

Herrn Prof. H. Klein,
Leipziger
der Prof.

Modelle von Flächen dritter Ordnung.

Von

Dr. Carl Rodenberg,

Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Darmstadt.

(Zu Serie VII.)

Bei der Eintheilung einer Schaar von Flächen hat man ursprünglich völlige Freiheit über die Definition des Artbegriffs, man wird jedoch so eintheilen, dass eine Trennung der verschiedenen Gruppen mit möglichst wenig Schwierigkeiten verbunden ist und die verschiedenen Species recht charakteristische Unterschiede in ihrem Aussehen zeigen.

Ein Eintheilungsprincip, welches diese Eigenschaften mit sich führt und von uns zu Grunde gelegt werden wird, geht hervor, wenn man alle Flächen zusammenfasst, welche sich durch continuirliche Deformation ineinander überführen lassen, ohne dass hierbei das Ueberschreiten einer Singularität oder die Aenderung etwa vorhandener Singularitäten durch höhere hindurch nothwendig werde. Die Flächen dritter Ordnung wurden in solcher Weise classificirt von Herrn Klein¹⁾ und dem Verfasser²⁾; eben für diese Flächen stimmt die so gewonnene Eintheilung fast ausnahmslos mit der Schläffischen³⁾ nach der Realität der Geraden und dem Auftreten von Singularitäten überein; sie ist auch für die analytische Behandlung sehr zweckmässig, da man meistens bei der Ueberführung von zwei Flächen derselben Art und desselben Pentaeders ineinander, das letztere und mit ihm die canonische Form der Gleichung erhalten, und so durch ein einfaches Abzählen zwischen den Coefficienten die Art feststellen kann.

¹⁾ »Ueber Flächen dritter Ordnung.« Math. Annalen Bd. VI pag. 551 f.

²⁾ »Zur Classification der Flächen dritter Ordnung.« Math. Annalen Bd. XIV pag. 46 f. Die späteren Citate beziehen sich, wenn nicht ausdrücklich Anderes gesagt ist, auf diese Arbeit.

³⁾ On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species etc. Philosophical Transactions, t. 153 (1863) p. 193.

Besprochene Deformationen schliessen keineswegs aus, dass unter Umständen Parthien der Fläche durch's Unendliche gezogen werden, und zwei Modelle einer und derselben Art können daher in ihrem Aussehen noch grosse Verschiedenheiten zeigen. Ebenso kommt man bei dem Entstehenlassen von Singularitäten auf einer Fläche nicht immer mit endlichen Deformationen zum Ziel und es ist daher für die Anschaulichkeit des Verfahrens keineswegs gleichgültig, welche Beziehung zum Unendlichen die verschiedenen hierzu im Modelle herzustellenden Flächen haben.

Man reicht nun immer mit endlichen Aenderungen aus bei Zugrundelegung von Flächen, welche von der unendlich fernen Ebene in einem unpaaren Zuge (ohne Oval) getroffen werden; solche wurden daher modellirt. Ist dann an diesen einmal Klarheit über das Verhalten der Fläche in der Nähe einer Singularität, und über das Entstehen derselben aus niederen, insbesondere conischen Knoten gewonnen worden, so kann man Unterschiede hinsichtlich des Unendlichfernen leicht mit Hülfe einer Gruppe von unter sich collinearen Flächen kennen lernen. Als besonders geeignet erwiesen sich hierzu die Flächen mit 4 reellen Knoten, wie sie durch die fünf Modelle 2—6 repräsentirt sind.

Aus diesen entsteht dann auch eine Reihe mit weniger und ohne Knoten unter Anwendung von zwei Prozessen des „Verbindens (+)“ und „Trennens (—)“, wie sie Herr Klein a. a. O. benutzte; unter deren Anwendung sich die ursprünglich kegelförmigen Parthien in der Nähe des Knotens in solche umwandeln, welche bezw. dem einschaaligen und zweischaaligen Hyperboloid vergleichbar sind. Auch im Falle eines imaginären Kegels, also isolirten Knotens, führen zwei Prozesse auf Arten ohne diese Singularität, indem man ihn entweder in ein reelles kleines Ellipsoid oder in ein imaginäres übergehen, d. h. verschwinden lässt.

Die algebraische Durchführung des Verfahrens gab ich a. a. O. — Aber gewisse Arten von Flächen mit weniger als 4 Knoten kann man sich auf diese Weise nicht herstellen. Herr Klein gewinnt dieselbe, indem er an einigen Knoten die „Aenderung durch die biplanare Form vornimmt“. ¹⁾

Die Betrachtung solcher Aenderungen kann jedoch umgangen werden, wenn man — wie wir es thun werden — ausgeht von einer Fläche des grössten Zusammenhangs (der denjenigen mit 27 reellen Geraden zukommt) und sich aus derselben Flächen mit conischen Knoten herstellt. Auch analytisch bietet dieser Weg Vortheile, da conische Knoten ohne Einfluss auf das Pentaeder sind, dasselbe also erhalten bleiben kann, biplanare aber an äusserst speciellen Lagen der Ebenen desselben geknüpft sind.

Bei der Erhaltung des Pentaeders tritt nun die eigenthümliche Erscheinung auf, dass nicht alle Flächen derselben Art direct ineinander

¹⁾ §. 4. a. a. O.

übergeführt werden können, vielmehr bisweilen ein Knoten neu erzeugt und ein anderer dafür beseitigt werden muss. Bei den meisten aus dieser Eigenschaft entspringenden Unterarten wird der Grund hierfür schon aus dem Verhalten der Flächen zum Pentaeder allein ersichtlich, bei andern ist es nothwendig, die Hesse'sche Fläche selbst zu untersuchen. Mit Hilfe eines zu beweisenden Satzes über die Wirkung, welche die an einem Knoten der Originalfläche angebrachten Aenderungen $+$ oder $-$, auf die Hesse'sche ausüben, ist es möglich, ein Bild der Gestalten der letztern aus zwei Grundformen (Modell 24_a u. 25) zu gewinnen und so den Grund des oben erwähnten Hindernisses zu erkennen. Hiermit wird dann die Betrachtung der Flächen ohne Singularitäten oder mit conischen Knoten allein, zum Abschluss gebracht und darauf die Bildung höherer begonnen. Auf den modellirten Flächen findet man neben der zu betrachtenden Singularität noch immer so viel wie möglich conische Knoten, durch deren verschiedenartige Auflösung man sich die allgemeinen erzeugen mag.

Den Schluss bilden die Regelflächen.

Die krummen ungefärbten Linien auf den Flächen dritter Ordnung sind, wo nicht ausdrücklich Anderes gesagt ist, parabolische Curven.

§ 1.

Flächen mit 27 reellen Geraden.¹⁾

Von solchen Flächen gibt es in unserm Sinne nur eine Art. Das Modell Nr. 1 bringt den Specialfall der Diagonalfäche von Clebsch zur Anschauung. Die Geraden derselben zerfallen in zwei Gruppen zu 15 (roth) und 12 (weiss).

Die der ersten bilden die Diagonalen der Vierecke, welche von vier Ebenen des Pentaeders in der fünften verzeichnet werden. Je drei Geraden kreuzen sich demnach in einer Pentaederecke und liegen in der Verbindungsebene mit ihrer conjugirten Kante einer „Diagonalebene“ des Pentaeders.

Die Geraden der zweiten Art bilden eine Doppelsechs und sind bezeichnet durch:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \\ 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \end{array}$$

wodurch dann die Bezeichnung der übrigen durch je zwei dieser Zahlen hervorgeht. Die Vertheilung auf die Pentaederebenen ist gegeben durch das Schema:

¹⁾ Klein a. a. O. §§. 10 u. 11. Ferner: Zeuthen, Etudes des propriétés de situation des surfaces cubiques, insbesondere III, 12—23. Math. Annalen Bd. 8 pag. 1.

12, 34, 56	}	A
13, 25, 46		
14, 26, 35		
15, 24, 36		
16, 23, 45		

und diejenige auf die Diagonalebene durch:

12, 35, 46	}	B
12, 36, 45		
13, 24, 56		
13, 26, 45		
14, 25, 36		
14, 23, 56		
15, 26, 34		
15, 23, 46		
16, 24, 35		
16, 25, 34		

Die Pentaederecken sind Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche und daher Doppelpunkte der parabolischen Curve. Sie sind isolirt und überhaupt die einzigen reellen Punkte dieser Curve. Die Diagonalfäche ist sonst überall hyperbolisch gekrümmt.

Die eben besprochenen Punkte sind die Asymptotenpunkte der 15 Geraden erster Art, die andern 12 haben imaginäre Asymptotenpunkte.

Bei allen andern Flächen mit 27 reellen Geraden ist deren Vertheilung im Wesentlichen ebenso. Es giebt immer eine Doppelsechs mit imaginären Asymptotenpunkten, während die übrigen Linien reelle Asymptotenpunkte haben. Aus den 10 isolirten Punkten der parabolischen Curve sind ebenso viele Ovale geworden, welche Punkte elliptischer Krümmung einschliessen und von den Seiten solcher Dreiecke berührt werden, wie sie die Geraden, welche sich früher in den einzelnen Pentaederecken schnitten, jetzt zwischen sich einschliessen. Die Beziehung der Dreiecksebenen A und B zum Pentaeder ist insofern dieselbe geblieben, als man durch continuirliche Deformationen sie rückwärts nur in Pentaeder- bzw. in Diagonalebene überführen kann, ein Umstand, der sich für die Classification von später zu betrachtenden Flächen als wichtig erweisen wird.

§. 2.

**Flächen mit den Maximalzahlen reeller conischer Knotenpunkte.
Unterschiede in Bezug auf das unendlich Ferne.**

Unser Modell der Diagonalfäche zeigt 10 Durchgänge¹⁾, von denen aber nur eine Anzahl im Endlichen geschlossen ist. Durch jede solche Oeffnung erstreckt sich eine Doppelsechse, deren Geraden zur Hälfte reelle, zur Hälfte imaginäre Asymptotenpunkte haben. So gehört z. B. der untern Oeffnung, welche in ihrem Ansehen einem Rotationshyperboloid mit vertikaler Achse gleicht die Doppelsechse:

1, 3, 5, 46, 62, 24,
35, 51, 13, 2', 4', 6',

oder kurz:

135

an, wodurch auch die Oeffnung selbst bezeichnet werden mag. Die übrigen neun sind dann:

524, 146, 362, 354, 516, 132, 526, 142, 364,

von denen jedoch nur die ersten sechs im Endlichen sich schliessen.

Wie nun die Ausübung des Processes auf einen Knoten, an dessen Stelle eine Oeffnung hervorruft, so entstehen umgekehrt durch Zuziehen einer Reihe von Oeffnungen eben so viele conische Knoten.

Z. B. entsteht das Modell 2 aus 1 durch Zuziehen von:

135, 524, 146, 362.

Die 24 Geraden dieser 4 Doppelsechse sind die 6 vierfach zählenden Verbindungslinien von je zwei Knoten geworden, die übrigen drei:

12, 34, 56

liegen in einer Ebene A, welche bekanntlich auch jetzt noch Pentaeder-ebene ist. Nimmt man von den 27 reellen Geraden drei solche fort, so ist leicht einzusehen, dass die übrigen 24 sich nur in einer Weise zu 4 Doppelsechsen, denen einzeln Oeffnungen zugeordnet sind, gruppieren lassen.²⁾

Nimmt man andererseits 3 Gerade einer Ebene B, z. B.:

14, 36, 52

weg, so erhält man aus den übrigen die Doppelsechse:

354, 516, 132, 246,

¹⁾ Vergl. Klein a. a. O. pag. 575, Anmerkung; ferner Zeuthen a. a. O.

²⁾ Klein a. a. O. §. 12.

von denen aber nur die ersten drei Oeffnungen angehören. Den drei aus ihnen entstehenden Knoten kann also kein vierter beitreten, wir erhalten eine Fläche I' mit 3 Knoten, welche nicht direct aus derjenigen mit vierten abgeleitet werden kann.¹⁾ Sie ist dargestellt durch die Modelle 7 u. 8.

Ersteres erscheint von derselben, letzteres von der entgegengesetzten Seite im Vergleich mit dem Modelle der Diagonalfäche betrachtet. Modell 8 wurde ausgeführt, um das kegelförmige der Parthien in der Nähe der Knoten besser zur Anschauung zu bringen, man erkennt die Uebereinstimmung der Art beider, wenn man eines mit seinem Fusse nach oben kehrt.

Wie nun jeder der 5 Pentaederebenen eine Fläche I mit 4 Knoten zugeordnet ist, so entspricht jeder der 10 Diagonalebene eine Mannigfaltigkeit der I' ²⁾, deren Dreiecksebenen einfacher Geraden der betreffenden Diagonalebene benachbart sind. Bei der letzteren Art kann man insbesondere diese Geraden durch eine Ecke gehen lassen, wie es bei den modellirten Flächen der Fall ist, und damit die Fläche eindeutig durch ihr Pentaeder bestimmen. — Es sei noch bemerkt, dass man zwei Knoten einer Fläche beliebig entstehen lassen kann und dann die Wahl hat, ob man eine I oder I' mit dreien aus ihr hervorgehen lassen will.³⁾ Nimmt man z. B. die Knoten 146 und 524, so liefert jeder der Knoten 135 und 362 eine I . Aber auch den Knoten 132 kann man bilden und hat jetzt eine I , denn die unären Geraden 15, 34, 26 gehören einer Ebene B an. Aus der I mit drei Knoten:

146, 524, 135,

entsteht also die I' , wenn man den Knoten 135 durch 132 ersetzt. Solche zwei besitzen zwei gleiche Ziffern in der Bezeichnung und sind dadurch charakterisirt. Die bezüglichen Oeffnungen liegen zu beiden Seiten einer Tangentialebene A und ihre Richtungen bilden einen rechten Winkel mit einander. Sie mögen einander benachbart heissen.

Eine Oeffnung ist stets drei andern benachbart, z. B. 135 den Oeffnungen 132, 354, 516. Mit Rücksicht auf das Frühere kann man dann sagen: Die Flächen I und I' mit 3 Knoten gehen ineinander über durch Auflösen eines Knotens, und darauf folgendes Zusammenziehen einer der neu entstandenen Oeffnung benachbarten. Das Zusammenziehen solcher drei Oeffnungen, welche einer und derselben vierten benachbart sind, ergibt stets eine I' .

Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung der Abweichungen in der Gestalt, welche in dem verschiedenen Verhalten der Flächen zur unendlich fernen Ebene ihren Grund haben.

¹⁾ Vergl. über die Bezeichnung §. 2 pag. 55 und §. 3, auch §. 3 des Vorliegenden.

²⁾ §. 7.

³⁾ §. 2 pag. 55.

Da alle Flächen mit 4 reellen conischen Knoten unter sich collinear sind, so hat man bei diesen hierzu nur nöthig, die Gegenebene einer reellen Collineation alle verschiedenen Lagen in Bezug auf eine Fläche, z. B. der Nr. 2 annehmen zu lassen. Man findet dann den Typus:

- Nr. 3 wenn die Gegenebene eine convexe Parthie des dem Knotenpunkt-tetraeder nahe liegenden paaren Stücks der Fläche in einem Oval schneidet;
- Nr. 4 und 5, wenn eine Curve mit Oval ausgeschnitten wird, welches drei Knotenstrahlen treffen und zwar Nr. 4 wenn es ausserhalb, 5 wenn es innerhalb der convexen Parthie geschieht. Solche Schnitte gehen hervor, wenn man die Ebene zunächst durch einen Knoten, etwa den untern legt, so dass eine Curve mit isolirtem Doppelpunkt erscheint, und, wenn man weiter die Ebene bezw. nach unten oder nach oben etwas verschiebt;
- Nr. 6 wenn das Oval von 4 Knotenstrahlen getroffen wird, die schneidende Ebene also die Knoten in zwei Gruppen zu je zweien zerlegt. Um eine möglichst regelmässige Gestalt zu erzielen, wurde die Ebene ausserdem durch eine unäre Gerade gelegt.

Löst man nun die Knoten durch Verbinden auf, so entspringen aus 3, 4, 5, 6 Flächen, welche von der unendlich fernen Ebene in eine Curve mit Oval geschnitten werden, so dass dieses bezw. von 0, 12, 12, 16 Geraden getroffen wird. Nimmt man noch den Typus von 1 hinzu, dessen unendlich ferne Schnittcurve nur aus einem unpaaren Curvenzug besteht¹⁾, so hat man die vier Arten, wie sie Herr Klein fand.

¹⁾ Zu dieser Art gehört auch die Fläche, welche durch das bekannte Wiener'sche Modell veranschaulicht wird. Stellt man dasselbe auf diejenige Fläche des begrenzenden Würfels, welche der mit Text versehenen gegenüberliegt, so ist die Möglichkeit der Ueberführbarkeit in unsere Diagonalfäche unter alleiniger Anwendung von endlichen Deformationen leicht zu bemerken. Zwei der aufwärts strebenden Flügel sind dann schon ebenso vielen der Diagonalfäche vergleichbar, dasselbe tritt beim dritten ein, wenn man ihn wesentlich in horizontaler Richtung verflacht. Zur leichteren Orientirung stellen wir die Doppelsechse der Oeffnungen, welche den Knoten einer abzuleitenden Fläche mit vier solchen Punkten zukommen, neben einander:

Diagonalfäche.	Wiener'sche Fläche.						
1 3 5	{	a_2	a_5	a_6	c_{13}	c_{34}	c_{41}
		c_{56}	c_{62}	c_{25}	b_4	b_1	b_3
5 2 4	{	a_1	a_2	a_3	c_{56}	c_{64}	c_{45}
		c_{23}	c_{31}	c_{12}	b_4	b_5	b_6
4 1 6	{	a_3	a_4	a_5	c_{12}	c_{26}	c_{61}
		c_{45}	c_{53}	c_{34}	b_6	b_1	b_2
6 3 2	{	a_1	a_4	a_6	c_{23}	c_{35}	c_{52}
		c_{46}	c_{61}	c_{14}	b_5	b_2	b_3

Einfache Linien bleiben.

12, 34, 56,

c_{15} c_{24} c_{36}

Dass die aus 4 und 5 sich ergebenden Flächen sich durch Nichts unterscheiden, erkennt man ohne Weiteres.

Der Verlauf der Oeffnungen ist bei der aus 3 hervorgegangenen Fläche — sagen wir kurz 3 — übereinstimmend mit dem auf 1.

Bei 4, 5 nenne man die oberste Oeffnung 135, dann sind die übrigen, wie sie aus den 3 in horizontaler Ebene liegenden Knoten der Ausgangsflächen entstehen:

526, 364, 142,
und 146, 524, 362,

Die einfachen Geraden dieser Flächen sind:

16, 32, 54
und 12, 34, 56.

Die symmetrisch gelegenen Oeffnungen:

516, 354, 132

erstrecken sich jetzt durch's Unendliche, symmetrische Flächen I' giebt es also hier nicht. Aber das Zusammenziehen der benachbarten von 156 nämlich:

135, 526, 146

liefert eine I' mit den unären Geraden:

12, 54, 36.

Nr. 6 zeigt sechs Oeffnungen, von denen 4 durch Auflösung der Knoten entstehen. Die beiden andern sind einander benachbart, mit der gemeinschaftlichen Ebene der (horizontalen) unären Geraden. Eine I' erhält man am übersichtlichsten durch Auflösen der oberen Knoten und Schliessen der ihnen benachbarten endlichen Oeffnung.

Ausser den beiden Typen der I', welchen im Unendlichen ein unpaarer Curvenzug zukommt, giebt es also noch andere, deren Schnittcurve mit Oval begabt ist und dieses entweder von keiner, oder 2 vierfachen und vier 2fachen, oder von 2 vierfachen und zwei zweifachen Geraden getroffen wird. Rücksichtlich der leichten Entstehungsweise aus den Flächen mit vier Knoten erscheint jedoch eine wirkliche Ausführung unnöthig.

§. 3.

Flächen mit weniger oder keinem conischen Knoten.

Aus dem Vorhergehenden geht hervor, dass durch „Verbinden“ die früher durch einen Knoten gehenden reellen mehrfach zählenden Geraden in andere reelle zerfallen. Ein „Trennen“ macht dieselben aber ersichtlich imaginär, da die Parthien, welche früher im Knoten zusammenhingen, jetzt durchaus keinen Zusammenhang an jener Stelle aufweisen.

Bringt man nun an einer beliebigen Anzahl von Knoten einen dieser Prozesse $+$ und $-$ an, so erhält man aus der Fläche mit 4 Knoten:

a) 5 Flächen ohne Knoten,

I	+	+	+	+	mit 27 reellen Geraden,
II	+	+	+	-	„ 15 „ „ ,
III	+	+	-	-	„ 7 „ „ ,
IV	+	-	-	-	„ 3 „ „ , und 7 reellen Dreiecksebenen,
V	-	-	-	-	„ 3 „ „ „ 13 „ „

Alle Flächen, mit Ausnahme von V, bestehen aus einem überall zusammenhängenden Zuge, während die genannte ausser diesem noch einen paaren Theil aufweist.

b) 4 Flächen mit einem Knoten,

I	+	+	+
II	+	+	-
III	+	-	-
IV	-	-	-

und noch eine Art IV' mit isolirten Knoten, entstehend durch Zusammenziehen des paaren Stücks der V unter a). (Vergl. die Einleitung.) Ein Verschwindenlassen des Knotens führt auf eine sechste Art IV' ohne Knoten, welche aber nur bei Festhaltung des Pentaeders einer directen Ueberführung in die IV Hindernisse entgegenstellt.

c) 3 Flächen mit zwei Knoten,

I	+	+
II	+	-
III	-	-

d) 2 Flächen mit drei Knoten,

I	+
II	-

Die Fläche I' kann höchstens unter Anwendung des Trennens zu den bis jetzt gefundenen Arten neue liefern, da ein Verbinden mit einer

dann auftretenden Oeffnung gleichzeitig die ihr benachbarte entstehen lässt. Dadurch geht aber nach §. 1 die Möglichkeit der Bildung von 4 Knoten hervor. Es giebt also die Flächen:

- a) IV'' — — — ohne Knoten,
- b) III' — — mit einem Knoten,
- c) II' — — mit zwei Knoten.

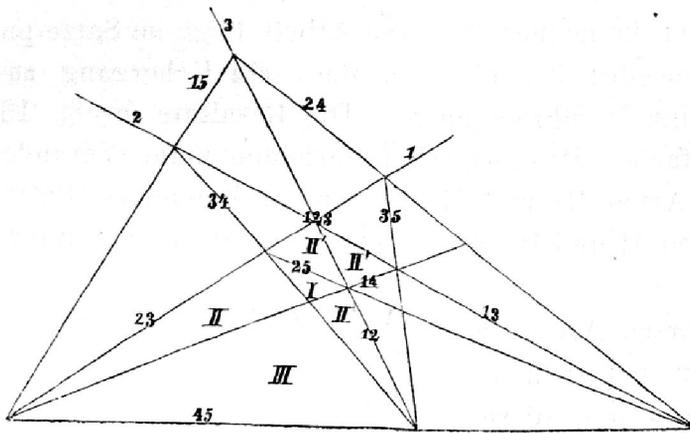
Aber auch diese, mit Zeigern versehenen, „inversen“ Arten sind von den übrigen mit derselben Ziffer und gleicher Anzahl Knoten nur verschieden, wenn man auf das Pentaeder achtet. Ich war früher der Ansicht, dass nur die Arten IV sich in einander überführen liessen, während dies in Wirklichkeit auch bei den übrigen der Fall ist, wie bald gezeigt werden soll.

Ist neben dem (eigentlichen) Pentaeder ein Punkt des Raumes als Knoten gegeben, so ist die Fläche vollkommen bestimmt. In §. 7 gab ich die Vertheilung der Knoten der verschiedenen Arten, die in Folge dieser Eigenschaft möglich ist; die Figur 1 auf Tafel I stellt das Modell 26 dar, welches für ein reelles Pentaeder jene Vertheilung oder — wie man sagen kann — Abbildung der Flächen giebt, sofern man den bestimmenden Punkt das Bild nennt.

Die polirten Drähte sind Pentaederkanten, die rothen Diagonalen der durch jene gebildeten Vierecke, die grünen Schnittlinien der Diagonalebene unter einander.

Die durch diese Ebenen in Verbindung mit denen des Pentaeders begrenzten Kammern sind Bilder verschiedener Arten mit einem Knoten. Den Punkten der Pentaederebene selbst entsprechen als Flächen dreifache Ebenen, sie sind daher auszuschliessen. Homologen Kammern entsprechen gleiche Arten, daher genügte es, von einer Reihe solcher nur eine einzige durch die charakterisirende Ziffer zu bezeichnen. Flächen mit zwei, drei und vier Knoten bilden sich bez. ab auf die Diagonalebene, deren Schnittlinien und Schnittpunkte. Man findet die Art als Uebergang zwischen den beiden mit einem Knoten weniger als die gegebene. So z. B. enthält das von zwei grünen und einer rothen Kante begrenzte Feld zwischen II und III die Bilder von II mit 2 Knoten; das von zwei rothen und einer grünen Kante begrenzte die Bilder von II'. So lange das Pentaeder bleibt, ist also die Ueberleitung dieser Flächen ineinander ersichtlich unmöglich. Das Nämliche gilt für III und III' mit einem Knoten. Man findet ferner, dass sich die I und I' mit 3 Knoten bez. auf die schrägen und horizontalen Kanten des Hexaeders I abbilden. Nur die ersteren enthalten aber einen Schnittpunkt dreier Diagonalebene, das Bild einer Fläche mit 4 Knoten, den dreien der I' kann demnach kein vierter beitreten.

Um nun die Möglichkeit der Ueberleitung der Arten II' und III' in die ungestrichenen zu zeigen, bemerken wir: Der charakteristische Unterschied in der Lage der Knoten einer II' und einer II besteht darin, dass man ohne Aenderung der Art einen Knoten der II' zu derjenigen Pentaederecke führen kann, welche mit ihrer conjugirten Kante seine Diagonalebene bestimmt, während dies bei der II unmöglich ist. Sind dann die Pentaederebenen bezeichnet durch 1, 2, 3, 4, 5, die Kanten und Diagonalebenen durch zwei Ziffern, $i k$, die conjugirten Ecken durch drei, $l m n$, so entspringt für die Ebene 45 eine Vertheilung, wie sie die nebenstehende Figur angiebt.



Vereinigen sich die Ebenen 4 und 5 zur Doppalebene, so rücken in diese auch die Diagonalebenen:

14	15
24	25
34	35

und die Felder I, II, III reduciren sich auf die Gerade 45. In der Diagonalebene der (auch jetzt noch völlig bestimmten¹⁾ Schnittlinie der Doppalebene liegen also nur Knoten von II'. Werden weiter die bisher vereinigten Ebenen imaginär, so geschieht dasselbe mit den oben hervorgehobenen Diagonalebenen, diese können also keine Abtheilungen begrenzen: Die Flächen, deren Knoten in der isolirten Kante eines Pentaeders mit 3 reellen und zwei conjugirt imaginären Ebenen liegen, sind als II' zu bezeichnen, wenn man ausdrücken will, dass nach dem Rückgange zu einem völlig reellen Pentaeder, unter Erhaltung der ursprünglich reellen Ebenen, ein hinzugefügter dritter Knoten eine I' hervorruft.

¹⁾ §. 10 pag. 76.

Lässt man jedoch andererseits ein zweites Paar Ebenen etwa 2 und 3 imaginär werden und das bisher imaginäre Paar reell, so muss man jetzt die Fläche als II bezeichnen, da nach §. 5 durch einen neu auftretenden Knoten eine II mit dreien entsteht. Damit ist die Identität der Arten nachgewiesen. Für die Uebergangsflächen eines Pentaeders mit einer Doppelebene und zwei conjugirt imaginären Ebenen folgt hieraus: Die Knoten der II gehören der Diagonalebene der Kante der Doppelebene, die der II' derjenigen der isolirten Kante an. Aber für ein Pentaeder mit 2 Paaren conjugirter Ebenen ist der Unterschied vollständig verschwunden. Je nachdem man das Ebenenpaar, deren Kante die Diagonalebene der Knoten angehört oder das andere reell werden lässt, erhält man II oder II'.

Der Fehler in meiner früheren Arbeit liegt im Satze pag. 79, Zeile 8 von unten, woselbst ich übersah, dass ein Uebergang zu zwei reellen Ebenen auf eine II führen müsse. Die Resultate des §. 13 für Flächen mit einer dreifachen Pentaederebene erleiden keine Veränderung.

Für die Arten III und III' ist keine besondere Betrachtung notwendig, mit den II und II' sind auch sie entweder zu unterscheiden oder nicht. —

Alle inversen Arten, wie sie aus der I' hervorgehen, besitzen drei einfache Linien mit reellen Asymptotenpunkten, welche einer Dreiecksebene angehören und diese geht bei der Rückleitung in eine Ebene B über. Hierdurch ist ein Unterschied bei der IV'' gegenüber den Arten IV und IV' begründet. Aber bei der IV sowohl als bei der IV' erhält man eine Ebene A. Den Grund, weshalb man bei der IV' zunächst eine Fläche mit isolirtem Knoten zu bilden hat, um nach und nach mehr Linien reell werden lassen zu können, werden wir durch eine Untersuchung der Hesse'schen Fläche einsehen, zu der wir uns jetzt wenden.

§. 4.

Ueber eine Eigenschaft der Hesse'schen Fläche.

Ein Knotenpunkt einer algebraischen Fläche ist auch Knotenpunkt der Hesse'schen Fläche und zwar ist sein Tangentenkegel bei beiden Flächen derselbe. Es soll nun der für die gestaltliche Untersuchung der Hesse'schen Fläche wichtige Satz bewiesen werden: Löst man einen Knoten einer gegebenen Fläche auf irgend eine der beiden möglichen Weisen auf, so vollzieht sich gleichzeitig die Auflösung des mit ihm vereinigt gelegenen Knotens der Hesse'schen Fläche, aber auf die entgegengesetzte Weise.

Unter Anwendung homogener Coordinaten der x_1, x_2, x_3, x_4 kann man die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung in der Form:

$$F = x_4^{n-2} \cdot \frac{1}{2} (a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{14} x_1 x_4 + a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{24} x_2 x_4 + a_{33} x_3^2 + 2a_{34} x_3 x_4 + a_{44} x_4^2) + x_4^{n-3} \cdot f^{(3)}(x_1, x_2, x_3) + x_4^{n-4} \cdot f^{(4)}(x_1, x_2, x_3) + \dots + f^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = 0$$

schreiben, in der $f^{(i)}$ vom i^{ten} Grade ist.

Ist

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0,$$

so besitzt die Fläche einen conischen Knoten im Punkte:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Nimmt man jedoch die drei ersten jener Coefficienten klein von der ersten, den letzten klein von der zweiten Ordnung, so ist der Knoten zwar aufgelöst, aber die Fläche weicht nur wenig von der früheren ab. Betrachtet man insbesondere nur die Parthie in der Nähe des Knotens, nimmt also die x klein von der ersten Ordnung, so werden die Glieder von F bzw. klein von den Ordnungen 2, 3... n , d. h. alle sind gegen das erste zu vernachlässigen; wir können uns auf die Untersuchung der Fläche:

$$x_4^{n-2} \left(\frac{a_{11} x_1^2 + \dots + a_{44} x_4^2}{2} \right) = x_4^{n-2} \cdot f = 0$$

beschränken.

Setzt man:

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k},$$

so ist die Art der Fläche zweiter Ordnung $f=0$ bekanntlich abhängig vom Vorzeichen der Determinante:

$$A = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix}$$

und zwar erhält man für:

$A > 0$ ein einschaaliges Hyperboloid oder ein imaginäres Ellipsoid,

$A < 0$ ein zweischaliges Hyperboloid oder ein reelles Ellipsoid.

Die beiden möglichen Flächen bei demselben Vorzeichen von A entsprechen bzw. einem reellen oder imaginären Tangentenkegel des aufgelösten Knotens. Der Identität dieser Kegel bei der Original- und Hesse'schen Fläche wegen genügt es also zum Beweise des aufgestellten Satzes zu zeigen, dass die Gleichungen beider Flächen von derselben Form, aber die Determinante der quadratischen Factoren verschiedenen Vorzeichens sind.

is ist nun:

$$\begin{array}{cccc}
 & f_{21} & f_{31} & f_{41} + (n-2)f_1 \\
 \begin{array}{l} 4n-10 \\ f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{14}x_4 + (n-2)f_1 \end{array} & \begin{array}{l} f_{22} \\ f_{23} \\ f_{24}x_4 + (n-2)f_2 \end{array} & \begin{array}{l} f_{32} \\ f_{33} \\ f_{34} + (n-2)f_3 \end{array} & \begin{array}{l} f_{42} + (n-3)f_2 \\ f_{43} + (n-2)f_3 \\ f_{44}x_4^2 + 2(n-2)x_4f_4 + (n-2)(f_4^2 - 3f_1f_4) \end{array}
 \end{array}$$

Addirt man die mit x_1, x_2, x_3 multiplicirten ersten drei Reihen zur vierten und führt darauf dasselbe für Columnen aus, so wird:

$$\begin{aligned}
 H &= x_4^{4n-10} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} & (n-1)f_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} & (n-1)f_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & (n-1)f_3 \\ (n-1)f_1 & (n-1)f_2 & (n-1)f_3 & n(n-1)f_4 \end{vmatrix} \\
 &= x_4^{4n-10} \left\{ (n-1)^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} & f_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} + n(n-1)fA_{44} \right\} \\
 &= x_4^{4n-10} \left\{ (n-1)^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} & f_{41} \cdot x_4 \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} & f_{42} \cdot x_4 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_{43} \cdot x_4 \\ f_{14}x_4 & f_{24}x_4 & f_{34}x_4 & -2f + f_{44}x_4^2 \end{vmatrix} + n(n-1)fA_{44} \right\} \\
 &= (n-1) \cdot x_4^{4n-10} [(n-1)(x_4^2 \cdot A - 2fA_{44}) + n f A_{44}] \\
 &= - (n-1) \cdot x_4^{4n-10} \left(f - \frac{(n-1)A}{(n-2)A_{44}} x_4^2 \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Die Determinante des Factors von $-(n-1)x_4^{n-2}$ ist also:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} & f_{41} \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} & f_{42} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_{43} \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_{44} - 2 \frac{A(n-1)}{A_{44}(n-2)} \end{vmatrix} = -A \cdot \frac{n}{n-2},$$

also im Vorzeichen von A verschieden für alle $n > 2$, w. z. b. w.

§. 5.

Ueber die Hesse'sche Fläche einer Fläche dritter Ordnung mit reellem Pentaeder.

Ist die Gleichung einer Fläche dritter Ordnung bezogen auf ihr Pentaeder¹⁾

¹⁾ §. 1.

$$f = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + a_4 x_4^3 + a_5 x_5^3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0,$$

so ist die Gleichung ihrer Tangentialebene im Punkte y :

$$a_1 y_1^2 x_1 + a_2 y_2^2 x_2 + a_3 y_3^2 x_3 + a_4 y_4^2 x_4 + a_5 y_5^2 x_5 = 0.$$

Die Hesse'sche Fläche ist dann dargestellt durch:

$$H = \frac{1}{a_1 x_1} + \frac{1}{a_2 x_2} + \frac{1}{a_3 x_3} + \frac{1}{a_4 x_4} + \frac{1}{a_5 x_5} = 0$$

und ihre Tangentialebene im Punkte z durch:

$$\frac{x_1}{z_1} \left(\frac{1}{a_2 z_2} + \frac{1}{a_3 z_3} + \frac{1}{a_4 z_4} + \frac{1}{a_5 z_5} \right) + \frac{x_2}{z_2} \left(\frac{1}{a_1 z_1} + \frac{1}{a_3 z_3} + \frac{1}{a_4 z_4} + \frac{1}{a_5 z_5} \right) \\ + \dots + \frac{x_5}{z_5} \left(\frac{1}{a_1 z_1} + \frac{1}{a_2 z_2} + \frac{1}{a_3 z_3} + \frac{1}{a_4 z_4} \right) = 0.$$

Die (festen) Tangentialebenen an den Pentaederkanten:

$$z_i = z_k = 0$$

schneiden die Fläche in 10 Kegelschnitten, von denen je vier, wie sie den Kanten einer und derselben Pentaederebene angehören, auf einer Fläche zweiten Grades liegen. Nimmt man nämlich die zerfallende Fläche vierter Ordnung, welche durch die vier Ebenen dargestellt wird und die Hesse'sche als Basisflächen eines Büschels, so geht durch einen Theil ihrer Schnittcurve, nämlich die vier Kanten, doppelt zählend die ausgezeichnete Pentaederebene, der Rest achter Ordnung der Schnittcurve — die vier Kegelschnitte — liegt also auf einer Fläche zweiter Ordnung.¹⁾ Für die Ebene $x_i = 0$ als ausgezeichnete ist diese Fläche gegeben durch:

$$a_i^2 x_i^2 + \sum a_l a_m x_l x_m = 0 \quad l \geq m.$$

Je zwei dieser Flächen haben einen der Kegelschnitte gemeinschaftlich. —

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Fläche:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + \frac{x_5^3}{4} = 0$$

mit den 4 Knoten:

1	1	1	-1	-2
1	1	-1	1	-2
1	-1	1	1	-2
-1	1	1	1	-2

¹⁾ Ueber eine andere Eigenthümlichkeit der Lage der 10 Kegelschnitte vgl. Eckhardt: Eine Eigenschaft der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung. Zeitschrift für Mathematik und Physik XIX 259 ff.

deren Hesse'sche Fläche:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{4}{x_5} = 0$$

ist. Letztere ist durch das Modell 24_a veranschaulicht. Die horizontale Ebene der weissen Geraden ist die ausgezeichnete $x_5 = 0$. Zu den übrigen kann man entweder die Ebenen der rothen oder die der grünen Geraden wählen. Die Gleichberechtigung der verschieden gefärbten ist unschwer zu erkennen. Eine dieser Ebenen ist $x_5 = 0$ parallel, drei Pentaederecken auf einer Kante liegen also unendlich fern, welche Annahme zur Erzielung einer symmetrischen Form nothwendig war. Betrachtet man das grüne Tetraeder als dem Pentaeder angehörig, so sind die Ecken des rothen Knoten der Fläche dritter Ordnung, und umgekehrt. Die beiden Flächen, welche hiernach einer und derselben Hesse'schen Fläche angehören¹⁾, sind resp. Nr. 2 und 5. Bei beiden sind selbstverständlich die unären Geraden dieselben: Diagonalen des vollständigen Vierecks in $x_5 = 0$.

Nimmt man Nr. 2 als ursprünglich gegebene Fläche $f = 0$, so ist die Gleichung von Nr. 5:

$$(x_1 + x_2 + x_3 - x_4)^3 + (x_1 + x_2 - x_3 + x_4)^3 + (x_1 - x_2 + x_3 + x_4)^3 + (-x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 + \frac{x_5^3}{4} = 0.$$

Als Gleichungen der Tangentialebenen an den Kanten der beiden Tetraeder findet man:

$$x_i + x_k = 0 \dots i, k = 1, 2, 3, 4$$

einerlei ob man sie einer der beiden Flächen dritter Ordnung oder der Hesse'schen angehörig betrachtet.²⁾ Die Kegelschnitte, in welchen letztere getroffen wird, sind also in Doppelgeraden ausgeartet. Die eben erwähnten 6 Ebenen bilden ein Hexaeder, in dessen Nähe die Hesse'sche Fläche derart verläuft, dass zwei der Diagonalen in einer Seitenebene der Fläche angehören. Nr. 24_b giebt den so begrenzten sternförmigen Körper in vergrössertem Maasstabe für ein Pentaeder, bestehend aus einem regulären Tetraeder und der unendlich fernen Ebene. Bei dieser Lage wird auch das Hexaeder regulär. Die 6 Ebenen durch je zwei Tetraederkanten, wie sie sich in einer Ecke von $x_5 = 0$ schneiden, bestimmen ebenso viel weitere Kegelschnitte, welche durch je vier Tetraederecken gehen. Bei 24_a sind diese Kegelschnitte Hyperbeln, welche bei 24_b ausserdem gleichseitig sind.

¹⁾ Eckhardt, Beiträge zur analyt. Geometrie des Raumes etc. Math. Ann. V pag. 30.

²⁾ Längs der Verbindungslinie zweier Knoten haben eine Fläche dritter Ordnung und ihre Hesse'sche stets dieselbe Tangentialebene, nämlich die der beiden Knotenkegel, gemeinschaftlich.

Die sternförmigen Parthien weichen vom Würfel nur dadurch ab, dass die Kanten des letztern durch Hyperbelzweige, die Ebenen durch schwach hyperbolisch gekrümmte Flächentheile ersetzt sind.

Nur die Tangentialebenen an den Kanten in $x_5 = 0$, nämlich:

$$x_i + \frac{x_5}{4} = 0,$$

welche jetzt durch den Punkt 1, 1, 1, 1, -4 gehen, schneiden noch in eigentlichen Kegelschnitten, welche der Fläche:

$$\frac{x_5^2}{16} + x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots x_3 x_4 = 0$$

angehören. Bei 24_a ist diese ein Ellipsoid, bei 24_b eine Kugel. Die übrigen vier dieser Flächen sind Kegel mit je einem der 4 Knoten der Fläche dritter Ordnung als Spitze. Als Kegelschnitte auf je einem dieser Kegel finden sich einer der eben bestimmten und die 3 durch den Knoten gehenden — doppeltzählenden — Geraden.

Die Hesse'sche Fläche verzeichnet auf der gegebenen die parabolische Curve, diese besteht also aus den 6 doppeltzählenden Tetraederkanten, welche als Curve zwölfter Ordnung keinen weiteren Zweig zulassen. Ein Uebergang von Theilen verschiedener Krümmung zu einander findet daher nicht beim Passiren der parabolischen Curve, sondern nur beim Passiren eines Knotens statt: Die Fläche mit vier Knoten ist nur auf dem paaren Theil elliptisch, sonst überall hyperbolisch gekrümmt. —

Die Gleichung der Fläche I', Nr. 7, ist:

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{4} + x_4^3 + x_5^3 = 0,$$

ihre 3 Knoten haben Coordinaten:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 & 1, \end{array}$$

ihre Hesse'sche Fläche, Nr. 25, ist dargestellt durch:

$$4 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = 0.$$

Die Ebenen x_4 und x_5 sind horizontal, ihre Pentaederkanten sind weiss, $x_1 x_2 x_3$ sind durch die grünen Pentaederkanten gegeben. Die rothen Geraden sind Verbindungslinien von je zwei Knoten der Fläche dritter Ordnung. Letztere Linien zählen als parabolische Curve wiederum doppelt, der Rest von der Ordnung $12 - 6 = 6$ besteht aus 7 Ovalen, welche elliptisch gekrümmte Parthien einschliessen. Von diesen Ovalen ist eins, das obere $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, zum isolirten Punkte geworden, in welchem sich drei

unäre Geraden kreuzen. Die übrigen Ovale werden durch die drei Seitentheile der Hesse'schen Fläche ausgeschnitten, je zwei berühren eine Gerade der parabolischen Curve. —

Mit Hülfe des im vorigen Paragraphen bewiesenen Satzes gewinnt man nun leicht eine Vorstellung des Verlaufs aller übrigen Hesse'schen Flächen. Insbesondere ergibt sich: Die Hesse'sche Fläche einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden besteht aus fünf Theilen, welche nur in den Pentaederecken zusammenhängen, und den Tetraederkammern einzeln derart zugeordnet sind, dass die den letztern angehörigen Strecken der Kanten auf den einzelnen Theilen vollständig verlaufen.

Geht man von einer solchen Fläche zu einer mit Knoten über, so wachsen zwei Parthien, wie sie sich über zwei Seitenflächen verschiedener Kammern erheben, zusammen. Für die an 24_a und 25 aufgelösten Knoten ist das direct zu sehen. Um den Vorgang auch für weniger günstig gestaltete Parthien zu verfolgen, führen wir die beiden Modelle in einander über.

Gehen wir aus von 24_a und nehmen die grünen Linien zu Pentaederkanten. Ein „Trennen“, ausgeübt auf die Knoten des rothen Tetraeders, liefert uns dann den Typus, wie er einer I zukommt.¹⁾ Zwei der fünf Theile einer solchen sind dann das kleine Hexaeder und die sich durchs Unendliche ziehende achsiale Parthie.

Jeder der übrigen drei wird durch einen obern und untern Seitenthail, welche Stücke im Unendlichen zusammenhängen, gebildet.

Beim Uebergang zu 25 bleiben die beiden ersten Theile im Wesentlichen unverändert, während an den untern Seitenthailen zwischen den Ebenen x_4 und x_6 seitlich Hügel entstehen, welche sich in den Knoten der I' vereinigen. Die obern Theile werden bei der Deformation durch's Unendliche gerückt. —

Ueber den Verlauf der parabolischen Curven auf den Flächen ohne Knoten mit weniger als 27 reellen Geraden sehe man Zeuthen a. a. O. Wir heben hier nur hervor, dass wie früher Ovale auftreten, welche Dreiecken einbeschrieben sind. Während aber bisher solche Dreiecke nur Ebenen B angehörten, kommen sie bei den Arten II, III, IV, V zum Theil Ebenen A zu. Solche Zweige treten neu auf und zwar in der folgenden Weise. Zieht man eine Oeffnung zum Knoten zusammen und löst diesen später durch Trennen auf, so hat man ersichtlich den ursprünglich überall zusammenhängenden hyperbolisch gekrümmten Theil

¹⁾ Das Pentaeder stimmt überein mit dem des Modells Nr. 1, die eben erzeugte Fläche kann also als der Diagonalfäche zugehörig angesehen werden, durch Betrachtung beider erkennt man das Zustandekommen der 10 isolirten Punkte der parabolischen Curve sehr leicht.

in der Nähe des Knotens in zwei, dort keinen Zusammenhang zeigende Theile von elliptischer Krümmung übergeführt. Jeder derselben muss von einem Zweige der parabolischen Curve umschlossen sein. Bei der II, welche durch Beseitigung der Oeffnung 135 in der eben geschilderten Weise entsteht, treten so zwei Ovale auf, welche von den Seiten der Dreiecke:

$$\begin{array}{l} 12, 34, 56, \\ 16, 23, 45 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 12, 34, 56, \\ 16, 23, 45 \end{array}} \right\} A$$

berührt werden. Diese Ovale sind durch Vereinigung der Ovale innerhalb der Dreiecke:

$$\begin{array}{l} 35, 46, 12; 15, 26, 34; 13, 24, 56 \text{ und} \\ 35, 24, 16; 15, 23, 46; 13, 26, 45 \end{array}$$

entstanden. Während ein Oval einer Ebene B stets von drei Kanten, wie sie durch eine Ecke gehen — und nur von drei solchen — getroffen wird, also stets zum isolirten Punkt zusammengezogen werden kann; schliesst ein Oval A mehrere Pentaederecken ein, deren Kanten es schneiden, eine Reduction auf einen isolirten Punkt ist nicht mehr möglich.

Diese Bemerkung erklärt auch das verschiedene Verhalten der Flächen:

$$\begin{array}{l} \text{II und II}' \text{ mit 2 Knoten,} \\ \text{III} \text{ „ III}' \text{ „ 1 „} \\ \text{IV} \text{ „ IV}'' \text{ ohne „} \end{array}$$

(IV' ohne Knoten schliessen wir vorläufig aus). Alle diese Flächen haben drei und nur drei unäre Geraden, welche Ovale der parabolischen Curve einschliessen, aber, wie aus dem Früheren hervorgeht, gehören diese bei den ungestrichenen Flächen einer Ebene A , bei den gestrichenen einer Ebene B an, worin nach dem eben ausgesprochenen Satz der Unterschied begründet ist.

Es erübrigt noch, die IV' zu untersuchen, deren parabolische Curve, wie diejenige der IV, von Geraden einer Ebene A eingeschlossen wird. Zieht sich der paare Theil einer V zum Knoten (einer IV') zusammen und — verschwindet weiter dieser Knoten, so muss sich während der Deformation nach §. 3 des Vorliegenden auf der Hesse'schen Fläche aus imaginären Elementen ein isolirter Knoten gebildet haben und dieser sodann in einen paaren Zug übergegangen sein.

Da die Knoten der IV' einer Tetraederkammern angehören¹⁾, so wird der neu auftretende Zweig ganz von dem frühern eingeschlossen. Also: Die Hesse'sche Fläche einer IV', wie sie aus der gleich-

¹⁾ §. 2 pag. 56.

namigen mit isolirtem Knoten durch Verschwinden desselben hervorgeht, besteht aus zwei paaren Theilen, von denen der eine den andern vollkommen umschliesst, während bei allen andern nur Züge auftreten, welche wenigstens in den Pentaederecken zusammenhängen, womit dann der besondere Charakter klar gelegt ist.

§. 6.

Die Flächen mit B_3 .¹⁾

Der Kegel zweiter Ordnung im Knoten ist in ein Ebenenpaar zerfallen, welches entweder reell (Nr. 9 und 10) oder imaginär (Nr. 11) sein kann; aber die Schnittlinie dieser Ebenen, die Achse des B_3 , ist stets reell. Dieselbe liegt übrigens nicht auf der Fläche, sondern schneidet dieselbe in drei consecutiven Punkten. Während nun eine beliebige Ebene durch den Knoten eine Curve mit gewöhnlichem Doppelpunkt verzeichnet, geht letzterer für einen Achsenschnitt in einen Rückkehrpunkt, mit der Achse als Rückkehrtangente, über. Insbesondere treffen die beiden singulären Ebenen in Curven mit dreifachem Punkt, also hier in drei Geraden.

Am Modell 10 sind diese (rothen) „Strahlen“ reell in beiden Ebenen des Knotens. Jeder zählt dreifach, ausser ihnen gibt es noch 9 einfache Linien, von welchen 3 unendlich fern sind. Die unendlich ferne Ebene ist also dreifache Tangentialebene der Fläche. Das Pentaeder besteht aus zwei Doppellebenen, welche harmonisch zu denen des Knotens sind (sich übrigens weiter zur einfachen vereinigen können) und einer fünften durch den Knoten. Die Doppellebenen des Pentaeders sind die Symmetrieebenen des Modells, die einfache enthält die horizontalen Strahlen, was jedoch im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Die singulären Ebenen theilen den Büschel durch die Achse in zwei Theile. In den Ebenen des einen Theils ist die Spitze der Schnittcurve nach unten, in denen des andern nach oben gerichtet, beim Uebergange treten zwei Curvenzweige — wie sie der Schnitt durch die kleine Achse des Basisellipse besonders gut zeigt — an den Rückkehrpunkt heran, und machen ihn zum dreifachen; später sondern sich diese Zweige in entgegengesetzter Weise wieder ab.

Ein B_3 mit reellen Ebenen entsteht durch das gleichzeitige Zusammenziehen zweier benachbarter Oeffnungen. Bei einer Fläche mit 27 reellen Geraden kann dieser Process dreimal ausgeführt werden. Für die Paare:

(146, 516); (524, 354); (362, 132)

¹⁾ Klein §. 3; meine Arbeit §. 11, 12.

erhält man aus Nr. 1 die Nr. 9 mit 3 B_3 . Jede der drei Geraden, welche das Modell noch aufweist, zählt neunfach:

$$1, 6, 4', 5', 46, 56, 41, 51, 23 \text{ etc.}$$

Das Pentaeder ist bei mehreren B_3 nicht mehr bestimmt.¹⁾ Für die vorliegende Fläche ist auch die Hesse'sche Fläche ausgeartet in die Osculationsebene an den Geraden und die Ebene der Knoten. Die Geraden bilden demnach die parabolische Curve, jede zählt als solche vierfach. Die Krümmung der Fläche ist also zu beiden Seiten der Curve die nämliche. Die kleine Kuppe über dem endlichen Dreieck der Geraden ist ersichtlich aus Theilen innerhalb des Ovals 14, 36, 52 entstanden, folglich elliptisch gekrümmt. Nun kann man von jedem Punkt zu jedem andern gelangen, ohne einen B_3 zu überschreiten, es fällt also auch diese Veranlassung zur Aenderung der Krümmung fort: Die Fläche ist, abgesehen von Punkten der parabolischen Curve, überall elliptisch gekrümmt und zwar ist sie — wie man durch Betrachtung aller übrigen findet — die Einzige, welche diese Eigenschaft hat. —

Aus dem Vorstehenden geht auch die Entstehung des B_3 aus dem C_2 hervor. Je nachdem man die ersten oder letzten der in Parenthese stehenden Oeffnungen zusammenzieht, entsteht eine I oder I' mit 3 C_2 . Man kann also sagen, die Fläche gehen ineinander über, wenn an ihren Knoten die Aenderung durch die biplanare Form vollzogen wird.²⁾

Die hierdurch erfolgte Vertauschung der Ebenen (A) 12, 34, 56 und (B) 14, 36, 52 wird aber auch schon bewirkt, wenn ein Knoten sich die biplanare Form ändert, also nur eine ungerade Anzahl dieser Vorgänge ist von Einfluss auf die Art.³⁾

Die Flächen mit weniger B_3 sind leicht erledigt. Betrachten wir statt aller andern eine mit $B_3 + 2 C_2$ z. B.:

$$(146, 516) + 524 + 362.$$

Je nachdem man an den letzteren die Aenderungen:

$$\begin{array}{c} + + \\ + - \\ - - \end{array}$$

anbringt, hat man:

in jeder Ebene 3 reelle Strahlen	Schläfli III, 1;
in einer Ebene 3 reelle Strahlen, in der andern einen reellen Strahl	„ III, 2;
in jeder Ebene einen reellen Strahl	„ III, 3. —

¹⁾ §§. 12, 17.

²⁾ Klein a. a. O. §. 4.

³⁾ §. 3.

Flächen, deren Verhalten zum Unendlichen ein anderes ist, stellt man sich leicht her aus denjenigen mit 27 reellen Geraden, wie sie die Modelle 4, 5, 6 liefern, indem man, wie früher, benachbarte endliche Oeffnungen zusammenzieht. —

Zur Untersuchung der parabolischen Curve beim Vorhandensein eines einzigen B_3 führen wir Nr. 1 in Nr. 10 über und verfolgen die Deformation der Ovale.

Sei der B_3 auf Nr. 10:

(146, 516).

Dann sind die dreifach zählenden Strahlen, wie sie zu dreien in einer singulären Ebene liegen:

1, 46, 56	2', 43, 53
6, 41, 51	und 3', 42, 52
4', 5', 23	4, 5, 16.

Die 9 übrigen Geraden sind einfach.

Hieraus ergibt sich folgende Vertheilung der 10 Ovale:

Vier liegen mit dem B_3 vereinigt: 46, 51, 23; 41, 56, 23;
43, 52, 16; 42, 53, 16.

Vier bilden Schleifen einer Curve mit vierfachem Punkt im B_3 : 46, 53, 12; 56, 42, 13;
41, 52, 36; 51, 43, 26.

Zwei sind eigentliche Ovale geblieben: 13, 45, 26; 45, 12, 36;

beide sind unendlich fern. Das erstere ist insbesondere ein isolirter Punkt, der Schnittpunkt der Parallelen des Modells mit der unendlich fernen Geraden 45 ihrer Ebene.

Wir heben noch hervor, dass die Knotenstrahlen durchaus nicht gleichwerthig sind: In jedem der vier „erster Art“ sind zwei Gerade mit reellen Asymptotenpunkten vorhanden, in jedem „zweiter Art“ befindet sich nur eine solche Gerade. Die Geraden erster Art sind die Tangenten der parabolischen Curve im vierfachen Punkt.

Die Pentaederebenen sind hervorgegangen aus:

14, 26, 35 } doppelt,
52, 64, 13 }

12, 34, 56 } doppelt,
15, 24, 36 }

16, 32, 54, die Ebene der Strahlen zweiter Art liegt der einfachen Pentaederebene derart nahe, dass sie die beiden eigentlichen Ovale der parabolischen Curve berührt.

Für das Modell sind beide Ebenen vereinigt.

Der B_3 mit imaginären Ebenen lässt keinen weiteren reellen Knoten irgend welcher Art zu, denn seine Verbindungslinien mit diesem wäre dann reell was unmöglich, da die einzige reelle Gerade in den singulären Ebenen — die Achse — nicht auf der Fläche liegt. Hieraus folgt dann auch, dass nur solche C_2 , durch welche keine reellen Linien gehen, in die vorliegenden übergeleitet werden können, also nur Knoten von Arten IV und IV'. Bilden wir uns die erstere durch Anwenden von:

— — —
auf die drei oberen Knoten der Nr. 2. Ebenen durch die Achse des Modells — der späteren Achse des B_3 — schneiden dann in einer Curve mit Doppelpunkt und nach oben gerichteter Schleife. Zieht sich diese zum Rückkehrpunkt zusammen, so hat man den B_3 des Modells Nr. 11. Der B_3 mit imaginären Ebenen entsteht also durch Zusammenziehen einer Oeffnung und Verschwinden eines paaren Stückes, welches nur im erzeugten C_2 mit den übrigen Flächentheilen zusammenhängt.

Unter Benutzung einer IV' hätten dieselben Schnitte Curven mit isolirtem Punkte ergeben, dessen Herabrücken auf die Curve zum nämlichen Resultat geführt hätte: Die Flächen IV und IV' mit C_2 sind also durch die Aenderung durch die biplanare Form ineinander überführbar.

Unser Modell stellt übrigens nicht die allgemeinste Art dar, unterscheidet sich im Aussehen jedoch durch nichts Wesentliches von ihr. Wir haben eine Fläche mit osculirendem Kegel¹⁾ vor uns, dessen Spitze der unendlich ferne Punkt der Achse ist. Die Hesse'sche ist in den Hesse'schen Kegel des genannten und der Ebene seiner Berührungs-Curve zerfallen. Die parabolische Curve zerfällt in diese Curve dritter Ordnung, mit dem B_3 als isolirten Doppelpunkt, und eine andere neunter Ordnung. Beide haben die reellen Geraden zu Asymptoten. Die Zoone, welche diese Geraden enthält, ist hyperbolisch, die andere elliptisch gekrümmt.

Hier ist auch der Ort zur Betrachtung der Rotationsflächen, da diese als diejenigen Flächen defnirt werden können, welche zwei conjugirt imaginäre Punkte des Kugelkreises zu B_3 haben.²⁾ Die reelle Verbindungslinie dieser Punkte ist dann die unendlich ferne Gerade der Asymptotenebene. Alle diese Flächen sind natürlich IV, V oder die angrenzenden mit Knoten. Sie entstehen aus den symmetrisch gebildeten der bezeichneten Arten, wenn man das Dreieck der reellen Geraden unendlich gross werden lässt, wobei dann seine Ebene zur Asymptotenebene wird, während seine Seiten in der unendlich fernen Geraden dieser Ebene sich vereinigen.

¹⁾ §. 17.

²⁾ Siehe eine Note des §. 12.

Die Flächen mit einem B_4 .¹⁾

Die Achse des Knotens liegt jetzt auf der Fläche, welche längs dieser Geraden eine constante Tangentialebene hat. Dieselbe ist dreifach zählende Pentaederebene, die Doppalebene ist, wie beim B_3 , die vierte harmonische zu jener und den Ebenen des Knotens.

Ausser der Achse wird die Fläche noch von jeder der singulären Ebenen, welche wiederum reell oder imaginär sein können, in zwei Strahlen getroffen.

Das Modell 12 zeigt einen B_4 mit reellen Ebenen. In Folge des Vorhandenseins von zwei weiteren C_2 berührt jede der Ebenen längs den (blauen) Verbindungslinien des B_4 mit jedem C_2 . Eine Auflösung eines C_2 durch + oder - führt die durch ihn gehende Gerade bezw. in zwei reelle oder imaginäre über.

Bei Nr. 13 sind die singulären Ebenen imaginär. Die Fläche hat ebenfalls zwei C_2 auf den rothen Geraden. Sie müssen imaginär sein, ihr Auftreten macht sich aber durch die feste Tangentialebene, welche die Fläche ersichtlich längs der rothen Geraden besitzt, bemerkbar. Die Linie, in welche diese Ebene ausserdem noch schneidet, ist unendlich fern. Die grüne Linie ist bei beiden Modellen die Achse.

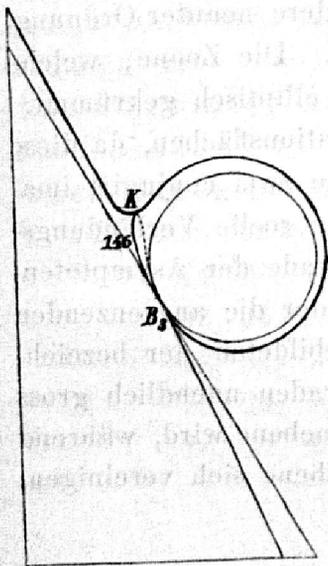
Ein B_4 kann durch Vereinigung zweier C_2 erzeugt werden, deren Verbindungslinie hierbei zur Achse wird.

Dieser Prozess geht unter Annahme reeller Ebenen folgendermassen vor sich. Man denke sich am Modell Nr. 2 durch eine schräge rothe Gerade die Symmetrieebene gelegt. Diese schneidet ausserdem noch in einer Ellipse, welche durch die C_2 auf der gewählten Geraden geht und diese Punkte fallen zusammen, wenn man die Ellipse derart — nach oben — verschiebt, dass sie die Gerade berührt. Sofort hat man dann Nr. 12.

Behufs Ableitung des B_4 aus dem B_3 nehme man als solchen:

(516, 513).

Der Symmetrieschnitt hat dann eine Form, wie sie die stark ausgezogene Curve in nebenstehender Figur zeigt. Vereinigt sich die Kuppe K mit der Spitze, welches durch Zuziehen von 416 geschieht, so hat man den B_4 , die Schnittcurve mit Spitze ist in einem Kegelschnitt mit Tangente zerfallen.



¹⁾ §. 14.

Auf einer Fläche ohne Singularitäten tritt also ein B_4 mit reellen Ebenen durch das gleichzeitige Zuziehen dreier Oeffnungen:

(416, 516, 513)

auf.

Eine solche Reihe von Oeffnungen, in der jede der folgenden benachbart ist, soll in Zukunft eine „Kette“ genannt werden. Ist insbesondere die letzte Oeffnung der ersten benachbart, so möge die Kette „geschlossen“ heissen.

Die parabolische Curve besteht auf unserem Modell, wie bei Nr. 2 aus Kanten des früheren Tetraeders, von denen jetzt drei in der Achse vereinigt sind. Die Krümmung ist, mit Ausnahme des elliptischen paaren Stückes, überall hyperbolisch.

Beim alleinigen Auftreten des B_4 :

(416, 516, 513)

und völlig reellem Liniensystem haben wir folgende Vertheilung der Geraden.¹⁾

Es liegen:

In der Achse:

1, 46, 56; 2', 43, 53;

in den vier Knotenstrahlen:

6, 41, 51; 3 3', 42, 52; 6'
4', 5', 23; 26 4, 5, 16; 13.

Diese Linien sind also jetzt wieder gleichartig gebildet.

Einfach sind nur noch:

12, 45, 36; 1', 2.

Sieben Ovale der parabolischen Curve sind in die Achse gerückt, nämlich zu den vier bereits im B_3 vereinigten sind die zwei weiteren:

13, 56, 24; 15, 43, 26

getreten, und ein siebentes:

12, 46, 35

ist zur Achse selbst geworden. Dann gibt es zwei:

14, 25, 36 und 13, 26, 45

mit Doppelpunkt im Knoten, welche zusammen eine Curve mit vierfachem Punkt bilden. Sie werden von je zwei, in verschiedenen Ebenen liegenden Knotenstrahlen und ausserdem von einer unären Geraden berührt. Endlich existirt noch ein eigentliches Oval:

12, 45, 36.

¹⁾ Vergl. die Vertheilung beim B_3 .

Nur das Ueberschreiten der Ovale, nicht das der Achse, bringt eine Aenderung der Krümmung hervor, da die Achse als paarer Zug doppelt gerechnet werden muss.

Denkt man sich die vorliegende Fläche aus Nr. 12 abgeleitet, so verläuft die Curve mit vierfachem Punkt wesentlich horizontal und begrenzt eine schmale Zoone, welche insbesondere auf dem früher paaren Stück die elliptischen Theile von den durch Auflösung des Knotens hyperbolisch gewordenen trennt. Das eigentliche Oval ist — wie bei der Diagonalfäche — ein unendlich ferner isolirter Punkt.

Zur Ableitung des B_4 mit imaginären Ebenen aus zwei C_2 hat man zunächst die beiden unbetheiligten Knoten — zu denen passend wieder zwei obere des Modells 2 gewählt werden — durch „Trennen“ aufzulösen. Die Ellipse des zu benützenden Symmetrieschnittes kann dann ebenfalls durch Verschiebung, aber nach unten, zur Berührung mit der Geraden gebracht werden, wodurch der Knoten der Nr. 13 entsteht. Also: Ein B_4 mit imaginären Ebenen entsteht durch Zusammenziehen von zwei Oeffnungen, welche einer und derselben dritten benachbart sind, und Verschwinden eines nur in den erzeugten C_2 mit den übrigen Flächentheilen zusammenhängenden paaren Stücks. Der Vorgang ist demjenigen der Bildung des B_3 und C_2 mit imaginären Berührungskegeln also ganz analog.

Um die abgebildete Fläche vollkommen in die durch Nr. 13 dargestellte überzuführen, hat man nur nöthig, die beiden sich durch die Oeffnung erstreckenden unären Geraden zu vereinigen und die dritte in's Unendliche rücken zu lassen.

Der B_4 bildet den Uebergang zwischen Flächen mit 2 reellen und solchen mit 2 imaginären Knoten. Letztere erhalten wir durch weitere Verschiebung des Kegelschnitts im benutzten Querschnitt.

Die Entstehung der vorliegenden Singularität aus dem B_3 mit imaginären Ebenen, ist nach dem auf pag. 24. Auseinandergesetzten wohl leicht genug einzusehen.

§. 8.

Die Flächen mit einem B_6 .

Diese Singularität zeigt das Modell Nr. 14. Die eine Ebene des Knotens berührt längs der (grünen) Achse und zählt als Pentaederebene fünfmal.¹⁾ Die andere schneidet ausser in der Achse noch in zwei

¹⁾ §. 15.

Strahlen, welche in Folge des beigefügten C_2 vereinigt liegen. Die parabolische Curve besteht aus der vierfachen Achse, der fünffachen Verbindungslinie der Knoten und einer Raumcurve dritter Ordnung (cubische Ellipse).

Der Knoten kann durch Zuziehen der Kette:

$$(164, 165, 135, 435)$$

erzeugt werden und ist aquivalent:

$$B_3 + C_2 = (164, 165) + 435.$$

Es liegen dann in der Achse:

$$1, 46, 56, 2', 43, 35, 4, 5, 16, 13;$$

im Strahle der osculirenden Ebene:

$$3', 42, 52, 6', 12;$$

in den beiden Strahlen der nicht osculirenden Ebene:

$$6, 41, 51, 3, 45, \\ 4', 5', 23, 26, 1',$$

während 36 und 2 einfach sind.

Auf der Achse liegt ausser den 7 Ovalen beim Auftreten des B_4 ein achttes:

$$13, 26, 45.$$

Zwei weitere Ovale:

$$14, 25, 36 \text{ und } 12, 45, 36$$

bilden eine Schleife mit Doppelpunkt im Knoten. Jedes derselben wird von dem Strahl in der berührenden Ebene, einem, hierdurch ausgezeichneten, der schneidenden Ebene und der einfachen Geraden mit reellen Asymptotenpunkten berührt.

§. 9.

Die Flächen mit einem B_6 .

Die eine Ebene des Knotens osculirt, sie ist noch fünffache Ebene des Pentaeders, nur dass dessen Ecken jetzt unbestimmt geworden sind.¹⁾ Das Modell 16 zeigt neben dem B_6 noch einen C_2 . Die parabolische Curve besteht aus der (grünen) Achse und der (rothen) Verbindungslinien der Knoten. Jede dieser Geraden zählt sechsfach. Nur das Ueberschreiten des Knotens ändert demnach die Krümmung, welche auf dem vorhandenen paaren Theil elliptisch, sonst überall hyperbolisch ist.

¹⁾ §. 15.

Der Knoten entsteht aus der Kette:

$$(416, 516, 513, 543, 542)$$

und ist äquivalent:

$$B_3 + B_3 = (416, 516) + (543, 542)$$

$$B_4 + C_2 = (416, 516, 513) + 542$$

$$3 C_2 = 416 + 513 + 542.$$

Diese drei conischen Knoten gehören einer I an.¹⁾ Die Knoten werden nicht gleichartig vereinigt, denn nur bei zweien wird eine benachbarte Oeffnung zusammengezogen; die Verbindungslinie dieser beiden wird zur Achse.

Die Vertheilung der Geraden ist die folgende. Es liegen:

In der Achse:

$$1, 46, 56, 2', 43, 35, 4, 5, 16, 13, 3', 42, 52, 6', 12;$$

in den beiden Knotenstrahlen der schneidenden Ebene:

$$6, 41, 51, 3, 45, 36$$

$$4', 5', 23, 26, 41', 2.$$

Alle Linien gehen zwar durch den Knoten, aber das Oval der parabolischen Curve:

$$14, 36, 25$$

— ein Kegelschnitt — ist noch geblieben. Ausser diesem und der Achse findet man noch eine imaginäre Curve vierter Ordnung.

§. 10.

Die Flächen mit uniplanaren Punkten.

Diese Flächen verhalten sich in der Nähe der Singularität wie eine Doppalebene. Je nachdem dieselbe in drei getrennten Strahlen schneidet, oder längs einem berührt oder endlich osculirt, hat man bezw. einen U_6 , U_7 oder U_8 vor sich. Eine willkürlich durch den Knoten gelegte Ebene schneidet stets in einer Curve mit Spitze.

Die Modelle 16 und 17 zeigen die Singularität U_6 , dessen Ebene bezw. in drei reellen Strahlen oder in einem reellen Strahl schneidet. Solche Linien zählen achtfach²⁾, es sind also ausser ihnen nur noch drei einfache vorhanden. Diese werden von den festen Tangentenebenen an den Knotenstrahlen ausgeschnitten. Während bei der allgemeinsten Art der vorliegenden Flächen, die Hesse'sche aus einem Kegel zweiten Grades mit dem Knoten als Spitze und der doppelt zählenden singulären Ebene

¹⁾ Vergl. die Bildung des U_6 im folgenden §.

²⁾ Vergl. die Bildung des U_6 aus dem B_3 in diesem §. pag. 30.

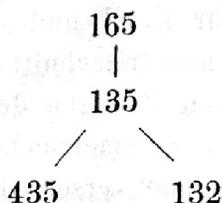
besteht¹⁾, ist bei den modellirten jener Kegel ausserdem in ein Ebenenpaar zerfallen; es sind Tetraederflächen.²⁾ Bei 16 ist dieses Ebenenpaar imaginär, bei 17 reell.

Die parabolische Curve besteht im Allgemeinen aus den Knotenstrahlen und einer Curve sechster Ordnung, einem Oval. Auf 16 ist letzteres ein isolirter Punkt, in dem sich die unären Geraden kreuzen; durch geringe Deformation, welche die reelle Doppelgerade des genannten imaginären Ebenenpaars in einen — zunächst sehr spitzen — Kegel überführt, gewinnt man das eigentliche Oval.

Nr. 17 zeigt zwei eigentliche Curven dritter Ordnung, zur Ableitung der allgemeinen Curve sechster Ordnung hat man den Doppelpunkt auf der unären Geraden so aufzulösen, dass diese Gerade einen der hervorgehenden Curvenzweige berührt.

Der U_6 mit drei reellen Knotenstrahlen entsteht auf einer Fläche ohne Singularitäten entweder durch Zuziehen einer Oeffnung mit den drei ihr benachbarten; oder durch Zuziehen von drei nicht aufeinanderfolgenden einer geschlossenen Kette von sechsen, und darauffolgendes Verschwinden eines nur mit den gewonnenen C_2 zusammenhängenden paaren Stückes.

Die Oeffnungen:



bilden eine Gruppe, wie sie die erstgenannte Erzeugungsart voraussetzt. Je zwei benachbarte sind durch Striche verbunden. Das Zuziehen der drei äusseren liefert nach pag. 6 dieser Arbeit zunächst eine I' . Nehmen wir als solche das Modell 8³⁾ und lassen die Knoten zusammenwachsen, was offenbar dem Zuziehen von 135 entspricht, so haben wir sofort den U_6 auf Nr. 16.

Also: Durch Vereinigung der 3 Knoten einer I' entsteht ein U_6 .

Eine Kette, wie sie die zweite Entstehungsart verlangt ist:

(146, 346, 326, 526, 524, 124).

Die erste, dritte, fünfte Oeffnung gehören den drei oberen Knoten von Nr. 2 an. Ein Auflösen des unteren Knotens durch „Trennen“

¹⁾ §. 19.

²⁾ §. 18.

³⁾ Nr. 7 und die Diagonalfäche lassen sich natürlich ebenfalls benutzen, die Fläche erscheint dann von der andern Seite gesehen, von welcher sich die Gestaltung der singulären Stelle jedoch weniger gut ausnimmt.

liefert den geforderten paaren Theil, dessen Verschwinden, durch Vereinigung der Knoten, ebenfalls Nr. 16 hervorgehen lässt.

Solche drei Knoten können aber nach dem vorigen §. auch auf einen B_6 führen, wenn man ihre Vereinigung durch Zuziehen von zwei Oeffnungen der Kette bewirkt. Bei der oben benutzten Kette erstrecken sich jedoch die Oeffnungen, nämlich:

346, 526, 124

durch's Unendliche, wir benutzen daher, um beide Derivationen neben einander zu haben, besser die Kette:

416, 516, 513, 543, 542, 142.

Eine Vereinigung der Knoten:

416, 513, 542

führt auf einen U_6 , wenn man die Oeffnung 362 beseitigt und das sich darbietende paare Stück verschwinden lässt.

Die fünf ersten Oeffnungen bilden aber auch die Kette des im vorigen §. betrachteten B_6 , durch welche Bemerkung mit Rücksicht auf das dort Gesagte, dann der Unterschied in der Erzeugung der Singularitäten U_6 und B_6 klar hervortritt.

Um den U_6 aus der Vereinigung der Ebenen eines B_3 abzuleiten, nehmen wir das Modell 10 zur Hand und denken uns durch die grosse Achse der Basisellipse den Symmetrieschnitt gelegt. Eine Vereinigung der Spitze mit den beiden unteren Zweigen der Schnittcurve bewirkt deren Zerfallen in drei Gerade, die Symmetrieebene ist singuläre Ebene eines entstandenen U_6 . Je zwei Gerade verschiedener Ebenen haben sich mit noch zwei einfachen, zum achtfach zählenden Strahl vereinigt. Die noch einfach bleibenden sind unendlich fern. Setzt man die Deformation noch weiter fort, so lösen sich zwei Curvenzweige in einer der früheren entgegengesetzten Weise wieder ab, die beiden Seitenflügel zeigen im Endlichen keinen Zusammenhang mit dem unteren, jetzt kegelförmigen Theil, auf dem die nach oben zeigende Spitze sich befindet. Wir haben einen B_3 mit imaginären Ebenen vor uns.

Zur Ableitung des U_6 aus dem B_4 stellen wir einen solchen aus der Kette:

165, 135, 435

her und ziehen dann 132 zusammen. Aber dieser Vorgang ist nicht der Vereinigung des B_4 mit einem C_2 gleich zu achten; denn getrennt können wir diese Singularitäten aus den uns zur Verfügung stehenden Oeffnungen nicht bilden, da 132 — welche doch den C_2 liefern müsste — der bereits im B_4 zugezogenen 135 benachbart ist.

Ein U_6 , dessen Ebene nur einen reellen Strahl enthält, kann aus der Vereinigung von zwei imaginären Knoten mit einem reellen

hervorgehen. Wir denken uns daher der Anschaulichkeit wegen einen B_4 aus zwei imaginären Knoten gewonnen¹⁾, und zeigen: Der U_6 geht hervor durch Zuziehen einer, dem B_4 benachbarten Oeffnung, wenn dessen Ebenen imaginär, oder durch Verschwinden eines am B_4 liegenden paaren Stückes, wenn diese Ebenen reell sind.

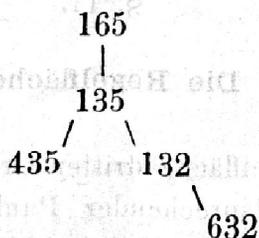
Um die Singularität in ersterer Weise herzustellen, löse man am Modell 13 durch Ueberführung der rothen Linie in einem unpaaren Curvenzug die auf ihr liegenden imaginären Knoten auf. Dadurch ist dann die zerfallende Curve des betreffenden Symmetrieschnittes in eine eigentliche Curve dritter Ordnung mit isolirtem Punkte übergegangen. Wird dieser in Folge Zuziehens der elliptischen Oeffnung, zum Rückkehrpunkt, so hat man den auf Nr. 17 dargestellten Knoten gewonnen. Die Verschiedenheit im Aussehen der Flächen wird beseitigt, wenn man den Wendepunkt des Symmetrieschnittes von Nr. 17 in's Unendliche rücken lässt. —

Die zweite Entstehungsart geht hervor, wenn man an Nr. 12 die beiden Knoten durch „Trennen“ auflöst und den paaren Theil verschwinden lässt. Eine Drehung der unären Geraden, durch welche sie parallel der früheren Achse wird, liefert die Form 17.

Wie die vorliegende Singularität aus dem B_3 mit imaginären Ebenen entspringt, ist leicht zu sehen, wenn man am Modell 11 durch die Achse einen Schnitt, am besten senkrecht zu einer Symmetrieebene, legt. Ein solcher zeigt eine symmetrische Curve mit — nach oben gerichteter — Spitze. Lässt man die beiden Zweige zu beiden Seiten dieser Spitze immer flacher werden, so geht die Curve schliesslich in eine Gerade über und in diesem Augenblick hat man den U_6 . Eine Fortsetzung der Deformation lässt die Spitze wieder erscheinen, aber ihre Richtung ist der früheren entgegengesetzt, die Ebenen des B_3 sind reell geworden.

Wir wenden uns zum U_7 . Die Ebene dieses Knotens berührt die Fläche und ebenso den Kegel der Hesse'schen. Das Oval der parabolischen Curve hat eine Spitze erhalten.

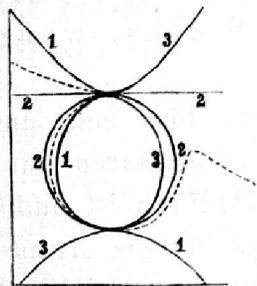
Der U_7 entsteht durch Zuziehen von:



Eine Bildung aus niederen Singularitäten dürfte nach den gegebenen Entwicklungen für den U_6 nicht mehr mit Schwierigkeiten verbunden sein.

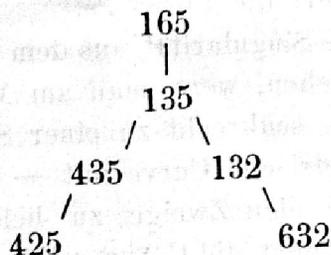
¹⁾ Vergl. pag. 26 des Vorliegenden.

Wir unterdrücken sie deshalb und beschränken uns auf die Darlegung der Ueberleitung der beiden Arten von U_6 ineinander, bei welcher der U_7 zu passiren ist.



Stellt man das Modell 16 so, dass der Symmetrieschnitt die Lage der Curve 1 in nebenstehender Figur hat und lässt diese Curve successive die Form der punktirten Linie annehmen, so entsteht schliesslich ein Kegelschnitt mit Tangente, die Curve 2. Dann hat man das Modell 18 mit dem feinen nadelförmigen Theil zur Linken. Durch weitere Deformation trennt sich ein Theil der Curve wieder ab, die Spitze erscheint von neuem, zeigt aber nach links (Curve 3); man hat Nr. 17.

Osculirt endlich die Ebene des Knotens, so liegt ein U_8 vor, wie er auf dem Modell Nr. 19 zur Anschauung gebracht ist. Die mit dieser Singularität begabte Fläche ist stets Tetraederfläche, die Hesse'sche besteht aus der dreifachen Ebene des Knotens und einer vierten durch denselben Punkt. Die parabolische Curve zerfällt in den zehnfachen Knotenstrahl und eine Ellipse. Der U_8 entsteht durch Zuziehen von:



und danach mag man sich auch seine Bildung aus niederen Singularitäten ableiten.

Ein weiteres Zuziehen von 164 würde im Allgemeinen einen U_9 liefern, im vorliegenden Falle einer Fläche dritter Ordnung jedoch ihre Ausartung in eine dreifache Ebene herbeiführen.

§. 11.

Die Regelflächen.

Die allgemeine Regelfläche dritter Ordnung ist bekanntlich der Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte eines geraden Gebildes u und eines ihm projectivischen Kegelschnitts K .¹⁾ Auf 20 und 21 ist u die grüne Linie, K der eingezeichnete Kegelschnitt.

¹⁾ Vergl. z. B. Reye, »Geometrie der Lage«, 2te Auflage, pag. 179 oder Fiedler, »Darstellende Geometrie«, 2te Auflage, pag. 434, auch §. 18 meiner Arbeit.

Jede durch u gelegte Ebene schneidet den Kegelschnitt zweimal, enthält also zwei Erzeugende. Die sämtlichen Schnittpunkte bilden eine Doppelgerade der Fläche, welche den Kegelschnitt schneidet. Je nachdem nun die sämtlichen Ebenen des Büschels u den Kegelschnitt in reellen Punkten schneiden (Modell 20) oder dies nur für die Ebenen eines Winkelraums der Fall ist (Modell 21), welcher von zwei Tangentenebenen des Kegelschnitts begrenzt ist, ist die Doppelgerade völlig oder nur auf einer von zwei U_7 begrenzten Strecke von reellen Flächentheilen umgeben. Die beiden durch die U_7 gehenden Grenzerzeugenden sind roth gezeichnet.

Die Abweichung in der Form, welche die Theile des Modells 21 in der Nähe eines U_7 gegenüber Nr. 18 zeigt, erweist sich als unwesentlich, wenn man sich die Nadel des letzteren Modells durch den isolirten Theil der Doppelgeraden ersetzt denkt.

Alle Regelflächen sind Tetraederflächen, die Hesse'sche besteht aus den doppeltzählenden singulären Ebenen der beiden U_7 , sind also bei 20 imaginär. Die parabolische Curve setzt sich aus der achtfachen Doppelgeraden und den beiden doppeltzählenden Grenzerzeugenden zusammen, die Krümmung ist also überall die nämliche: hyperbolisch.

Schneidet das gerade Gebilde u den Kegelschnitt, so liegt es mit der Doppelgeraden vereinigt, man hat den Specialfall der Cayley'schen Regelfläche. Auch die U_7 und ihre Ebenen haben sich vereinigt und die Fläche verhält sich hier, wie ein U_8 .

Das Modell 22 zeigt den Kegelschnitt im Endlichen, der U_8 ist unendlich fern. Verschiebt man die Ebene des Kegelschnitts parallel mit sich selbst, so wird die Schleife der Schnittcurve kleiner und kleiner, um schliesslich im Unendlichen sich zum Rückkehrpunkte zusammenzuziehen. Das Modell wurde zur Vermittelung des Uebergangs von Nr. 20 angefertigt. Nr. 23 zeigt umgekehrt den U_8 im Endlichen und der Kegelschnitt ist unendlich fern. Die beiden Gestalten sind durch Collineation ineinander überführbar.

Die Hesse'sche Fläche ist die vierfache singuläre Ebene, die parabolische Curve die zwölfmal zählende Doppelgerade.

Berichtigung.

Auf Seite 5 Zeile 18 von oben ist nach dem Worte »Prozesses« ein + einzuschalten.