37

Mathematische Modelle

angefertigt

im mathematischen Institut des k. Polytechnikums zu München.

Abtheilung I. Unter Leitung von Prof. Dr. Klein.

VII.

Fläche 3. Ordnung mit 4 reellen, konischen Knotenpunkten nebst Haupttangentencurven.

Modellirt von stud. math. J. Bacharach.

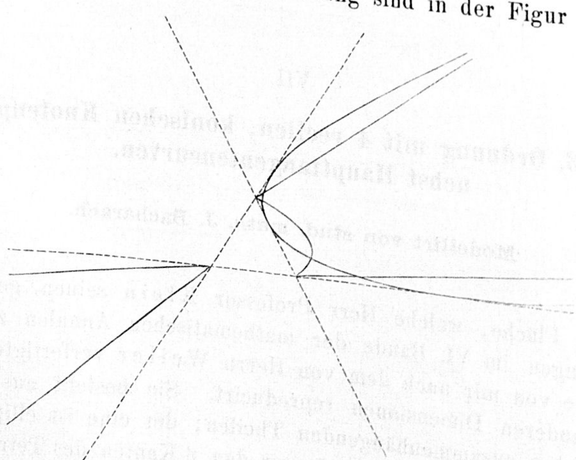
Diese Fläche, welche Herr Professor Klein seinen gestaltlichen Untersuchungen im VI. Bande der mathematischen Annalen zu Grunde legte, wurde von mir nach dem von Herrn Weiler verfertigten Modelle in etwas anderen Dimensionen reproducirt. Sie besteht aus 2 in den Knotenpunkten zusammenhängenden Theilen; der eine ist elliptisch, der andere hyperbolisch gekrümmt. Ausser den 6 Kanten des Tetraëders der Knotenpunkte besitzt die Fläche noch 3 einfach zählende in derselben Ebene liegende Gerade, die je 2 Gegenkanten des Tetraëders verbinden. Als Seitenflächen des letzteren wurden gleichschenklige Dreiecke, als Basis ein gleichseitiges Dreieck gewählt und die Basisebene der dreifachen Tangentialebene parallel angenommen. Die Fläche wurde mittels ebener Schnitte construirt und durch einen geraden Cylinder begrenzt.

Die Haupttangentencurven der Fläche sind, wie dies Clebsch zeigte, Raumcurven 6. Ordnung und 4. Classe, welche in jedem Knotenpunkte einen Rückkehrpunkt besitzen; sie lassen sich durch die Centralprojektion ebener Curven 4. Ordnung mit 3 Spitzen auf die Fläche gewinnen, (die ihrerseits wieder aus Kegelschnitten durch quadratische Transformation erhalten werden.)

38

Als Projectionscentrum wurde die Spitze des Tetraëders der Knotenpunkte, als Projectionsebene dessen Basis gewählt. Dann projicirt sich der elliptische Theil der Fläche in das Innere des Kreises, der dem gleichseitigen Dreieck der 3 in der Projectionsebene liegenden Knotenpunkte umschrieben ist. Die ebenen Curven 4. Ordnung, welche die Centralprojectionen der Haupttangentencurven bilden, berühren diesen Kreis und können daher durch quadratische Transformation aus Parabeln erhalten werden, welche die Seiten jenes Dreiecks berühren. Diese Parabeln und in Folge dessen auch die daraus abgeleiteten Curven 4. Ordnung vertheilen sich gleichmässig auf die 3 Dreiecksräume, entsprechend dem Umstande, dass bei unserer Wahl der Bestimmungsstücke die Fläche aus 3 congruenten Theilen besteht, welche in gleicher Weise von den Haupttangentencurven doppelt überdeckt werden.*)

Auf dem Modelle ist eine Haupttangentencurve aufgetragen; die zugehörige Parabel und Curve 4. Ordnung sind in der Figur dargestellt.



Um die Curve 4. Ordnung auf die Fläche zurückzuprojiciren, wurden Hilfsebenen angewandt, die durch eine, das Projectionscentrum enthaltende Gerade der Fläche hindurchgehen.

Sehr interessant ist es, zu sehen, wie die Haupttangentencurven in die Geraden der Flächen übergehen; den Grenzfall bilden immer zwei Gegenkanten des Tetraëders und die sie verbindende einfache Gerade.

München, im Juni 1877.

*) Im allgemeinen Falle werden diese Theile nur zu einander collinear sein; die Fläche geht übrigens durch 24 Collineationen (zu denen die identische gehört) in sich selbst über.