Mathematische Modelle

angefertigt

im mathematischen Institut des k. Polytechnikums in München.

Abtheilung II. Unter Leitung von Prof. Dr. Brill.

VIII.

Die geodätischen Linien der Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung.

Construirt von stud. math. A. v. Braunmühl.

Die Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung sind definirt durch die Bedingung, dass die Summe der reciproken Werthe der beiden Hauptkrümmungsradien in allen Punkten derselben eine Constante sei. Bezieht man die Meridiancurven dieser Flächen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem und nimmt die y-Axe zur Rotationsaxe, so ist die Differentialgleichung in der zuerst von A. Beer 1857 gegebenen Form:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \pm \alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{(\alpha_1{}^2 - x^2)(x^2 - \alpha_2{}^2)}},$$

woraus man die Integralgleichung gewinnt:

$$y = \alpha_2 \left\{E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - E(k, \varphi)\right\} \pm \alpha_1 \left\{F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - F(k, \varphi)\right\}; \quad \alpha_1 < \alpha_2,$$

wo $k = \sqrt{\dfrac{\alpha_2{}^2 - \alpha_1{}^2}{\alpha_2{}^2}}$; $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{\alpha_2{}^2 - x^2}{\alpha_2{}^2 - \alpha_1{}^2}}$ und E und F die Legendre'schen Normalformen der elliptischen Integrale zweiter und erster Gattung sind, während α_2 und α_1 bezw. der grösste und kleinste reelle Werth ist, den x annimmt. Führt man $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ an Stelle von x ein, so ergibt sich die Gleichung der Flächen selbst. In diesem Ausdruck sind nun drei wesentlich verschiedene Flächen enthalten; benützt man das obere Zeichen, so ergibt sich eine Fläche, die von der wellenförmigen Gestalt ihrer Meridiancurve den Namen Unduloid erhalten; dem negativen Zeichen entspricht das Nodoid, dessen Meridiancurve einen Doppelpunkt besitzt, und für $\alpha_2 = \infty$ ergibt sich das Catenoid, dessen Meridiancurve die Kettenlinie ist.*) Die Namen stammen von Plateau, der in seinem Werke: „Statique expérimentale et théorique des liquides etc.“ nachwies, dass diese Flächen sämmtlich Gleichgewichtsfiguren von Flüssigkeiten sind, die der Einwirkung der Schwere entzogen worden. Es sei noch bemerkt, dass die Meridiancurven der Rotationsflächen, nach einem von Delaunay 1841 gegebenen Princip durch den Brennpunkt eines einer Geraden entlang rollenden Kegelschnittes beschrieben werden.

Im Folgenden werden wir uns mit den geodätischen Linien der Flächen beschäftigen.

Die allgemeine Gleichung derselben auf einer Rotationsfläche ist:

$$\varphi = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2}{r^2 - \nu^2}},$$

wo ν eine Constante und φ den Winkel bedeutet, den ein beliebiger Meridian mit dem nullten bildet. Führen wir hier den Werth für $\frac{dy}{dr}$ ein, so ergibt sich für unsern Fall folgende Gleichung:

$$\varphi = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{(\alpha_2 \pm \alpha_1)\, dr}{\sqrt{(\alpha_2{}^2 - r^2)(r^2 - \nu^2)(r^2 - \alpha_1{}^2)}}.$$

Das Integral ist ein elliptisches erster Gattung, die Constante ν aber hat, wie sich leicht zeigen lässt, den Werth $\nu = r \cos \vartheta$, wenn man unter ϑ den Winkel versteht, unter welchem die Linie den Parallelkreis mit dem Radius r schneidet. Wir ertheilen im Folgenden dem r in dieser Gleichung den Werth α_2, so dass $\nu = \alpha_2 \cos \vartheta$ wird, da diese Annahme alle wichtigen Fälle in sich schliesst. Das Integral wird reell, so lange es sich zwischen den Grenzen ν und α_2 bewegt; wir werden daher zweckmässig folgende Fälle unterscheiden: 1) $\nu > \alpha_1$; 2) $\nu < \alpha_1$; 3) $\nu = \alpha_1$; 4) $\nu = \alpha_2$. Im Falle 1) erhalten wir eine geodätische Linie, welche den grössten Parallelkreis unter dem Winkel $\vartheta = \arccos \frac{\nu}{\alpha_2}$ schneidet (beim Catenoid

---

*) Für die Modelle wurde im Falle des Unduloids und Nodoids $\alpha_1 = 10^{mm}$ $\alpha_2 = 57{,}7^{mm}$, im Falle des Catenoids $\alpha_1 = 20^{mm}$ gesetzt.

43

wird $\vartheta = \frac{\pi}{2}\Big)$, dann nach beiden Seiten desselben sich entfernt, um die beiden Kreise $r = \nu$ zu berühren, hierauf zum Kreise α_2 zurückkehrt und ihren Lauf periodisch wiederholt. Im Falle 2) kann r alle Werthe von α_1 bis α_2 annehmen, daher schlingt sich die Linie über die ganze Fläche hin. Im dritten Falle reducirt sich das Integral auf ein logarithmisches, welches für den Werth $r = \alpha_1$ unendlich wird; man sieht also, dass sich die geodätische Linie dem kleinsten Kreise asymptotisch nähert, und dieser daher in sofern als geodätische Linie aufzufassen ist, als ihn jene Linie nach unendlich vielen Windungen erreicht. Der grösste Kreis dagegen (Fall 4) gehört den Linien der ersten Art an und ist nur theilweise kürzeste Linie.

Um das Integral für unsere vier Fälle zu normiren, setzen wir im Falle 1): $r^2 = \frac{\alpha_2^{\,2}\,\nu^2}{\nu^2 + (\alpha_2^{\,2} - \nu^2)\,z^2}$; $k^2 = \frac{\alpha_2^{\,2} - \nu^2}{\alpha_2^{\,2} - \alpha_1^{\,2}}\,\frac{\alpha_1^{\,2}}{\nu^2}$;
dann erhalten wir:

$$\varphi = \iota \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)\,(1 - k^2 z^2)}}; \quad \iota = \sqrt{\frac{\alpha_2 \pm \alpha_1}{\alpha_2 \mp \alpha_1}}.$$

Im zweiten Falle hat man nur ν mit α_1 und umgekehrt zu vertauschen, dann wird $\iota = \frac{\nu}{\alpha_1}\,\frac{\alpha_2 \pm \alpha_1}{\sqrt{\alpha_2^{\,2} - \nu^2}}$. Die entsprechenden Formeln für das Catenoid erhält man wieder, indem man in den vorstehenden $\alpha_2 = \infty$ setzt. Um die Ausdrücke für den dritten Fall zu bekommen, haben wir $\nu = \alpha_1$ zu setzen, dann wird $k = 1$, und unser Integral reducirt sich auf:

$$\varphi = \frac{\iota}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z} \quad \text{für} \quad z = \frac{\alpha_1}{r} \sqrt{\frac{\alpha_2^{\,2} - r^2}{\alpha_2^{\,2} - \alpha_1^{\,2}}},$$

worin man die Bestätigung der oben gemachten Bemerkung über den Verlauf der Linie erkennt. Um endlich den vierten Fall zu erledigen, setzen wir in den Formeln für Fall 1) $\nu = r \cos \vartheta$, dann kommt $z^2 = \cos^2 \vartheta \, \frac{\alpha_2^{\,2} - r^2}{\alpha_2^{\,2} - r^2 \cos^2 \vartheta}$; da nun $\vartheta = 0$ sein muss für $\nu = \alpha_2$, so wird $z = 1$, k^2 nimmt aber den Werth Null an, und es ergibt sich also:

$$\varphi_0 = \iota \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \iota \,.\, \frac{\pi}{2};$$

folglich ist der grösste Kreis in einer Länge $2\,\varphi_0 = \iota \,.\, \pi$ kürzeste Linie. Man erkennt leicht aus dem Werthe von k, dass, je mehr sich die Grenzkreise ν vom grössten Kreis entfernen, desto mehr die Periode des Integrales zunimmt und somit $\varphi_0 = \iota \,.\, \frac{\pi}{2}$ ihr Minimum ist. Bei dem Catenoid nimmt die Formel für den dritten Fall die einfache Gestalt an;

$$\varphi = \tfrac{1}{2} \log \frac{r + \alpha_1}{r - \alpha_1};$$

die des vierten Falles wird natürlich hier illusorisch, da ja $\alpha_2 = \infty$ ist.*)

Es ist von Interesse, die Wendepunkte der Curven aufzusuchen. Dieselben entsprechen den Wendepunkten ihrer Vertikalprojection auf eine zur Axe senkrechte Ebene, es genügt daher diese zu untersuchen. Für einen Wendepunkt muss der Krümmungshalbmesser verschwinden, also:

$$r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\,\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = 0$$

sein. Führt man hier die Werthe aus der Gleichung unserer Curve ein, so erhält man:

$$r^6 - \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 \alpha_2 \mp 2\nu^2)\, r^2 + 2\alpha_1{}^2 \alpha_2{}^2 \nu^2 = 0,$$

eine Gleichung vom dritten Grade in r^2. Die Discriminante derselben ist:

$$\frac{\alpha_1{}^3 \alpha_2{}^3}{27} \left\{ 27\, \alpha_1 \alpha_2 \nu^4 - (\alpha_1 \alpha_2 \mp 2\nu^2)^3 \right\}$$

und lässt sich auf die Gestalt bringen:

$$\frac{\alpha_1{}^6 \alpha_2{}^6}{27} \left\{ \frac{\nu^2}{\alpha_1 \alpha_2} \pm 1 \right\} \left\{ \frac{\nu^2}{\alpha_1 \alpha_2} \mp \frac{1}{8} \right\}.$$

Diese Form bestätigt den an sich verständlichen Satz, dass reelle Wendepunkte nur auf dem hyperbolisch gekrümmten Theile der Fläche vorkommen können, da $r = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ der Radius des Parallelkreises ist, der die beiden verschieden gekrümmten Theile von einander trennt. Dabei ist aber noch zu bemerken, dass beim Unduloid (oberes Vorzeichen) doch dann erst Wendepunkte eintreten können, wenn $\nu^2 \leq \frac{\alpha_1 \alpha_2}{8}$ ist. Für das Catenoid reducirt sich die Wendepunktsgleichung auf die einfache Form: $r^2 = 2\nu^2$, und es ergibt sich für diese Fläche ein (mit der Aehnlichkeit

*) Für die Modelle des Unduloids und Nodoids wurde in der Formel: $\nu = \alpha_2 \sin \vartheta$, $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ gesetzt, dann ergab sich für erstere Fläche die Periode $\tau_1 K = 108^0\,4'$, für letztere $\tau_2 K = 76^0\,9'$. Für das Catenoid ist $\nu = 34^{mm}$ und $\tau K = 99^0\,47'$ angenommen. Im zweiten Falle ist $\vartheta = 81^0\,11'$ und daher für das Unduloid $\tau'_1 K = 149^0\,7'$, für das Nodoid $\tau'_2 K = 105^0\,3'$. Für das Catenoid wurde $\nu = 17^{mm},97$ gesetzt, daher $\tau K = 117^0\,11'$. Im dritten Falle endlich ist $\vartheta = 80^0\,1'$ für Unduloid und Nodoid, $\nu = \alpha_1 = 20^{mm}$ für das Catenoid. Die Perioden sind für die zwei ersten Flächen auf dem grössten, für die dritte auf dem kleinsten Kreise gemessen. Die den verschiedenen Fällen entsprechenden geodätischen Linien wurden auf den drei Modellen mit übereinstimmenden Farben aufgetragen und ebenso auf den Ring, der durch Umdrehung der Schleife der Meridiancurve des Nodoids entstanden ist, fortgesetzt. Diesen Ring kann man nach Plateau mittelst Oel an einem Drahtring in Weingeist realisiren.

aller Kettenlinien zusammenhängender) Satz, welcher sich auf die specielle geodätische Linie der dritten Art bezieht. Stellt man nämlich die Bedingungsgleichung für die Existenz der Wendepunkte dieser Linie in φ auf, so resultirt eine Gleichung, welche unabhängig von der die Fläche bestimmenden Constanten α_1 ist; hieraus schliessen wir, dass für eine Schaar von Catenoiden, welche gleiche Rotationsaxe haben und sich nur durch den Werth ihrer Parameter unterscheiden, die Wendepunkte entsprechender geodätischer Linien auf ein und derselben Meridianebene liegen.

Wir fügen noch Einiges über die Asymptotencurven unserer Flächen bei. Bei dem Unduloid und Nodoid führt die Aufstellung der Gleichung auf ein hyperelliptisches Integral, das sich jedoch im Falle des Catenoids auf ein logarithmisches reducirt. Das Catenoid ist nämlich überall hyperbolisch gekrümmt, und daher sind bei ihm die Haupttangentencurven nicht an die Grenze $r^2 = \alpha_1 \alpha_2$ gebunden, wie bei den andern beiden Flächen. Die Gleichung der Asymptotenlinie für diese Fläche wird:

$$\varphi = \int_{\alpha_1}^{r} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \alpha_1^{\,2}}} = \log \frac{r + \sqrt{r^2 - \alpha_1^{\,2}}}{\alpha_1}$$

oder durch Umkehrung $r = \frac{\alpha_1}{2}\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right) = \alpha_1 \cos \operatorname{hyp} \varphi$.

Hiernach wurde für das Modell des Catenoids eine Asymptotencurve berechnet und construirt.

München, im Juli 1877.