitt wenigstens zweier solcher Kegel entstehen zu sehen (Gruppe C), und als solche sind jeweils die mit unendlich ferner Spitze, d. h. die projizierenden Zylinder gewählt, denen im ersten und letzten Fall ein solcher mit im Endlichen gelegener Spitze hinzuzufügen war.

Dienen diese 12 Modelle im wesentlichen der Darstellung der gestaltlichen Verhältnisse, so führen die beiden letzten (Gruppe D) in die Theorie der Raumkurven 3. Ordnung ein. Hier ist die Kurve in der zuletzt erwähnten Art als Schnitt zweier Kegel erzeugt, die eine Gerade gemein haben, und dieser Erzeugung ist die andere dual gegenübergestellt, nämlich durch zwei Kegelschnitte (Drahtellipsen), die eine Tangente gemein haben, und deren gemeinsam berührende Ebenen die Raumkurve einhüllen. In beiden Modellen ist die Tangentenfläche und das durch die zwei Kegelspitzen bzw. die Ebenen der beiden Ellipsen bestimmte Schmiegungstetraeder (aus Draht gefertigt) hinzugefügt, d. i. ein Tetraeder, von dem zwei Kurvenpunkte mit ihren Tangenten und Schmiegungsebenen sechs Stücke bilden, nämlich zwei Ecken, zwei Kanten und zwei Seiten. Dadurch tritt die Lage jener beiden Kegel bzw. der beiden Ellipsen (die man auch als Oskulanten der Raumkurve bezeichnet) zu den beiden gewählten Punkten, ihren Tangenten und Schmiegungsebenen deutlich hervor. Weiterhin bilden die beiden Tangenten ein Paar von Gegenkanten des Tetraeders; die Sehne, die die beiden Punkte verbindet, und die Achse, in der sich die beiden Schmiegungsebenen schneiden, bilden ein zweites Paar; die beiden letzten Kanten aber sind ein Spiegelachsenpaar der Raumkurve, d. h. die Achsen einer windschiefen Spiegelung (einer geschart-perspektiven involutorischen Kollineation), die die Raumkurve in sich überführt. Solche Spiegelachsenpaare zeigen ein vollständiges Entsprechen mit den als Pol und Polaren einander zugeordneten Elementen eines ebenen Kegelschnittes, mit denen sie auch die Mannigfaltigkeit (∞^2) gemein haben.

In den Gruppen A bis C sind für die entsprechenden Modelle übereinstimmende Kurven gewählt, und zwar solche mit einer und im zweiten Fall sogar mit drei achsigen Symmetrien, so daß diese Kurve (die Hyperbel) durch sechs Drehungen einer Doppelpyramidengruppe in sich übergeht.

Die kubische Hyperbel läßt in diesem speziellen Fall eine besonders einfache Erzeugung zu, die zu einer elementaren Konstruktion auch der drei übrigen Gestalten der Raumkurve 3. Ord. hinüberführt. Bekanntlich hat J. STEINER von derjenigen ebenen Kurve 3. Ord., die als eine gespitzte Hypozykloide entstehen kann, eine große Anzahl wichtiger Eigenschaften zusammengestellt. Unsere kubische Hyperbel bildet nun in vielen Beziehungen ein räumliches Gegenstück zu der STEINERschen Kurve, wie man aus der folgenden Erzeugung dieser Kurve ersieht, die an eine Eigenschaft der Hypozykloide erinnert: Um die Achse einer Drehregelfläche (eines einschaligen Drehhyperboloids) drehe sich eine Gerade der einen Schar mit gleichförmiger Drehgeschwindigkeit und gleichzeitig eine entsprechende Gerade der anderen Schar im entgegengesetzten Sinn mit der doppelten Drehgeschwindigkeit, dann schneiden sich je zwei entsprechende Geraden in den Punkten einer kubischen Hyperbel. Da die Kurve nicht nur von der dritten Ordnung sondern auch von der dritten Klasse ist, so läßt sie gleichzeitig die dual entsprechende Erzeugung zu. Es gehen nämlich ihre Schmiegungsebenen durch je zwei entsprechende Geraden einer zweiten Drehregelfläche, die auf die gleiche Weise aufeinander bezogen sind. Durch affine Abbildung gelangt man von der Sonderkurve zur allgemeinen kubischen Hyperbel.

Diese Konstruktionen weisen überhaupt auf eine nicht projektive Erzeugung der Raumkurven 3. Ord. hin, und in der Tat findet man auch für die drei anderen Gestalten entsprechende Konstruktionen; dabei ergeben sich ähnliche Unterschiede, wie bei den nicht projektiven Konstruktionen der ebenen Ellipse, Hyperbel und Parabel aus ihren konjugierten Durchmessern (s. „Abhandlungen" 1. Heft S. 62 ff.).



Maßstab 1 : 14.

H. Wieners Sammlung, Reihe VIII u. IX.