Mathematische Modelle

angefertigt

im mathematischen Institut des k. Polytechnikums zu München.

Abtheilung II. Unter Leitung von Prof. Dr. Brill.

V.

Die geodätischen Linien durch die Nabelpunkte auf dem dreiaxigen Ellipsoid.

Modellirt von stud. math. K. Rohn.

Jakobi hat in seinen Vorlesungen über Dynamik die Gleichung der geodätischen Linien des dreiaxigen Ellipsoids in elliptischen Coordinaten abgeleitet und ist zu der Gleichung gelangt:

$$\text{Const.} = \int_{-a_2}^{\lambda_2} d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)(\beta+\lambda_2)}} + \int_{-a_3}^{\lambda_3} d\lambda_3 \sqrt{\frac{\lambda_3}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)(\beta+\lambda_3)}},$$

wenn die Gleichung des Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3} = 1 \text{ und gleichzeitig } a_1 < a_2 < a_3 \text{ ist.}$$

Die Gleichung der hierzu confocalen Flächen zweiten Grades lautet:

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda} + \frac{y^2}{a_2+\lambda} + \frac{z^2}{a_3+\lambda} = 1.$$

Für $\lambda = 0$ kommt das Ellipsoid selbst. Liegt λ zwischen ∞ und $-a_1$, so stellt die Gleichung die confocalen Ellipsoide dar, liegt es zwischen $-a_1$ und $-a_2$, die confocalen einschaligen Hyperboloide, liegt es endlich zwischen $-a_2$ und $-a_3$, die confocalen zweischaligen Hyperboloide. Durch jeden Punkt gehen 3 solcher Flächen, da die Gleichung vom dritten Grade in Bezug auf λ ist, und zwar von jeder der 3 Arten eine. Liegt der Punkt x, y, z auf dem gegebenen Ellipsoide, so wird eine Wurzel $= 0$, und es gehen nur noch 2 Flächen des Systems hindurch, welche, wenn man λ_2 und λ_3 als ihre Parameter betrachtet, umgekehrt den Punkt xyz festlegen. $\lambda_2 =$ Const. und $\lambda_3 =$ Const. bestimmen also auf dem Ellipsoid zwei (sich rechtwinklig durchschneidende) Curvensysteme, die Krümmungslinien. Die Constante β der Differentialgleichung gibt den Parameter desjenigen Hyperboloids resp. derjenigen Krümmungslinie des Ellipsoids an, welche von der geodätischen Linie berührt wird. Aus der allgemeinen Differentialgleichung folgt daher als Gleichung der geodätischen Linie durch die Nabelpunkte:

$$\text{Const} = \int_{-a_2}^{\lambda_2} \frac{\lambda\, d\lambda}{(a_2+\lambda)\sqrt{\lambda(a_1+\lambda)(a_3+\lambda)}} + \int_{-a_3}^{\lambda_3} \frac{\lambda\, d\lambda}{(a_2+\lambda)\sqrt{\lambda(a_1+\lambda)(a_3+\lambda)}};$$

oder, wenn wir die Constante durch das bestimmte Integral:

$$\int_{-a_2}^{-\alpha} \frac{\lambda\, d\lambda}{(a_2+\lambda)\sqrt{\lambda(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)}}$$ ersetzen:

$$0 = \int_{-\alpha}^{\lambda_2} \frac{\lambda\, d\lambda}{(a_2+\lambda)\sqrt{\lambda(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}} = \int_{-a_3}^{\lambda_3} \frac{\lambda\, d\lambda}{(a_2+\lambda)\sqrt{\lambda(a_1+\lambda)(a_3+\lambda)}}.$$

Die Constante $-\alpha$ gibt dabei denjenigen Werth des Parameters λ_2 an, für welchen das zugehörige confocale einschalige Hyperboloid den Punkt der geodätischen Linie auf der Ellipse in der XY-Ebene ausschneidet.

Die Normirung der vorliegenden Integrale geschieht durch die Substitutionen:

$$\frac{a_3+\lambda_2}{a_3-a_1} = \sin^2 am\, u'; \qquad \frac{a_3+\lambda_3}{a_3-a_1} = \sin^2 am\, u; \qquad \frac{a_3-\alpha}{a_3-a_1} = \sin^2 am\, c;$$

$$\frac{a_3-a_2}{a_3-a_1} = \sin^2 am\, \varepsilon; \qquad k^2 = \frac{a_3-a_1}{a_3};$$

wodurch denn unsere Gleichung übergeht in:

$$0 = \int_c^{u'} \frac{\Delta^2 am\, u'\, du'}{(1-k^2\sin^2 am(\varepsilon+iK')\sin^2 am\, u')} + \int_o^u \frac{\Delta^2 am\, u\, du}{(1-k^2\sin^2 am(\varepsilon+iK')\sin^2 am\, u)};$$

oder in:

$$0 = \int_c^{u'} du' + \int_o^u du - \frac{\cos am(\varepsilon+iK')}{\sin am(\varepsilon+iK')\,\Delta am(\varepsilon+iK')}\left[\int_c^{u'} d\Pi(u', \varepsilon+iK') + \int_o^u d\Pi(u, \varepsilon+iK')\right],$$

indem man mit Jakobi die Benennung einführt:

$$\Pi(u,\varepsilon) = \int_o^u \frac{k^2 \sin am\,\varepsilon \,.\, \cos am\,\varepsilon \,.\, \Delta am\,\varepsilon \,.\, \sin^2 am\, u}{1-k^2\sin^2 am\,\varepsilon \sin^2 am\, u}\, du.$$

Durch Integration folgt:

$$0 = (u'+u-c)\left[\frac{\cos' am(\varepsilon+iK')}{\cos am(\varepsilon+iK')} + \frac{\Theta'(\varepsilon+iK')}{\Theta(\varepsilon+iK')}\right] + \tfrac{1}{2}\lg \frac{\Theta(u'-\varepsilon-iK')\,\Theta(u-\varepsilon-iK')\,\Theta(c+\varepsilon+iK')}{\Theta(u'+\varepsilon+iK')\,\Theta(u+\varepsilon+iK')\,\Theta(c-\varepsilon-iK')};$$

und durch weitere Reduction ergibt sich daraus die Gleichung:

$$0 = (u'+u-c)\frac{\Theta_1'(\varepsilon)}{\Theta_1(\varepsilon)} + \tfrac{1}{2}\lg \frac{H(u'-\varepsilon)}{H(u'+\varepsilon)} \cdot \frac{H(u-\varepsilon)}{H(u+\varepsilon)} \cdot \frac{H(c+\varepsilon)}{H(c-\varepsilon)} + \frac{\pi i}{2}.$$

Diese Gleichung ist jedoch nicht geeignet, zu einem beliebig gewählten u das zugehörige u' zu finden; wir werden ihr desshalb eine Gestalt geben, in der sie nur noch $u + u'$ und $u - u'$ enthält und zwar in einer Verbindung, die bei willkürlicher Wahl der einen Grösse die andere leicht bestimmen lässt. Man erreicht diesen Zweck durch Anwendung einer Formel, welche der von Jakobi in seinen „Fundamenta nova p. 155“ gegebenen analog gebildet ist, nämlich:

$$\frac{H(u-\varepsilon)}{H(u+\varepsilon)} \cdot \frac{H(u'-\varepsilon)}{H(u'+\varepsilon)} = -\frac{H(2v-\varepsilon)}{H(2v+\varepsilon)} \cdot \frac{\{s^2(v')-s^2(v-\varepsilon)\} \cdot \{s^2(v)-s^2(v+\varepsilon)\}}{\{s^2(v')-s^2(v+\varepsilon)\} \cdot \{s^2(v)-s^2(v-\varepsilon)\}};$$

wobei $v = \frac{u+u'}{2}$, $v' = \frac{u-u'}{2}$ und $s^2 \equiv \sin^2 am$.

Die obige Gleichung verwandelt sich hierdurch in:

$$e^{2(2v-c)\frac{\Theta_1'(\varepsilon)}{\Theta_1(\varepsilon)}} \cdot \frac{H(2v-\varepsilon)}{H(2v+\varepsilon)} \cdot \frac{H(c+\varepsilon)}{H(c-\varepsilon)} \cdot \frac{s^2(v)-s^2(v+\varepsilon)}{s^2(v)-s^2(v-\varepsilon)} = F(v) = \frac{s^2(v')-s^2(v+\varepsilon)}{s^2(v')-s^2(v-\varepsilon)};$$

folglich ist:

$$\sin^2 am\, v' = \frac{\sin^2 am(v-\varepsilon)\, F(v) - \sin^2 am(v+\varepsilon)}{F(v)-1}.$$

Wählt man in dieser Gleichung $v = \frac{u+u'}{2}$ beliebig und berechnet $v' = \frac{u-u'}{2}$, so erhält man $\frac{\lambda_2}{-a_3} = \varDelta^2 am\, u'$ und $\frac{\lambda_3}{-a_3} = \varDelta^2 am\, u$.

Die rechtwinkligen Coordinaten xyz bestimmen sich alsdann aus den Gleichungen:

$$\frac{z}{\sqrt{a_3}} = \frac{\sin am\, u \cdot \sin am\, u'}{\sin am\, \varepsilon};$$

$$\frac{y}{\sqrt{a_2}} = \frac{\sqrt{(\sin^2 am\, u' - \sin^2 am\, \varepsilon)(\sin^2 am\, \varepsilon - \sin^2 am\, u)}}{\sin am\, \varepsilon \cdot \cos am\, \varepsilon};$$

$$\frac{x}{\sqrt{a_1}} = \frac{\cos am\, u \cdot \cos am\, u'}{\cos am\, \varepsilon}.$$

Kehren wir zu den Gleichungen für λ_2 und λ_3 zurück, so lässt sich daraus leicht nachweisen, dass für den Nabelpunkt selbst $v = \frac{u+u'}{2} = \pm nK$ ist, wo n eine ganze Zahl bedeutet. Alsdann wird nämlich:

$$\frac{H(2v-\varepsilon)}{H(2v+\varepsilon)} \cdot \frac{s^2(v)-s^2(v+\varepsilon)}{s^2(v)-s^2(v-\varepsilon)} = 1, \text{ demnach muss:}$$

$$e^{2(2nK-c)\frac{\Theta_1'(\varepsilon)}{\Theta'(\varepsilon)}} \cdot \frac{H(c+\varepsilon)}{H(c-\varepsilon)} = \frac{s^2(v')-s^2(\varepsilon+nK)}{s^2(v')-s^2(\varepsilon-nK)} \text{ sein.}$$

Die linke Seite ist von der Einheit verschieden, also muss es auch die rechte Seite sein, d. h. es muss $s^2(v') = s^2(\varepsilon \pm nK)$ sein, woraus man $\varDelta^2 am \binom{u}{u'} = \varDelta^2 am\, \varepsilon$, also $\lambda_2 = \lambda_3 = -a_2$ erschliesst.

Nimmt $\frac{u+u'}{2}$ den Werth $0,\ \pm K,\ \pm 2K \ldots$ an, so erhält man einen von 2 gegenüberstehenden Nabelpunkten; jedem Werthsystem von $\frac{u+u'}{2}$ zwischen nK und $(n+1)K$ entspricht ein von diesen Punkten eingeschlossenes Stück der Curve, eine Oscillation der Curve. Die geodätische Linie besteht aus unendlich vielen solchen Oscillationen, wie man unmittelbar aus ihrer Gleichung schliesst, da diese $u+u'$ in 2 verschiedenen Verbindungen enthält, deren eine eine reelle Periode besitzt, nicht aber die andere.

Numerische Berechnung einer geodätischen Linie.

Die Achsen des Ellipsoids seien $a_1 = \sqrt{1},\ a_2 = \sqrt{2},\ a_3 = \sqrt{3}$. Man erhält dann:

$$k = 9{,}81650, \qquad k' = 0{,}57735,$$
$$K = 2{,}02878, \qquad K' = 1{,}73392,$$
$$q = 0{,}06822, \qquad q' = 0{,}02533,$$
$$\varepsilon = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 0{,}84227; \qquad \frac{\pi\varepsilon}{2K} = 37^0\,22'; \qquad \frac{\Theta_1'(\varepsilon)}{\Theta_1(\varepsilon)} = -0{,}19681.$$

Machen wir noch die Voraussetzung, dass der Anfangspunkt der geodätischen Linie auf der mittleren Achse liege, so wird $c = K$ und demnach $\frac{H(K+\varepsilon)}{H(K-\varepsilon)} = 1$.

Für die einzelnen Punkte stellen wir das Schema*) auf:

$u+u'$	$2(2v-K)\frac{\Theta_1'(\varepsilon)}{\Theta'(\varepsilon)}\lg e$	$\lg(\pm)\frac{H(2v-\varepsilon)}{H(2v+\varepsilon)}$	$s^2(v+\varepsilon)$	$s^2(v-\varepsilon)$	$s^2(v)$	$F(v)$	$s^2(v')$	λ_2	λ_3
K	0,00000	(+) 0,00000	0,99010	0,02913	0,63385	−0,58912	0,63385	−1,000	−3,000
$\frac{2K}{3}$	0,11561	(+) 0,58209	0,91087	0,02716	0,36163	−0,81866	0,51307	−1,167	−2,935
$\frac{K}{3}$	0,23121	(−) 0,13597	0,76414	0,22210	0,10744	−1,29737	0,45021	−1,585	−2,645
0	0,34682	(−) 0,00000	......	......	0	......	......	−2,000	−2,000

Die gleichen Werthe muss man für λ_2 und λ_3 erhalten, wenn man der Variablen $u+u'$ die Werthe von K bis $2K$ beilegt, wie man unmittelbar daraus ersieht, dass die geodätische Linie durch den Punkt $\lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -3$ und durch zwei sich gegenüberliegende Nabelpunkte geht. Auch aus der Gleichung zwischen v und v' lässt sich dieses Resultat ableiten, indem man für $2v$ einmal $K+x$, das andere Mal $K-x$ setzt, woraus sich denn gleichzeitig eine Controle jener Formel ergibt.

*) Dieses Schema wurde im Ganzen für 24 verschiedene Werthe von $u+u'$ zwischen den Grenzen K und $-3K$ berechnet, was 5 Oscillationen der Curve ergab.