219

ABHANDLUNGEN ZUR SAMMLUNG MATHEMATISCHER MODELLE

Lesezimmer

IN ZWANGLOSEN HEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

HERMANN WIENER
IN DARMSTADT

I. BAND · 1. HEFT

LEIPZIG
VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907

Die „Abhandlungen" geben zunächst dem Lehrer alles das an die Hand, was zum erfolgreichen Gebrauch der Modelle nötig ist: Anleitungen zur Handhabung und Hinweise auf die Verwendbarkeit im Unterricht, auf diejenigen mathematischen Sätze, die durch sie erläutert werden können, und auf die einschlägige Literatur. So sollen die Abhandlungen, wie die Modelle selbst, dem anschaulichen Denken immer mehr Eingang verschaffen helfen, aber über dies hinaus auf scharfe geometrische Begriffsbildung und Anwendung zweckentsprechender und reiner Methoden hinweisen.

Inhalt des ersten Heftes.

Abhandlungen von H. WIENER in Darmstadt.

Seite

Vorbemerkung 1

Nr. 1. Über mathematische Modelle und ihre Verwendung im Unterricht 3

Ziele. — Einfachheit. — Übersichtlichkeit, insbesondere Durchsichtigkeit. — Drahtmodelle der Flächen. — Bewegliche Modelle. — Schattenbilder. — Das Schattenwerfen. — Mathematischer Stoff. — Einheitlichkeit der Sammlung. — Absatzgebiet. — Mitarbeit.

Nr. 2. Zur Projektion einiger ebenen Figuren 9

Zur I. Reihe der Modelle. Nr. 1. 2. 3. 11. 12. 13. 21.

Quadrat, regelmäßiges Fünf- und Sechseck. — Kreis. Hyperbel. Parabel. — Sinuslinie.

Nr. 3. Die fünf regelmäßigen Vielflache Platons. Regelmäßigkeit in einer Gruppe 11

Zur II. Reihe der Modelle. Nr. 101 bis 105.

Verschiedenartige Umrisse. — Modelle Nr. 101 bis 105. — Begriff des Regelmäßigen. — Anwendung auf Krystalle. — Die Gruppen der regelmäßigen Vielflache.

Nr. 4. Regelmäßige Vielstrahlen und geschlossene Spiegelsysteme 15

Zur III. Reihe der Modelle. Nr. 115 und 116.

Regelmäßige Vielstrahlen. — Sechs besondere Fälle. — Geschlossene Spiegelsysteme. — Vier Fälle. — Erzeugung der Gruppen.

Nr. 5. Die regelmäßigen Vielflache, abgeleitet aus ihrer Gruppe 19

Zur III. Reihe der Modelle. Nr. 111 bis 116.

Einleitung. Geschichtliches, Übersicht.

Erster Teil: Aufbau der regelmäßigen Vielflache.

I. Das begriffliche Vielflach 24

Bildung der Seite. — Bildung des Vielkants. — Das Vielflach. — Das Vielzell.

II. Erste und zweite Definition des regelmäßigen Vielflachs aus der Gruppe 28

1. und 2. Definition. — Vergleichung mit der gewöhnlichen Definition. — Einschränkungen: I. Ebene Seiten. II. Entartete Seiten, geometrische Folgerungen. III. Überführbarkeit der Vielecke. — 1. Definition. — 2. Definition.

III. Überführung einer Kante in eine Nachbarkante 32

Zweierlei Drehungen. — Kantenumwendungen. — Zwei Fälle, zwei Unterfälle. — Anmerkung: Über Folgen von Verwandtschaften. — Erster Fall. — Zweiter Fall. — 1. Unterfall. — 2. Unterfall. — Beispiel.

(Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.)

Seite

IV. Tragweite der verschiedenen Voraussetzungen. Dritte Definition des regelmäßigen Vielflachs 39
Folgerungen aus der 2. Definition. — Neue Voraussetzungen 1) und 2). — Entartung des Vielflachs. — Kantenumwendung. — Zerfallende Vielflache. — Anmerkungen: Beispiele. — Vielecke, die in einer Gruppe regelmäßig sind. — In einer Untergruppe regelmäßige Vielecke als Seiten. — 3. Definition. — Anmerkung: Erweiterung auf abstrakte Gruppen.

V. Konstruktion eines regelmäßigen Vielflachs aus seiner Gruppe 48
Ecken. — Kanten. — Vielkante und Vielecke. — Duale Erzeugung. — Bildung der Vielflache aus der Gruppe. — Anzahlen. Berichtigung.

Zweiter Teil: Ableitung der möglichen regelmäßigen Vielflache aus den Gruppen (folgt in einem späteren Heft).

Nr. 6. Wie sollen Flächen, insbesondere die der zweiten Ordnung, gezeichnet werden? 52
Zur IV. Reihe der Modelle. Nr. 401 bis 406.
Rundung der Flächen. — Umrandung. — Modelle Nr. 401 bis 406. — Wahl des Sehstrahls.

Nr. 7. Über Flächen 2. Ordnung 55
Zur IV. Reihe der Modelle. Nr. 401 bis 406.
Beschränkung auf affine Abbildungen.

I. Reelle und ideelle Achsen und Scheitel der Flächen 2. O. Imaginäre Flächen 56
Kurven 2. O. mit Mittelpunkt. — Anmerkung: Genaue Konstruktion der Ellipse und der Hyperbel. — Flächen 2. O. mit Mittelpunkt. — Modelle Nr. 402. 403. 404. — Paraboloide. — Modelle Nr. 405. 406.

II. Die Erzeugung der Kurven und Flächen 2. O. im Gebiet der affinen Abbildungen 62
Elliptische Strahleninvolution. — Hyperbolische Strahleninvolution. — Konstruktion I der Strahleninvolutionen (aus 2 besonderen Paaren). — Harmonisch zugeordnete Involutionen. — Anmerkungen: I. Verallgemeinerungen. II. Verwandtschaftsgleichungen.
Spiegeleigenschaft der Kurven und Flächen 2. O. — Grundeigenschaft des Polarsystems. Erzeugung I der Kurven und Flächen 2. O. (Spiegelverfahren). — Erzeugung II (Schnittverfahren). — Konjugierte Durchmesser und Richtungen. — Konstruktion II der Strahleninvolution (aus 2 beliebigen Paaren). Anmerkung III: Geometrische Grundlagen der Theorie. 66
Durchmesser-Polarsysteme der Mittelpunktsflächen. — Das Senkrechtstehen im Raum. — Anmerkung IV: Die STEINERsche Konstruktion. — Durchmesser-Polarsystem des Ellipsoids. — Durchmesser-Polarsysteme der Hyperboloide. — Der reelle und der imaginäre Kegel. — Konstruktion ihrer Polarsysteme. — Harmonisch zugeordnete Kegel. — Mittelpunktsflächen 2. O. — Anmerkungen: V. Ausbau der Theorie. VI. Harmonisch zugeordnete Polarsysteme. 73

Nr. 8. Bewegliche Fadenmodelle der Regelflächen 2. O. mit gleichbleibenden Fadenlängen 85
Zur V. Reihe der Modelle. Nr. 411 und 412.
Die veränderliche Drehregelfläche. — Das veränderliche hyperbolische Paraboloid.

Nr. 9. Bewegliche Stabmodelle zur Überführung einer Fläche 2. O. in konfokale Flächen 88
Zur V. Reihe der Modelle. Nr. 421 bis 424.
Die Sätze von HENRICI und GREENHILL. — Weitere Sätze. — Das Verbindungsgelenk.

Im gleichen Verlage erschien:

Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgeg. im Auftrage des Vorstandes der Deutsch. Mathematiker-Vereinigung von Dr. W. v. Dyck, Prof. a. d. Techn. Hochsch. zu München. [XVI u. 430 S.] Lex.-8. 1892. geh. n. M. 14.—

Nachtrag. [X u. 135 S.] Lex.-8. 1893. geh. n. M. 4.—

Nr. 1. Über mathematische Modelle und ihre Verwendung im Unterricht.

Von H. WIENER in Darmstadt.

Ziele.

Jeder, der eine Zeichnung oder ein räumliches Modell benützt, sucht sich selbst oder anderen daran irgend eine räumlich ausdrückbare Beziehung zu veranschaulichen; dies gilt ebenso gut für den Geometer, der Linien und Flächen auf ihre gestaltlichen Verhältnisse oder auf ihre gegenseitigen Lagenbeziehungen hin untersucht, wie für den Analytiker, der Funktionsabhängigkeiten durch Kurven und Flächen darstellt. Das erste nd wichtigste, was man von einem Modell verlangen kann, ist daher, daß es *anschaulich* sei; dies wird aber am sichersten erreicht durch *Einfachheit* und durch *Übersichtlichkeit.*

Es gibt ja Fälle, in denen sehr verwickelte Modelle der Forschung wesentliche Dienste leisten, wie z. B. das von CHR. WIENER angefertigte erste Modell einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden. Man kann aber in manchen mathematischen Sammlungen die Bemerkung machen, daß derartige einer Sonderuntersuchung gewidmeten und daher nur Einzelnen zu gut kommenden Modelle reichlich vertreten sind, *daß aber gerade die einfachen Modelle fehlen.* Und doch erkennt man leicht an dem Beispiel solcher Modelle, wie die von CHR. WIENER herausgegebenen 8 Modelle, die sich auf die Singularitäten der Raumkurven und ihrer Projektionen beziehen, daß die einfachsten für den Unterricht am gebräuchlichsten sein können. Ist aber an einfacheren Modellen das Anschauungsvermögen hinreichend gestärkt, so können die verwickelten meist ganz entbehrt werden, da es dann leichter ist, die einfachen Formen *in der Vorstellung* mit einander zu verknüpfen, als an einem verwickelten Modell die Eigenschaften herauszulesen.

Das *Ziel,* das ich nun mit meiner Veröffentlichung verfolge, ist, *dem mathematischen Unterricht Modelle zuzuführen, die geeignet sind, durch Einfachheit und Übersichtlichkeit das An-*

schauungsvermögen zu stärken und durch Mannigfaltigkeit der Auswahl die Kenntnis geometrischer Formen zu verbreiten.

Einfachheit.

Die *Einfachheit* wird sich vor allem in der Auswahl des Stoffes zeigen müssen, und ich scheue mich deshalb nicht, ganz elementare Dinge, wie die 5 regelmäßigen Vielflache (die PLATON-ischen Körper), in die Sammlung aufzunehmen; sie äußert sich auch in der Beschränkung des auf einem Modell Dargestellten, indem alles das weggelassen wird, was die Einheit der Auffassung stört. So ist es meist wichtiger, die geometrischen Formen selbst, etwa die von Kurven oder Flächen, zu erkennen, als die zufälligen und mehrdeutigen Entstehungsweisen der Kurve oder Fläche an einem Modell dargestellt zu sehen. Von dieser Überzeugung ausgehend, habe ich z. B. für die oben erwähnten Ausstellungen die Gestalten der Raumkurven dritter Ordnung einmal durch Drähte und dann als Fadenmodelle durch ihre Tangenten wiedergegeben, dagegen auf die Darstellung der die Kurve enthaltenden Zylinder und Kegel verzichtet [1]).

Übersichtlichkeit, insb. Durchsichtigkeit.

Die *Übersichtlichkeit* eines Modells wird erhöht durch günstige Annahmen, z. B. durch Symmetrie, außerdem ist von Einfluß darauf die Art der Darstellung und das Material, sowie die Wahl der Begrenzung.

Fadenmodelle müssen wegen ihrer *Durchsichtigkeit* als besonders anschaulich gelten. Kommt hierzu noch statt der vielfach üblichen Würfelbegrenzung eine solche, die dem Gegenstand jedesmal angepaßt ist und die sich dem Auge möglichst wenig aufdrängt, so dürften diese Modelle noch weitergehenden Ansprüchen genügen und in gewissem Sinne sogar unser Schönheitsgefühl befriedigen. Dadurch, daß ich statt der begrenzenden ausgesägten Metallplatten durchweg gebogene Messingdrähte verwende, wird allen jenen Mängeln leicht abgeholfen.

Drahtmodelle der Flächen.

Um den Vorteil der Durchsichtigkeit auf beliebige Flächen zu übertragen, hat man nur nötig, diese aus einer Schar von

[1]) Vgl. WALTHER DYCK, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, München 1892, S. 268. Zwei Modelle, die eine kubische Ellipse als Schnitt zweier Kegel und eine kubische Hyperbel als Schnitt dreier rechtwinkliger hyperbolischer Zylinder darstellen, habe ich schon vorher für das mathematische Institut der Hallischen Universität herstellen lassen und als Ergänzung zu jenen übersichtlicheren dürften auch diese ihren Wert haben. Die schon vor einer Reihe von Jahren in dem mathematischen Institut der technischen Hochschule zu Darmstadt zur Zahl 13 vervollständigte Reihe von Modellen der Raumkurven dritter Ordnung wird in der zunächst erscheinenden Ausgabe veröffentlicht werden.

Kurven erzeugt zu denken. Ich erinnere an die bei dem erwähnten Vortrag vom Jahre 1896 vorgezeigten Modelle eines Kreisringes und einer Wendelfläche (Regelschraubenfläche, deren Erzeugende die Achse senkrecht treffen). Beide Modelle sind aus Drahtkurven zusammengesetzt, der Kreisring aus Kreisen, bei der Wendelfläche sind die von der Achse sich nach beiden Seiten erstreckenden Flügel aus je 8 Schraubenlinien hergestellt, die durch wenige Speichen (Erzeugende) miteinander verbunden sind.

Bewegl. Modelle.

Besonderer Beliebtheit haben sich von jeher *bewegliche Modelle* erfreut, weil sie eine ganze Anzahl verschiedener Formen gleichzeitig darstellen, ohne dadurch an Anschaulichkeit einzubüßen. Da Fadenmodelle, deren Fäden durch Gewichte angespannt werden, sich wegen der unvermeidlichen Verwirrung der Fäden wenig bewährten, so habe ich teils durch neue Anordnung der Modelle, teils durch neue Bewegungsvorrichtungen die leichtere Handhabung solcher Modelle herbeizuführen gesucht.

Schattenbilder.

Es gibt aber eine Methode, um die mannigfaltigsten Formen in steter Folge aus einem einzigen Modell entstehen zu lassen, auch ohne daß es in seinen Teilen beweglich ist: Man werfe aus einer Lichtquelle den Schatten des Modells auf einen hellen Schirm. Dabei kann schon das denkbar einfachste Raummodell, ein zur Raumkurve gebogenes Drahtstück, von Nutzen sein, da durch einfaches Drehen das Auftreten einer Singularität in der Schattenkurve, sowie ihr stetiger Übergang in Nachbarformen veranschaulicht wird, z. B. der Übergang aus einem Doppelpunkt zur Spitze und von da zum Auftreten zweier benachbarter Wendepunkte.

Besonders lehrreich erscheinen die Schattenbilder der aus einem System von Drahtkurven hergestellten Flächen. Die für das Verständnis der Raumformen so wichtigen Stellen, an denen der Umriß einer Fläche von sichtbaren auf unsichtbare Teile übergehen, wie sie z. B. an der Kreisringfläche auftreten, sind zwar ein beliebter Gegenstand der Konstruktion auf dem Reißbrett, aber keiner, der die Flächenformen nur aus den Darstellungen durch Gipskörper kennt, hat sie je in Natur gesehen. Bei den durchsichtigen Drahtmodellen solcher Flächen werden auch die verdeckten Umrisse sichtbar und jene Übergangsstellen treten in der Projektion sehr deutlich als Spitzen hervor.

Auch das erwähnte Drahtmodell der Wendelfläche ist hier hervorzuheben, da in seinem Schattenbild als Projektionen der Schraubenlinien Zykloiden erscheinen, die von innen nach außen

von der Geraden über die geschweifte zur gespitzten Form übergehen und von da in die verschlungene Form, während sich als Umriß eine gespitzte Zykloide von halber Weite ergibt.[1])

Auch dann, wenn die Modelle nicht zum Projizieren, sondern nur zum Vorzeigen in Hörsaal oder Sammlung bestimmt sind, haben sie vor den gewöhnlich gebrauchten Gipsmodellen dieselben Vorteile, die soeben für das Schattenwerfen hervorgehoben wurden. Denn beim Vorzeigen wird von den Formen des Modells genau das gesehen, was sich beim Schattenwerfen projiziert.

Aber bei der letzten Methode tritt noch ein wichtiger Vorteil hinzu: Während das vorgezeigte Modell für jeden andern Standpunkt eine andre Ansicht bietet, zeigt der Schatten allen Beschauern ein und dasselbe Bild, so wie es dem Auge erscheint, das an die Stelle der Lichtquelle gesetzt wird. Und auch der Einwurf, daß das geschaute Modell körperlich, das projizierte flächenhaft erscheine, ist nicht stichhaltig; denn die dem Schirme näher gelegenen Stäbe oder Fäden des Modells erscheinen schärfer als die ferner gelegenen, und dadurch wird das ganze Bild körperlich. Somit löst diese Methode auch die Aufgabe, es soll die Projektion so eingerichtet werden, daß sie stereoskopisches Schauen gestattet.

Das Schattenwerfen.

Es dürften noch einige Erläuterungen erwünscht sein, wie das Schattenwerfen zweckmäßig ausgeführt wird. Im Unterricht an der technischen Hochschule verwende ich zum Auffangen einen durchscheinenden Schirm und als Lichtquelle eine mit Scheinwerfer versehene elektrische Bogenlampe, die hinter dem Schirme so aufgestellt ist, daß das überflüssige Licht abgeblendet wird. Bei guter Verdunkelung des Hörsaals erzielt man so Schattenbilder, die im ganzen Saale deutlich sichtbar sind.

Wenn auch diese Anordnung des Schattenwerfens da, wo die Einrichtungen dazu einmal vorhanden sind, als die bequemste erscheinen mag, so kann sie doch auch durch andere Anordnungen ersetzt werden, die leichter einzurichten sind. So wird jede Lampe dienlich, wenn man sie etwa mit einer Pappröhre umgibt, die nur durch eine Öffnung das Licht durchläßt. Da es sich empfiehlt, die Lampe möglichst weit vom Schirme zu entfernen, so wird man in vielen Fällen statt der Rückbeleuchtung des Schirmes eine solche von vorn eintreten lassen; man hat dann nur die Lampe

[1]) Da an dem Modell beide Flügel dargestellt sind, kommt dieser Umriß als stetige Kurve heraus, während sich bei Beschränkung auf einen Flügel nur Stücke des Umrisses ergäben.

im Saale seitlich und den Schirm schief zum Beschauer und zur Lampe aufzustellen, damit das Modell den Schatten für den Beschauer nicht deckt [1]). Sonnenlicht ist nicht die schlechteste Lichtquelle für unseren Zweck, und wo keines dieser Mittel vorhanden ist, wird man zu dem Notbehelf greifen, daß man das Modell — je nach seiner Beschaffenheit — an der dunkeln Tafel oder der hellen Wand sich für den Beschauer abheben läßt.

Mathematischer Stoff.

Es erübrigt noch, kurz auf den mathematischen Stoff einzugehen, der in dieser Sammlung dargestellt ist oder noch werden soll. Da für die Projektionslehre auch die Projektion ebener Gebilde von Wichtigkeit ist, bilden diese in der „Sammlung" eine Reihe, die vorläufig regelmäßige Vielecke, Kegelschnitte und von transzendenten Kurven die Sinuslinie enthält und später noch erweitert werden soll. Von *räumlichen ebenflächigen Gebilden* sind eine ganze Anzahl vertreten, die den wichtigen Begriff des *Regelmäßigen* erläutern sollen.

Unter den *Raumkurven* werden außer denen der dritten und vierten Ordnung besonders gewisse transzendente von Bedeutung sein, deren Projektionen wichtige ebene Kurven ergeben. Erschienen sind bis jetzt Fadenmodelle für die Singularitäten der Raumkurven.

Von den *Flächen* werden die der *zweiten Ordnung* stets besondere Berücksichtigung fordern, und ich bringe in einer für das Zeichnen dieser Flächen wichtigen Form die 5 Arten und in zweierlei beweglichen Formen, nämlich als Faden- und Stabmodelle, die geradlinigen Flächen 2. O., sowie Kreisschnitt-Modelle für alle Arten der Flächen 2. O. mit beweglichen Drahtkreisen. Diese dreierlei beweglichen Modelle verdienen, wie ich glaube, durch die Neuheit der Darstellung einige Beachtung. Außer gewissen einfachen Flächen höherer Ordnung finden Dreh- und Schraubenflächen eingehende Berücksichtigung. Wie viel ich von den weiteren im mathematischen Institut der technischen Hochschule zu Darm-

[1]) In dieser immerhin noch unvollkommenen Form verwandte ich zum erstenmale solche Projektionen in einem vom naturwissenschaftlichen Verein zu Halle im Nov. 1892 veranstalteten öffentlichen Vortrag, in dem es sich darum handelte, die ersten Sätze der Perspektive einem nicht mathematisch geschulten Hörerkreis vorzuführen. Dabei mußte der strenge geometrische Beweis der Sätze durch anschauungsmäßiges Erfassen ersetzt werden. In der vorher geschilderten Form führte ich das Schattenwerfen in dem oben erwähnten Vortrage im Jahre 1896 einem größeren Kreise von Mathematikern vor.

stadt ausgeführten Gruppen,[1]) wie z. B. einer solchen über sämtliche Arten der Büschel von Flächen 2. O., später noch herausgeben werde, hängt von dem Interesse ab, das von Fachkreisen meinen Veröffentlichungen entgegengebracht werden wird.

Einheitlichkeit der Sammlung.

So mannigfaltig sich dieser Stoff auch mit der Zeit gestalten kann, so lege ich doch großes Gewicht darauf, daß dieser Sammlung die *Einheitlichkeit* gewahrt bleibe, die sich schon aus der ganzen Entstehung, aus dem festgesteckten Ziel und nicht am wenigsten aus dem Streben nach Einfachheit und Übersichtlichkeit ergeben muß, und die sich auch in den äußerlichen Dingen, wie Größe und Art der Herstellung, wiederspiegeln soll. Gerade in dieser Einheitlichkeit der Ausführung wird man erkennen, daß diese Sammlung nicht von heute auf morgen entstanden, sondern aus einer langjährigen liebevollen Beschäftigung mit dem Gegenstand hervorgegangen ist.

Absatzgebiet.

Es würde mir eine große Genugtuung sein, wenn diejenigen Vertreter der Mathematik an Hochschulen, die sich bisher dem Gebrauch von Modellen gegenüber ablehnend verhielten, durch die voranstehenden Ausführungen bekehrt und zum Anlegen einer Sammlung veranlaßt würden; aber auch den schon bestehenden Sammlungen hoffe ich einiges neue zu bringen. Und da in der letzten Zeit aus den verschiedensten Kreisen der Wunsch immer stärker betont wird, es möge für die Schulung anschaulichen Denkens frühzeitige und reichliche Gelegenheit gegeben werden, so dürften die einfacheren unserer Modelle auch in den Lehranstalten, die zum Studium vorbereiten, sowie auch in den höheren Gewerbeschulen und den technischen Schulen Verwendung finden.

Mitarbeit.

Sollte sich beim Gebrauch der Modelle das Bedürfnis nach Ergänzung oder Verbesserung in der einen oder anderen Richtung herausstellen, so bitte ich mir dies mitzuteilen; auch werde ich Wünsche wegen Einreihung solcher Modelle, die im Vorigen nicht genannt wurden, aber in den beschriebenen Rahmen passen, gerne berücksichtigen, wie ich denn überhaupt jede Art der Beihilfe und Mitarbeit dankbar annehme.

---

[1]) Ein anläßlich des Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg (1904) erschienenes Verzeichnis dieser Modelle kann durch das Mathematische Institut der Technischen Hochschule zu Darmstadt unentgeltlich bezogen werden.

Nr. 2. Zur Projektion einiger ebener Figuren.

Zur I. Reihe der Modelle. Nr. 1, 2, 3, 11, 12, 13, 21.

Von H. WIENER in Darmstadt.

Die Modelle der I. Reihe dienen zur Erläuterung einfacher Projektionssätze; sie werden am besten so verwandt, daß man ihren Schatten auf eine helle Wand wirft[1]), oder daß man sie von einem Hintergrund sich abheben läßt. Am *Quadrat*, am regelmäßigen *Fünfeck* mit seinen Nebenseiten und am regelmäßigen *Sechseck* zeige man den Satz, daß bei Parallelprojektion parallele Geraden wieder parallel werden. Modelle Nr. 1, 2, 3.

Die Eigenschaften der Figur der beiden *Fünfecke* (des gewöhnlichen und des Sternfünfecks), deren innere Linien einander in Abschnitte nach dem goldenen Schnitt zerlegen, finden bei der Konstruktion des regelmäßigen Dodekaeders und Ikosaeders Anwendung.

Das *Kreismodell* dient dazu, bei Parallelprojektion die Eigenschaften der konjugierten Durchmesser und der konjugiert umschriebenen Parallelogramme einer Ellipse zu zeigen. Dreht man das Modell so, daß sich der Kreis stets in sich bewegt[2]), so projiziert sich das Paar senkrechter Durchmesser in alle mögliche konjugierte Durchmesser derselben Ellipse, das umschriebene Quadrat in alle mögliche konjugiert umschriebene Parallelogramme, und diese sind (wegen des unveränderlichen Flächenverhältnisses zwischen Urbild und Bild) sämtlich flächengleich. Sind die beiden konjugierten Durchmesser aufeinander senkrecht und damit Ellipsenachsen, so wird das verschränkt aufgesetzte Quadrat in der Projektion ein konjugiert umschriebener Rhombus. Das Bild der beiden verschränkten Quadrate ist eine für die genaue Konstruktion der Ellipse wichtige Figur. Modell Nr. 11.

[1]) Man vergl. diese Abhandlungen, S. 5.

[2]) Hierzu läßt sich der Kreis mit einem Drehkopf auf eine Achse aufstecken.

Modell Nr. 12. Bei der *Hyperbel* gehen durch Parallelprojektion die Asymptoten in die Asymptoten der Bildhyperbel über; an die Stelle des kunjugiert umschriebenen Parallelogramms der Ellipse tritt hier ein solches, von dem zwei Gegenseiten die Hyperbel berühren, während die Ecken auf den Asymptoten liegen.

Durch Drehen des Modells kann man in der Projektion dem Scheitelwinkelpaar, innerhalb dessen die beiden Hyperbeläste liegen, jede Größe von null bis zum gestreckten Winkel erteilen. Aber man kann auch dem Modelle unendlich viele Lagen geben, so daß dasselbe Asymptotenpaar in der Projektion erscheint, während die Hyperbel selbst innerhalb dieser Asymptoten unendlich viele Gestalten annimmt von einer Grenze äußerster Größe bis zum Zusammenfallen der Scheitel mit dem Mittelpunkt.

Dreht man die rechtwinklige Hyperbel in ihrer Ebene um den Mittelpunkt um einen Rechten, so geht das im Modell dargestellte Quadrat in sich über, und somit geht auch in der Projektion das konjugiert umschriebene Parallelogramm in sich über, die Hyperbel selbst aber in die „konjugierte Hyperbel", die mit der vorigen die Asymptoten und alle konjugiert umschriebenen Parallelogramme gemein hat, diese aber stets in den anderen Seitenpaaren berührt. Auch hier ist die dargestellte Figur für die Konstruktion der Hyperbel von Wichtigkeit[1]). Und Ent-

Modell Nr. 13. sprechendes gilt für die *Parabel* und die mit ihr im Modell dargestellte Figur des Trapezes.

Modell Nr. 21. Die Projektion der *Sinuslinie* kann dazu dienen, den Begriff der affinen Abbildung einer beliebigen Kurve zu erläutern; der Übergang vom rechtwinkligen zum schiefwinkligen Koordinatensystem und die Darstellung der Funktion $y = a \sin x$ in beiden Systemen ist dem Übergang von der Kurve zu ihrem Bilde bei Parallelprojektion gleichbedeutend.

Zugleich liefern diese Bilder der Sinuslinie Kurven, die mannigfache Verwendung in der Kunst gefunden haben, und die wegen der einfachen Konstruktion ihrer Tangenten und Krümmungskreise der geometrischen Behandlung leicht zugänglich sind.

[1]) Man vergleiche hierzu auch das später Ausgeführte, insbesondere die Anmerkung in Nr. 7, I.

Nr. 3. Die fünf regelmäßigen Vielflache PLATONs. Regelmäßigkeit in einer Gruppe.

Zur II. Reihe der Modelle. Nr. 101 bis 105.

Von H. WIENER in Darmstadt.

Nicht allein für den elementaren Unterricht bilden die regelmäßigen Körper einen wichtigen Stoff, sondern auch für die Gruppentheorie, und je mehr in der Mathematik die Begriffe der Abbildung und der Gruppe von Abbildungen an Bedeutung gewinnen, desto mehr wird dies auch mit dem Begriff des Regelmäßigen der Fall sein.

Im Unterricht der darstellenden Geometrie sind die Bilder der regelmäßigen Vielflache schon lange ein beliebter Stoff, und wenn neuerdings die auf ihn verwendbare Zeit durch starke Betonung der für die Technik wichtigen Gebilde beschränkt worden ist, so wird man um so lieber zu dem Mittel greifen, wenigstens durch Schattenwerfen die bei der Projektion auftretenden Formen in kurzen Zügen vorzuführen.

Verschiedenartige Umrisse.

Bei Parallelprojektion kann der Sehstrahl (Lichtstrahl) zweierlei ausgezeichnete Lagen haben: Unendlich viele Lagen, wenn er in eine Fläche, und eine Einzellage, wenn er in eine Kante fällt; bei den Vielflachen, die zum Mittelpunkt spiegelig sind, also bei allen bis auf das Tetraeder, wird der Strahl dann auch in die Gegenfläche bezw. die Gegenkante fallen. Abgesehen aber von diesen Sonderfällen sind unter den unendlich vielen Lagen, die der Sehstrahl zum Vielflach haben kann, diejenigen als wesentlich verschieden zu bezeichnen, bei denen der Umriß verschiedenartige Vielecke aufweist; und unter diesen sind bei senkrecht zum Sehstrahl gestellter Tafel noch die Einzellagen als besondere hervorzuheben, bei denen der Umriß eine regelmäßige Gestalt hat. Nur beim *Würfel* tritt im Bild eine ein-

Modelle Nr. 101 bis 105.

zige Umrißfigur auf, das Sechseck, im besondern als regelmäßiges Sechseck. Das *Tetraeder* zeigt als Umrisse ein Dreieck oder ein Viereck, das *Oktaeder* ein Viereck oder ein Sechseck, das *Dodekaeder* ein Zehneck oder ein Zwölfeck, das *Ikosaeder* ein Sechseck oder ein Achteck oder ein Zehneck und im besonderen können diese Figuren — mit Ausnahme des Zwölfecks beim Dodekaeder und des Achtecks beim Ikosaeder — regelmäßig werden.

Die beiden ausgezeichneten Lagen des Strahles (in der Fläche oder in der Kante) liefern beim Tetraeder ein Dreieck als Umriß; die erste ausgezeichnete Lage (in der Fläche) beim Würfel ein Rechteck, beim Oktaeder ein Parallelogramm, die zweite Lage (in der Kante) beim Würfel ein Quadrat, beim Oktaeder einen Rhombus. Beim Dodekaeder liefert die erste Lage ein Achteck, die zweite ein Sechseck; beim Ikosaeder die Lage des Strahls in einer Fläche ein Achteck oder Sechseck, in zwei mit einer Ecke, aber keiner Kante zusammenstoßenden Flächen, ein Sechseck, und die Lage des Strahls in einer Kante gleichfalls ein Sechseck.

Begriff des Regelmäßigen.

Durch das Projizieren dieser Drahtmodelle auf eine Tafel läßt sich auch die Regelmäßigkeit dieser Vielflache erläutern. Man kann das Modell aus einer Anfangslage herausheben und in solche neue Lagen bringen, daß irgend eine Ecke an die frühere Stelle einer beliebig gewählten anderen kommt, und an dieser Ecke kann noch irgend eine durch diesen Punkt gehende Kante oder Fläche mit jeder anderen Fläche der Ecke zur Deckung gebracht werden, so daß sich das Vielflach in der neuen Lage völlig mit dem in der alten Lage hinzu gedachten deckt. In dieser Eigenschaft aber spricht sich *das Wesen des regelmäßigen geometrischen Gebildes* aus. Auch im Bilde (Schatten) läßt sich durch eine solche Drehung des körperlichen Modells beweisen, daß dieses regelmäßig ist, da bei einer jeden der unendlich vielen möglichen Projektionen ein Decken der gedrehten Lage mit der ursprünglichen eintritt.

Anwendung auf Krystalle.

Der soeben für die Vielflache gegebene Begriff des Regelmäßigen findet bei der Aufstellung aller möglichen Krystallformen eine wichtige Anwendung, indem diese Formen aus *regelmäßigen Punktsystemen* abgeleitet werden. Wie vorhin bei den regelmäßigen Vielflachen die Gruppe aller Drehungen um einen festen Punkt zu grunde lag, so hat man hier von solchen Abbildungen auszugehen, die den ganzen Raum in sich überführen, und es hat sich dabei herausgestellt, daß die Gruppe aller kongruenten

Abbildungen noch durch diejenigen zu ergänzen ist, die den Raum in einen spiegelgleichen überführen [1]).

L. SOHNCKE definiert[2]): „Krystalle — unbegrenzt gedacht — sind regelmäßige unendliche Punktsysteme, d. h. solche, bei denen um jeden Massenpunkt herum die Anordnung der übrigen dieselbe ist, wie um jeden anderen Massenpunkt". Jedes solche Punktsystem bestimmt eine Gruppe (in besonderen Fällen mehrere Gruppen) von Abbildungen, die den Raum kongruent oder spiegelgleich in sich überführen und die Punkte des Systems unter einander vertauschen[3]), und umgekehrt bestimmt jede solche Gruppe regelmäßige Punktsysteme, die man erhält, indem man irgend einen Punkt des Raumes allen Abbildungen der Gruppe unterwirft.

Die Frage nach allen von einander wesentlich verschiedenen regelmäßigen Punktsystemen, also nach allen Krystallformen verschiedener Struktur, führt daher auf die Frage nach allen wesentlich verschiedenen Gruppen von Abbildungen, die den Raum kongruent oder spiegelgleich in sich überführen, vorausgesetzt, daß man sich dabei auf Gruppen diskreter Abbildungen beschränkt.

Dementsprechend ergibt sich überhaupt der Begriff des Regelmäßigen für Punktsysteme als abhängig von der Gruppe der Abbildungen, die man zu grunde legen will, so daß sich mit dieser auch die Gesamtheit der von ihr erzeugten regelmäßigen Gebilde ändert. Beispielsweise wird die Gesamtheit von n Punkten der Ebene für eine Gruppe von Drehungen um einen festen Punkt in der Ebene dann und nur dann regelmäßig sein, wenn sie die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks bildet; nimmt man aber zu dieser Gruppe noch symmetrische Abbildungen der Ebene hinzu, so werden schon die Eckpunkte eines sonst als halbregelmäßig

---

[1]) Diese Auffassung legt CHR. WIENER seiner Theorie der Entstehung der Krystalle zu grunde. („Die Grundzüge der Weltordnung". Leipzig u. Heidelberg, 1863, S. 82 ff.)

[2]) L. SOHNCKE: „Entwickelung einer Theorie der Krystallstruktur". Leipzig 1879, S. 28. Die obige Erklärung wird von SOHNCKE „als einzige zur Begründung seiner Theorie nötige Hypothese" eingeführt. Sie ist ein anderer Ausdruck der von CHR. WIENER a. a. O. gegebenen Definition.

[3]) Wie die Spiegelung fassen wir die Überführung eines räumlichen Systems in ein kongruentes auch als „Abbildung" auf, da es sich hier nur um die Beziehung der Anfangs- auf die Endlage und nicht um eine stetige Folge von Zwischenlagen handelt.

bezeichneten n-Ecks der Bedingung der Regelmäßigkeit genügen.[1])

Die Gruppen der regelmäßigen Vielflache.

Zur Bestimmung der regelmäßigen Vielflache kann man ebenfalls von ihren Gruppen ausgehen, nämlich den Gruppen von Drehungen eines starren räumlichen Systems um einen festen Punkt[2]). Man hat dann ein regelmäßiges Vielflach als ein solches zu definieren, von dem in dieser Gruppe die Ecken ein regelmäßiges Punktsystem, die Kanten und Seiten ein regelmäßiges System von Strahlen und Ebenen bilden. Man erhält hieraus sofort außer den gewöhnlichen (PLATONischen) noch die höheren Vielflache, wie dies in der 5. Abhandlung ausgeführt werden soll. Meist geht man den umgekehrten Weg und denkt sich die gewöhnlichen (PLATONischen) regelmäßigen Vielflache auf irgend eine Art gegeben, entnimmt sie beispielsweise aus der elementaren Stereometrie und stellt dann für jedes die Gruppe aller Drehungen um die Mitte des Vielflaches auf[3]). Dabei ergibt sich bekanntlich das Übereinstimmen der Gruppe des Würfels mit der des Oktaeders, der Gruppe des Dodekaeders mit der des Ikosaeders. Und man erhält so die Tetraedergruppe mit 12 kongruenten Abbildungen, nämlich außer der Identität oder Deckung (Periode 1) $3 + 8$ Abbildungen von den Perioden 2 und 3; bei der Oktaedergruppe ergeben sich 24 kongruente Abbildungen, nämlich $1 + 3 + 6 + 8 + 6$ von den Perioden 1, 2, 2, 3, 4 und endlich bei der Ikosaedergruppe 60 kongruente Abbildungen, nämlich $1 + 15 + 20 + 24$ von den Perioden 1, 2, 3, 5[4]).

---

[1]) Von der SOHNCKEschen Definition geht auch EDMUND HESS in seinem Buche „Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung" (Leipzig 1883) aus. Seine Untersuchungen beziehen sich auf Gruppen von Drehungen und symmetrischen Abbildungen mit Festhaltung eines Punktes.

[2]) P. GORDAN löst die Aufgabe „Alle endlichen Gruppen zu konstruieren, die sich aus linearen Transformationen einer Veränderlichen bilden lassen". Math. Ann. Bd. 17, S. 23 ff. Damit sind auch die oben erwähnten Gruppen von Drehungen unabhängig von geometrischen Betrachtungen bestimmt.

[3]) Auf eine Darstellung dieser Gruppen durch noch einfachere Gebilde, als es die regelmäßigen Körper sind, wird in Nr. 4 dieser Abhandlungen hingewiesen.

[4]) Die Beziehungen zwischen Gruppentheorie und regelmäßigen Vielflachen werden sehr eingehend behandelt in F. KLEINS „Vorlesungen über das Ikosaeder ..." (Leipzig 1884). Die gewöhnlichen regelmäßigen Körper werden in diesem Buche als Orientierungsmittel zum Studium der zugehörigen Gruppen beigezogen. Dabei treten die oben entwickelten Begriffe als wesentlich auf. So wird dort außer der Gruppe der Drehungen noch die „erweiterte Gruppe" eingeführt, die durch Hinzufügen von symmetrischen Abbildungen entsteht. Ferner wird das oben abgeleitete regelmäßige Punktsystem benützt, um daraus „Fundamentalbereiche" zu bilden. Um sich den in diesem Buche enthaltenen umfangreichen geometrischen Stoff anschaulich zu machen, dürften die Drahtmodelle der regelmäßigen Körper wegen ihrer Durchsichtigkeit besonders geeignet sein.

Nr. 4. Regelmäßige Vielstrahlen und geschlossene Spiegelsysteme.

Zur III. Reihe der Modelle. Nr. 115 und 116.

Von H. WIENER in Darmstadt.

Regelmäßige Vielstrahlen.

Unter den regelmäßigen Gebilden sind die regelmäßigen Vielstrahlen im Strahlenbündel nur wenig beachtet worden, und doch sind sie in gewisser Hinsicht einfacher wie die regelmäßigen Vielflache, und da sie auf dieselben Gruppen führen, von derselben Bedeutung. Geht man von diesen als den bekannteren aus, so findet man regelmäßige Vielstrahlen, indem man in einer Seitenfläche eines regelmäßigen Vielflachs irgend einen Punkt wählt, nach ihm aus dem Mittelpunkt des Vielflachs einen Strahl zieht und diesen Strahl allen Drehungen unterwirft, die das Vielflach in sich überführen. Der so gewonnene Vielstrahl enthält im allgemeinen dieselbe Zahl von Strahlen, als die Gruppe Drehungen enthält, und im besonderen verringert sich diese Zahl, wenn der Strahl durch gewisse Drehungen der Gruppe in sich selbst übergeht, also wenn er nach einer Kantenmitte, Ecke oder Seitenmitte gezogen ist. Die so entstandenen Gebilde ordnen sich dem oben abgeleiteten Begriff des Regelmäßigen unter, und sie sind die einzig möglichen regelmäßigen Vielstrahlen im Bündel (abgesehen von den in einem ebenen Büschel enthaltenen), falls man zu ihrer Bestimmung die Gruppe der Drehungen um einen festen Punkt zu Grunde legt. Auch die „erweiterte Gruppe“, die man erhält, wenn man die Spiegelung am Mittelpunkt hinzufügt und sie mit allen Drehungen der Gruppe zusammensetzt, liefert keine neuen regelmäßigen Vielstrahlen, da durch diese Punktspiegelung jeder Strahl in sich übergeht.

Die Oktaeder- und die Ikosaedergruppe ergeben so je 3 besondere regelmäßige Vielstrahlen, während die Tetraedergruppe nur zwei solche liefert, die auch bei der Oktaedergruppe vorkommen.

Es ergeben sich daher die folgenden sechs besonderen Fälle:

6 besondere Fälle.

1. drei zu einander senkrechte Strahlen oder *das Achsenkreuz;* es entsteht aus den Kantenmitten des Tetraeders oder aus den Ecken des Oktaeders oder aus den Seitenmitten des Würfels, indem man diese mit dem Mittelpunkt dieser Vielflache verbindet;

2. der regelmäßige *Vierstrahl;* er entsteht aus den Ecken oder Seitenmitten des Tetraeders oder aus den Seitenmitten des Oktaeders oder aus den Ecken des Würfels;

3. ein regelmäßiger *Sechsstrahl* entsteht aus den Kantenmitten des Oktaeders oder Würfels und

4. ein weiterer regelmäßiger *Sechsstrahl* aus den Ecken des Ikosaeders oder aus den Seitenmitten des Dodekaeders;

5. der regelmäßige *Zehnstrahl* entsteht aus den Ecken des Dodekaeders oder aus den Seitenmitten des Ikosaeders und endlich

6. der regelmäßige *Fünfzehnstrahl* aus den Kantenmitten des Ikosaeders oder des Dodekaeders.

Geschlossene Spiegelsysteme.

Unter diesen zeigen drei noch die besondere Eigenschaft, daß jeder Strahl des Vielstrahls, an irgend einem anderen gespiegelt, wieder einen Strahl des Vielstrahles ergibt; dabei ist unter einer solchen Spiegelung eine Achsenspiegelung (Umwendung um eine Achse oder Drehung um diese Achse um zwei Rechte) verstanden. Ein in dieser Weise bestimmtes System von Spiegelungen wollen wir ein *geschlossenes System von Spiegelungen* nennen und die zugehörigen Spiegelachsen ein *geschlossenes System von Spiegelachsen*[1]). Aus dem Begriff folgt, daß jede Ebene, die durch irgend zwei Spiegelachsen des Systems gelegt ist, einen ebenen regelmäßigen Vielstrahl mit dem System gemein haben muß, und es ergeben sich dabei Zwei-, Drei-, Vier- und Fünfstrahlen als möglich, d. h. solche bei denen zwei benachbarte Strahlen $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ und $^1/_5$ eines gestreckten Winkels mit einander bilden.

Aus drei der regelmäßigen Vielstrahlen im Bündel, nämlich aus 1, 3 und 6, lassen sich nun vier solcher geschlossenen Spiegelsysteme ableiten:

4 Fälle.

I. Das *Achsenkreuz,* also drei zu einander senkrechte Geraden.

II. Ein *Sechsstrahl,* enthaltend drei Paare senkrechter Strahlen, derart, daß jede durch zwei nicht senkrechte Strahlen gelegte Ebene einen regelmäßigen Dreistrahl mit dem System der 6 Strahlen gemein hat. Das System enthält von ebenen regelmäßigen Vielstrahlen die 3 Paare und 4 Dreistrahlen. (Modell Nr. 115.)

---

[1]) Vgl. DYCKS Katalog, Nachtrag, S. 54.

III. Ein *Neunstrahl,* bestehend aus den 3 Strahlenpaaren des vorigen Systems, deren jedem ein weiterer Strahl hinzugefügt ist, nämlich der auf beiden Strahlen des Paares senkrecht stehende. Die 9 Strahlen ordnen sich zu drei Achsenkreuzen und auch die drei neuen Strahlen bilden unter sich ein solches. Das System enthält von ebenen regelmäßigen Vielstrahlen 3 Paare, 3 Vierstrahlen und 4 Dreistrahlen.

Dieser Neunstrahl ist *nicht regelmäßig,* sondern stellt die Vereinigung der beiden vorigen regelmäßigen Systeme dar. (Ein besonderes Modell ist nicht nötig, da man sich an dem vorigen Modell zu dem Sechsstrahl II leicht das fehlende Achsenkreuz hinzudenken kann.)

IV. Ein *Fünfzehnstrahl,* bestehend aus fünf Achsenkreuzen. Von ebenen regelmäßigen Vielstrahlen sind in dem System enthalten: 15 Paare, 10 Dreistrahlen, 6 Fünfstrahlen. (Modell Nr. 116.)

Erzeugung der Gruppen

Geht man von diesen vier Arten geschlossener Spiegelsysteme aus, so kann man von da leicht den Zusammenhang mit den Gruppen von Drehungen um einen festen Punkt herstellen. Bekanntlich kann nämlich die Folge der Spiegelungen an zwei sich schneidenden Achsen ersetzt werden durch eine Drehung, deren Achse jene beiden senkrecht trifft, und deren Winkel dem doppelten Winkel jener Achsen gleichkommt. Auf diese Weise werden dadurch, daß man die beiden Achsen auf alle Arten aus einem ebenen regelmäßigen n-Strahle entnimmt, genau n Drehungen erzeugt, die eine zyklische Gruppe bilden; und es entsteht dabei jedesmal dieselbe Drehung, wenn die Achsen gleiche Winkel im gleichen Sinne einschließen, während die Deckung (Identität) durch das Zusammenfallen der beiden Spiegelachsen bedingt ist.

Nun kann man, wie leicht ersichtlich, *aus den drei letzten geschlossenen Spiegelsystemen genau die Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaedergruppe erzeugen, indem man in jedem dieser Systeme auf alle möglichen Weisen je zwei Spiegelungen des Systems zu einer Drehung zusammensetzt.* Und auf dieselbe Art erhält man aus dem ersten System drei Drehungen, die als Umwendungen allerdings kürzer durch je eine der Spiegelachsen dargestellt werden könnten. *Man hat so eine einheitliche Entstehungsart gewonnen für alle vier möglichen Gruppen von Drehungen um einen festen Punkt,* die eine endliche Anzahl von Drehungen enthalten und nicht eine einzige Drehachse haben. In der folgenden Abhandlung wird auf diese Beziehungen ausführlicher eingegangen werden.

Dem gegenüber hat die gewöhnliche Darstellung dieser Gruppen aus den regelmäßigen Vielflachen zwei Nachteile, da erstens nicht zu jeder unserer Gruppen ein regelmäßiges Vielflach gehört (man müßte denn das dreifach rechtwinklige Dreikant hinzunehmen), und da zweitens zu den beiden letzten Gruppen je zwei regelmäßige Vielflache gehören, ja bei Hinzurechnung der höheren Vielflache noch mehr.

Anmerkung. Diese dritte Modellgruppe habe ich seiner Zeit für das mathematische Seminar der Universität Halle verfertigen lassen und im Jahre 1893 in München und Chicago ausgestellt. Man vergleiche den Katalog der mathematischen Ausstellung, Deutsche Unterrichts-Ausstellung in Chicago 1893.

Zur Zusammensetzung von Spiegelungen zu Drehungen vergleiche man meine in den Leipziger Berichten in den Jahren 1890—1893 veröffentlichten Arbeiten.

Nr. 5. Die regelmäßigen Vielflache, abgeleitet aus ihrer Gruppe.

Von H. WIENER in Darmstadt.

Einleitung.

Von regelmäßigen Vielflachen, d. h. solchen, deren Seiten aus regelmäßigen Vielecken und deren Ecken aus regelmäßigen Vielkanten gebildet sind, hat man lange Zeit hindurch nur die fünf gekannt, die PLATON zugeschrieben werden. KEPLER[1]) hat ihnen zwei neue hinzugefügt, indem er als regelmäßige Fünfecke auch die Sternfünfecke gelten läßt, die aus den gewöhnlichen dadurch entstehen, daß man jede Ecke nicht mit den benachbarten, sondern mit den nächst folgenden verbindet; und POINSOT[2]) hat ihre Zahl noch um zwei vermehrt, indem er überdies an den Ecken Sternvielkante zuläßt, die den Sternvielecken entsprechend definiert sind.

Daß die so entstandenen neun Vielflache bei dieser Erweiterung die einzig möglichen sind, hat CAUCHY[3]) zuerst bewiesen; er leitet sie aus dem Satze her, daß jedem der neuen Vielflache — die als solche höherer Art[4]) bezeichnet werden — ein gewöhnliches (PLATONisches) zugrunde liegt, aus dem es durch *Erweiterung* der Kanten oder der Seiten oder beider entsteht (Methode des Erweiterns und Schneidens); und BERTRAND[5]) hat diesem

[1]) „Harmonia mundi", Gesamtwerke von KEPLER, herausgegeben von Frisch, Bd. V.

[2]) POINSOT, Journ. de l'école polyt. Heft 10 (1810), S. 16.

[3]) CAUCHY, ebenda, Heft 16 (1813), S. 68.

[4]) Die gewöhnlichen Fünfecke heißen von der ersten Art, die Sternfünfecke von der zweiten Art. Ueber die Bestimmung der „Art" eines beliebigen Vielecks vergleiche man CHR. WIENERS Schrift „Ueber Vielecke und Vielflache", Leipzig, B. G. TEUBNER, 1864, Nr. 7 (S. 3). Dort ist auch für die „Art" der Vielflache eine Definition gegeben, die gegenüber der früher von POINSOT gebrauchten den Vorteil hat, daß dual sich entsprechende Vielflache dieselbe Art besitzen.

[5]) BERTRAND, Comptes rendues, Bd. 46 (1858), S. 79.

Beweise einen dual entsprechenden an die Seite gesetzt, den er darauf gründet, daß die Ecken eines jeden regelmäßigen Vielflachs auch die eines gewöhnlichen sind (Methode des Verbindens der Ecken zu neuen Kanten und Seiten) [1]).

Es war ursprünglich meine Absicht, auf Grundlage dieser Arbeiten und im Anschluß an CHR. WIENERS Darstellung, die höheren Vielflache abzuleiten. Aber die Aufgabe steht im engsten Zusammenhange mit der Gruppentheorie [2]), und vom Standpunkte dieser aus betrachtet, erweist es sich als nicht angängig, die PLATONischen Vielflache als gegeben anzunehmen. Denn unter diesen läßt sich z. B. das Dodekaeder von dem KEPLERschen Vielflach, das gleichfalls regelmäßige Fünfecke (nämlich Sternfünfecke) zu Seiten hat und an jeder Ecke drei solcher Seiten zu einem regelmäßigen Dreikant vereinigt, nur *lagengeometrisch* [3]), nicht aber *gruppentheoretisch* unterscheiden.

Und ebenso steht dem gewöhnlichen Ikosaeder ein POINSOTsches gegenüber, während die beiden letzten Vielflache dieser Gruppe überhaupt kein entsprechendes PLATONisches haben, da hier ein KEPLERsches und ein POINSOTsches einander gegenüberstehen, die beide regelmäßige Fünfecke zu Seiten und Fünfkante zu Ecken haben [4]).

Noch aus einem zweiten Grunde ist die gewöhnliche Definition der regelmäßigen Vielflache zu verwerfen, weil sie nämlich für zerfallende Vielflache völlig versagt, während es gerade als das Zeichen einer brauchbaren Definition gilt, daß sie die Sonderfälle umfaßt.

Um ein regelmäßiges Vielflach aus der Gruppe von Drehungen zu definieren, ist nicht nur zu fordern, daß seine *Eckpunkte* ein in der Gruppe *regelmäßiges System* bilden (vgl. S. 13), sondern daß dies auch für seine *Kanten* und *Seiten* zutrifft. Die durch diese Forderung getrennten dreierlei Stücke müssen dann zu einem Vielflach zusammengefügt werden, und hierfür ist nötig, zu unter-

---

[1]) Ueber die Entwickelung der Lehre von den regelmäßigen Vielflachen vergleiche man CHR. WIENER a. a. O. S. 23 und Z. f. M. u. Ph. 12 Jahrg. (1867) S. 174.

[2]) Man vergl. Nr. 3 dieser Abhandlungen, S. 14.

[3]) CHR. WIENER gibt a. a. O. S. 20 lagengeometrische Voraussetzungen an, die zur Charakterisierung der gewöhnlichen Vielflache nötig sind.

[4]) Diese Paarung der Gebilde wird gruppentheoretisch als contragredienter holoedrischer Isomorphismus bezeichnet. Dieser ist für die Ikosaedergruppe untersucht von F. KLEIN, „Vorlesungen über das Ikosaeder" S. 232 ff. Die Transformationen, die die eine Gruppe in die kontragrediente überführen, behandelt O. FISCHER in seiner Inaug.-Diss. Leipzig 1885.

suchen, *wie sich überhaupt ein Vielflach aus Ecken, Kanten und Seiten bilden läßt* (I. Abschnitt), *und wie dies insbesondere bei den regelmäßigen Vielflachen durch die Gruppen bewirkt wird* (II. Abschnitt). Dabei stellt es sich heraus (im III. Abschnitt), daß es ohne eine einschränkende Bedingung nicht immer möglich ist, eine Seite $ABC\ldots$ durch eine Drehung der Gruppe in sich zu drehen, und dabei AB dem Sinne nach in BC gelangen zu lassen, und daß sich dann die Seite auch nicht als ebenes Vieleck durch die Gruppe erzeugen läßt. Damit entsteht die Frage, ob überhaupt die Ebenheit der Seiten eine unerläßliche Bedingung für die Vielflache sei. Diese Frage ist zu verneinen, da man imstande ist, regelmäßige Vielflache auch mit *„windschiefen Seiten"* zu konstruieren, eine Tatsache, die es wohl ermöglichen wird, die Betrachtungen der vorliegenden Arbeit auf andre, nicht geometrisch definierte Gruppen auszudehnen. Hierbei muß allerdings ein möglichst abstrakter Begriff des Vielflachs vorausgesetzt werden, und aus diesem Grunde ist (im I. Abschnitt) durch reines Verknüpfen gegebener Stücke ein *„begriffliches Vielflach"* eingeführt.

Die vorhin erwähnte Einschränkung besteht darin, *daß man Ueberführbarkeit (Transitivität) nicht nur für alle Eckpunkte, sondern für alle an diesen liegenden Vielkante fordert,* und je nachdem man diese Bedingung hinzufügt oder wegläßt, erhält man (wenigstens in der Ikosaedergruppe) eine verschiedene Anzahl von Vielflachen, die als regelmäßig anzusehen sind (IV. Abschnitt). Gilt die Einschränkung, so besitzt jedes Vielflach *Kantenumwendungen,* und es gibt stets zwei *„harmonische Drehungen"* [1]), die eine Kante in eine Nachbarkante überführen, nämlich eine, die die Ecke erzeugt, an der beide Kanten liegen, d. i. eine sogenannte *eckenbildende Drehung,* und eine andere, die die Seite erzeugt, in der beide Kanten liegen, eine *seitenbildende Drehung.* Verzichtet man auf jene Einschränkung, so gibt es außer dem eben erwähnten, noch einen zweiten Fall, der solche regelmäßige Vielflache umfaßt, die keine Kantenumwendungen und nur eine der beiden erwähnten Drehungen besitzen. Dies bewirkt im letzten Falle, daß in der Ikosaedergruppe drei zerfallende Vielflache als regelmäßig gelten (5 Würfel, 5 Oktaeder und 10 Tetraeder), die im ersten Falle ausgeschlossen

[1]) Die harmonischen Verwandtschaften hat C. STEPHANOS für Projektivitäten aufgestellt. Math. Ann. 22 (1883) S. 320. Sie werden dort „konjugiert" und von C. SEGRE, J. f. Math. 100 (1887), der sie bei der Aufstellung der Büschel von Projektivitäten zu grunde legt, „harmonisch" genannt.

sind, und nur bei der „erweiterten Ikosaedergruppe“ wieder hinzukommen. Dagegen bewirkt die Forderung der Ueberführbarkeit der Vielkante, daß *zerfallende Vielflache nur bei zusammengesetzten Gruppen* sich einstellen, während der Ikosaedergruppe, die *einfach* ist, *nur nicht-zerfallende Vielflache* eigentümlich sind.

Die während der Untersuchung eingeführten Erweiterungen und Einschränkungen fügen sich schließlich zu einer *Definition* zusammen, die der bisher gebräuchlichen möglichst nahe kommt. *Danach heißt ein Vielflach in einer Gruppe von Drehungen regelmäßig, wenn alle Seiten ein in der Gruppe regelmäßiges System bilden, und jede Seite aus einem in der Gruppe regelmäßigen Vieleck besteht,* und der Ausschluß der „entarteten Vielflache“ bleibt als einzige Einschränkung übrig.

Die Ableitung der möglichen Vielflache aus den Gruppen setzt voraus, daß man die *möglichen Gruppen* unabhängig von den Vielflachen bestimmt. Nun haben Arbeiten von H. A. SCHWARZ[1]) und F. KLEIN[2]) diese Aufgabe mit funktionentheoretischen Fragen in Verbindung gebracht, und dadurch wurde P. GORDAN[3]) veranlaßt, die möglichen Gruppen abstrakt herzuleiten; von derselben Fragestellung ausgehend, hat dann C. JORDAN[4]) noch eine andre Ableitung gegeben. In der vorliegenden Abhandlung wird die Aufgabe geometrisch so weit geführt, daß der Anschluß an die Arbeiten GORDANS und JORDANS ermöglicht wird.

Geometrisch läßt sich jede der drei in Betracht kommenden Gruppen (Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaedergruppe) am über-

---

[1]) H. A. SCHWARZ kommt in einem größeren die Theorie der hypergeometrischen Reihe behandelnden Aufsatze J. f. M. 75 (1873) S. 321 u. ff. auf die Aufgabe: „Alle sphärischen Dreiecke zu finden, deren symmetrische und kongruente Wiederholungen auf der Kugeloberfläche nur zu einer endlichen Anzahl von der Lage nach verschiedenen sphärischen Dreiecken Anlaß geben“ und stellt den Zusammenhang dieser Aufgabe mit der Frage nach den regelmäßigen Körpern fest; dabei bezieht er sich auf einen ohne Beweis von J. STEINER mitgeteilten Satz. Man vgl. J. STEINER, Ges. W. II, S. 90, 91 und S. 305, sowie die Mitteilung aus dem Nachlaß, Ges. W. II (1882) S. 735—738.

[2]) F. KLEIN, Math. Ann. 9 (1876) S. 183. „Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst.“ Hier wird auf das Ergebnis der in der vorigen Fußnote aufgeführten Arbeit Bezug genommen.

[3]) P. GORDAN, Math. Ann. 12 (1877) S. 23. „Über endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen.“

Hierher gehört auch die folgende Arbeit: L. FUCHS, J. f. Math. 85 (1878) S. 1. „Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen.“ Zweite Abhandlung.

[4]) C. JORDAN, J. f. Math. 84 (1878) S. 89. „Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébr,que“ im I. Kapitel.

sichtlichsten durch ein *geschlossenes Spiegelsystem* darstellen, das entweder die in der Gruppe vorkommenden „erzeugenden Spiegelungen" (Umwendungen) oder „Hilfsspiegelungen" enthält, d. h. solche, aus denen sich die Drehungen der Gruppe zusammensetzen.

Die *Ableitung der Vielflache aus der Gruppe* gelingt dann in einfachster Weise mittels des *Satzes,* daß man irgend eine involutorische Drehung der Gruppe als Kantenumwendung und eine beliebige nicht-involutorische Drehung, die jene involutorische nicht in sich überführt, als benachbarte seitenbildende (oder als eckenbildende) Drehung wählen kann, und daß hierdurch das Vielflach seiner Gestalt nach eindeutig bestimmt ist (V. Abschnitt); die *Dualität* ergibt sich, indem man die gewählte Drehung das eine Mal zur Eckenbildung, das andere Mal zur Seitenbildung verwendet. In der Ikosaedergruppe erhält dieser Satz noch eine vereinfachte Gestalt. Die Achsen der 15 in der Gruppe vorkommenden Umwendungen zerfallen in 5 Achsenkreuze (vgl. S. 16), und zu irgend einem Achsenkreuz hat jede der 12 übrigen Achsen eine und dieselbe Lage; sie bildet nämlich mit den 3 Achsen des Kreuzes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{2}{5}$ eines gestreckten Winkels. Die Folgen der Spiegelung an dieser vierten Achse und der Spiegelung an je einer Achse des Kreuzes bilden dann genau die drei in der Gruppe vorkommenden nicht gleichberechtigten (d. h. hier nicht kongruenten)[1]) und nicht involutorischen Drehungen. Setzt man aber die Spiegelung an der vierten Achse einmal mit der Spiegelung an einer Achse des Kreuzes und ein andermal mit der Spiegelung an einer zweiten Achse des Kreuzes zusammen, so ergeben sich zwei harmonische Drehungen, und von ihnen kann die eine als eckenbildend, die andere als seitenbildend gewählt werden. So erhält man mit einem Schlag drei Paare von Vielflachen, von denen die beiden eines jeden Paares einander dual entsprechen[2]). Und aus den drei soeben angeschriebenen Winkeln ergibt sich sofort die oben erwähnte Verteilung von regelmäßigen Dreiecken, gewöhnlichen Fünfecken und

[1]) Kongruent sind zwei Drehungen, wenn sie durch irgend eine Drehung des starren Raumes in einander übergeführt werden können, gleichberechtigt in einer Gruppe, wenn dies durch eine Drehung der Gruppe möglich ist. So ist in der Raumgeometrie eine Drehung mit ihrer Umkehrung stets kongruent, aber ihr gleichberechtigt nur in solchen Gruppen, in denen Spiegelungen vorhanden sind, die die Drehung umkehren. Deshalb sind die nicht involutorischen Drehungen in der Tetraedergruppe ihren Umkehrungen nicht gleichberechtigt, in der Oktaeder- und Ikosaedergruppe gleichberechtigt.

[2]) Da die in diesem Absatz angeführten Sätze sich weder bei F. KLEIN, noch bei O. FISCHER a. a. O. vorfinden, nehme ich an, daß sie neu sind.

Sternfünfecken und den entsprechenden Drei- und Fünfkanten auf die 6 (PLATONischen, KEPLERschen und POINSOTschen) Vielflache der Ikosaedergruppe.

Im Vorstehenden habe ich versucht, zu schildern, wie die scheinbar so einfache und selbstverständliche Forderung, die regelmäßigen Vielflache aus ihrer Gruppe abzuleiten, auf eine Reihe nicht unwichtiger Vorfragen führt; da diese sich erst bei der Ausarbeitung aufdrängten, und die nachträgliche Einfügung der in den ersten Abschnitten enthaltenen abstrakten Betrachtungen eine mehrmalige Umarbeitung des späteren Stoffes nötig machte, so hat sich die Fertigstellung dieser Arbeit und damit die Herausgabe des ersten Heftes der „Abhandlungen" sehr verzögert, zumal mir dafür nur ein beschränkter Teil meiner Zeit zur Verfügung stand.

Erster Teil: Aufbau der regelmäßigen Vielflache.

I. Das begriffliche Vielflach.

Um die Untersuchungsweisen dieser Arbeit auf beliebige abstrakte Gruppen anwendbar zu machen, führen wir den Begriff des Vielflachs auf Verknüpfungen gegebener Grundstücke (Elemente) zurück. Dadurch behält einerseits der Begriff des Vielflachs auch bei ebenen Gebilden, ja selbst in der geraden Linie (allgemein in zwei- oder eindimensionalen Gebieten) seine Bedeutung bei, während man sonst in diesen Fällen von entarteten Vielflachen spricht, andererseits werden unsere Betrachtungen erweiterungsfähig auf höhere, sonst als vier- oder mehrdimensional bezeichnete Vielflache, ohne daß wir das Gebiet des dreidimensionalen Raumes verlassen müßten.

Bildung der Seite.

Wir denken uns zunächst als Grundstücke eine endliche Anzahl von Punkten gegeben, die wir, weil sie später zu Ecken ausgebildet werden, als *Eckpunkte* bezeichnen, und gewinnen aus ihnen eine neue Art von Stücken, die *„Kanten"*, indem wir als Kante das Ergebnis der Verknüpfung zweier Eckpunkte bezeichnen. Ist eines der gegebenen Stücke (Eckpunkte) mit zwei anderen durch zwei der neuen Stücke (Kanten) verknüpft, so betrachten wir auch diese beiden neuen Stücke als verknüpft durch das ihnen gemeinsame erste Stück (den Eckpunkt). Um ein weiteres neues Stück, das dem geometrischen Begriff der *Seite* (Seitenfläche) entspricht, zu gewinnen, definieren wir ein aus zweierlei mit einander verknüpften Stücken erzeugtes Gebilde, die *„geschlossene Kette"*. Sie besteht aus n

der Reihe nach mit einander verknüpften Stücken der einen Art (Eckpunkten) $E_1, E_2, \ldots E_{n-1}, E_n$ und aus den sie verknüpfenden Stücken der anderen Art (Kanten) $k_{12}, k_{23}, \ldots k_{n-1,n}, k_{n,1}$, wobei die genannten Stücke E so aus allen ausgewählt seien, daß jedes mit zwei und nicht mehr der ausgewählten Stücke E verknüpft sei, nämlich E_1 durch k_{12} mit E_2, dieses durch k_{23} noch mit E_3 u. s. f. und endlich E_n durch $k_{n,1}$ mit E_1.

Die Kettenbildung gilt für irgend zweierlei Arten von verknüpften und verknüpfenden Stücken; auf geometrische Eckpunkte und Kanten angewandt, liefert sie i. a. ein *windschiefes Vieleck,* und es sind gewisse Bedingungen zu erfüllen, damit daraus ein ebenes Vieleck werde. Bei den regelmäßigen Vielflachen ordnet in den wichtigeren Fällen die erzeugende Gruppe selbst die Kette in einer Ebene an, es wird jedoch gerade die Berücksichtigung der „windschiefen Kette" den Gang späterer Untersuchungen bestimmen.

Bildung des Vielkants.

Das so gewonnene Vieleck führen wir als neues Stück des zu bildenden Vielflachs ein und bezeichnen es dann als *„Seite"* [1]) des Vielflachs. Um nun solche Seiten zu einem geschlossenen Vielflach zusammenzufügen, stellen wir dieser „Seiten-bildenden" Kette noch eine zweite, die „Ecken- oder Vielkant-bildende" gegenüber.

Hierzu nehmen wir an, daß

a) jeder Eckpunkt wenigstens mit drei andern Eckpunkten durch Kanten verknüpft sei, und daß

b) jede Kante bei der Bildung von zwei und nicht mehr Vielecken verwendet sei. Wir fügen ferner die Einschränkung hinzu, daß

c) durch je zwei an einem Eckpunkte zu einem Vieleck verknüpfte Kanten nur ein einziges Vieleck gehe. Dann gilt der

Satz I. *An jedem Eckpunkte bilden Kanten und Vielecke (Seiten) eine oder mehrere geschlossene Ketten.*

---

[1]) Während in der Ebene Linien, insbesondere Geraden als „Seiten" eines Vielecks auftreten, müssen im Raume die Raum teilenden Gebilde, also Flächen, insbesondere Ebenen als Seiten bezeichnet werden. Die „windschiefen Seiten" sind dann im übertragenen Sinne zu nehmen, es sei aber bemerkt, daß auch einem geschlossenen, gebrochenen Linienzug eine gewisse Stellung und Flächengröße zukommt, die durch eine der Streckenaddition entsprechende „Flächenaddition" gewonnen wird.

Sind nämlich (in anderer Bezeichnung, wie früher) k_1, k_2, . . . k_{m-1}, k_m die m Kanten, die einen gegebenen Eckpunkt E mit anderen Eckpunkten verknüpfen, so gehen nach b) durch jede dieser Kanten zwei Vielecke, und jedes dieser Vielecke enthält an E infolge der Kettenbildung des Vielecks zwei Kanten, also gibt es an E ebenso viele Kanten als Vielecke. Liegt dabei die Kante k_1 z. B. im Vieleck (der Fläche) F_{12}, das nach c) durch k_1 und k_2 bestimmt ist, und k_2 in F_{23}, das durch k_2 und k_3 bestimmt ist, so sagen wir wieder, an E sei k_1 mit k_2 durch F_{12}, und dies mit F_{23} durch k_2 verknüpft. Es ist dann jede Kante mit zwei und nur zwei anderen durch eine Seite verknüpft und damit erhält man von einer Kante in einer Richtung der Verknüpfung weiterschreitend eine Kette, die entweder alle (in endlicher Zahl vorausgesetzten) Kanten erschöpft und dann zur Ausgangskante zurückkehrt, oder dies schon vorher tut. Im letzteren Falle kann man aus den übrigbleibenden Kanten und ihren verknüpfenden Seiten eine zweite Kette bilden, u. s. f. bis alle Kanten erschöpft sind.

Das hierdurch entstandene neue Gebilde bezeichnen wir als ein *„Vielkant"*.

Das Vielflach.

Schließlich nehmen wir an, daß an jedem der gegebenen Eckpunkte unter denselben Voraussetzungen, wie an E ein Vielkant gebildet sei. *Dann heißt die Gesamtheit der so verknüpften Eckpunkte, Kanten und Seiten ein Vielflach.* Sind diese Stücke Punkte, Geraden oder Abschnitte von ihnen u. s. f., so ist das Vielflach ein *geometrisches,* denkt man sich aber abstrakte Gebilde als Stücke, so nennen wir es ein *begriffliches Vielflach.*

In einem Vielflach heißen zwei Eckpunkte oder zwei Seiten *benachbart,* wenn sie durch eine Kante verknüpft sind, dagegen sollen zwei Kanten nur dann benachbart heißen, wenn sie gleichzeitig durch einen Eckpunkt und durch eine Seite verknüpft sind; jede Kante hat also an jedem der beiden Eckpunkte, die sie verknüpft, nur zwei Nachbarkanten.

Hat ein Vielflach lauter Eckpunkte, Kanten und Seiten, die mit solchen eines anderen Vielflachs zusammenfallen, ohne daß dies auch umgekehrt gilt, und sind irgend zwei Nachbarstücke des ersten auch im zweiten benachbart, so heißt das zweite Vielflach *zerfallend* und das erste ein *Teil* von ihm. Die Kanten des zweiten Vielflachs, die im ersten nicht vorkommen, zusammen mit den Eckpunkten und Seiten, die sie verknüpfen, heißt dann der ergänzende Teil des zweiten; jeder Teil kann wieder in Teile zerfallen.

Anmerkung. Als Beispiel eines zerfallenden Vielflachs mögen die fünf einem Dodekaeder eingeschriebenen Würfel dienen, deren Gesamtheit, wie wir sehen werden, in gewissem Sinne ein regelmäßiges Vielflach bildet; in ihm stoßen an jeder Ecke zwei Dreikante zusammen. Das dazu duale Vielflach, aus fünf einem Ikosaeder umschriebenen Oktaedern bestehend, zeigt in jeder Seite zwei regelmäßige Dreiecke und endlich hat die Gesamtheit der zehn einem Dodekaeder eingeschriebenen (und gleichzeitig einem Ikosaeder umschriebenen) Tetraeder an jeder Ecke zwei Dreikante und in jeder Seite zwei Dreiecke.

Das Vielzell.

Es mag hier noch gezeigt werden, in welcher Weise diese Bildungen fortgesetzt werden können, wenn auch im folgenden von diesen Erweiterungen kein Gebrauch gemacht wird.

Wir führen das vorhin gebildete Vielflach als neues Stück ein und bezeichnen es dann als eine „Zelle“, während wir das daraus zusammengesetzte neue Gebilde etwa ein „Vielzell“ nennen können. Wir nehmen dann an, daß durch Verknüpfung einer gegebenen Anzahl von Stücken erster Art (Eckpunkten) solche zweiter Art (Kanten), dritter Art (Seiten) und vierter Art (Zellen) gebildet seien, in der Weise, daß

1) an jedem Eckpunkt wenigstens vier Zellen und
2) an jeder Kante wenigstens drei Zellen vorkommen, und daß
3) an jeder Seite zwei und nur zwei Zellen zusammenstoßen.

Dann beweisen wir den

Satz IIa. *An jedem Eckpunkte eines Vielzells schließen sich die mit ihm verknüpften Kanten, Seiten und Zellen zu einem oder mehreren begrifflichen Vielflachen zusammen.*

Greift man nämlich irgend eine der mit dem betrachteten Eckpunkte E verknüpften Zellen heraus, so sind in ihr an E mittels der „Eckenbildung des Vielflachs“ (Satz I.) die Kanten und Seiten zu einer „Kette“ (oder zu mehreren) verknüpft; diese Ketten, von denen jede dem Eckpunkte E benachbarte Zelle eine einzige liefert, führen wir als Stücke der dritten Art (den Seiten der Vielflache entsprechend) ein, während die Kanten und Seiten als Stücke erster und zweiter Art gelten (also den Ecken und Kanten der Vielflache entsprechen). Da jede Seite in jeder dieser Zellen nur einmal vorkommt, aber jede Seite zwei Zellen verknüpft, so haben die Seiten die früher von den Stücken zweiter Art verlangte Eigenschaft, zwei und nur zwei Stücke dritter Art (früher Seiten, hier Ketten) zu verknüpfen; außerdem verknüpft jede dieser Seiten zwei und nur zwei Stücke

erster Art (hier Kanten) und damit sind die Voraussetzungen zur Bildung eines begrifflichen Vielflachs an E erfüllt, und der Satz ist bewiesen.

Die Bildung der Vielkante (Eckenbildung), die früher (Satz I.) durch Verknüpfung der Stücke zweiter und dritter Art bewirkt wurde, die einem Stücke erster Art (einem Eckpunkte) benachbart waren, führt hier zu dem

Satz IIb. *An jeder Kante eines Vielzells (als einem Stück erster Art) bilden die mit ihr verknüpften Seiten (Stücke zweiter Art) und Zellen (Stücke dritter Art) eine oder mehrere Ketten.*

Die Modelle von V. SCHLEGEL, die als Projektionen von regelmäßigen vierdimensionalen Vielflachen gedacht sind, stellen in unserm Raume solche — allerdings nicht regelmäßige — Vielzellen dar.

II. Erste und zweite Definition des regelmäßigen Vielflachs aus der Gruppe.

1. und 2. Def. ***Definition.*** *Ein räumliches Vielflach nennen wir regelmäßig, wenn es eine Gruppe von einer endlichen Anzahl von Drehungen*[1] *gibt, in der*

α) alle Ecken, β) alle Kanten, γ) alle Seiten

des Vielflachs regelmäßige Systeme bilden.

Dabei bezeichnen wir ein System von irgendwelchen Stücken in einer Gruppe (in unserem Falle von Drehungen) als regelmäßig[2]*, wenn*

a) jede Drehung der Gruppe jedes Stück des Systems wieder in ein solches überführt, und wenn

b) jedes Stück des Systems in jedes andere durch wenigstens eine Drehung der Gruppe übergeführt wird.[3])

Unter „Ecken" sollen *vorläufig* die Eckpunkte verstanden werden, es wird sich jedoch als wünschenswert erweisen, dem Worte auch eine andere Bedeutung unterlegen zu können, so daß eigentlich *zwei Definitionen* in der obigen enthalten siud.

---

[1]) Unter „Drehung" ist hier nur eine Beziehung der Anfangs- zur Endlage verstanden unter Ausschaltung der als unwesentlich angesehenen Zwischenlagen, also nicht eine stetige Folge von Lagen, sondern eine „Abbildung" der Anfangs- auf die Endlage.

[2]) Man vergleiche die Ausführungen über die „Regelmäßigkeit in einer Gruppe" in Nr. 3 dieser Abhandlungen (S. 12—14).

[3]) Diese Eigenschaft wird in der Gruppentheorie „Transitivität" genannt.

Von den genannten Gruppen berücksichtigen wir nur diejenigen, die nicht schon bei der Kongruenz oder Symmetrie ebener Figuren vorkommen, d. h. wir sehen von den zyklischen Gruppen und den Doppelpyramidengruppen ab und betrachten nur die dem Raume eigentümlichen, d. h. die Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaedergruppe.

Anmerkung. Daß sich die sechs Forderungen a α) bis b γ) nicht widersprechen, zeigt das Beispiel der PLATONischen Vielflache; daß man keine von ihnen entbehren kann, ohne gegen den landläufigen Begriff des regelmäßigen Vielflachs zu verstoßen, mag durch folgende Beispiele erläutert werden. Beim Aufgeben der Forderung b) würde die Gesamtheit zweier ähnlichen regelmäßigen Vielflache, die von ihrem Mittelpunkte aus gesehen ähnlich liegen, als ein regelmäßiges Vielflach gelten. Dabei genügt α) nicht, denn verzichtete man auf β), so würden vier Punkte, die in der Gruppe des Achsenkreuzes ein regelmäßiges Punktsystem bestimmen, mit ihren Verbindungsgeraden und -Ebenen als ein regelmäßiges Tetraeder bezeichnet werden, während doch nur je zwei Gegenkanten einander gleich sind. Fügt man β) hinzu, so hat dies zur Folge, daß die Gruppe des Achsenkreuzes zu keinem regelmäßigen Vielflache Anlaß gibt.

Auch die Bedingungen α) und β) zusammen reichen nicht aus, denn man kann z. B. aus den Ecken und Kanten eines gewöhnlichen regelmäßigen Ikosaeders ein Vielflach konstruieren, das zu Seiten 10 regelmäßige Dreiecke und 6 gewöhnliche regelmäßige Fünfecke besitzt, das also sicher nicht als regelmäßig angesehen werden kann, obwohl es den Bedingungen α) und β) genügt.

Vergleichung mit der gewöhnl. Def.

Zur Begründung des eingeschlagenen Weges mag hier eine Vergleichung der gruppentheoretischen Definition mit der geometrischen Platz finden, während die Tragweite der in den verschiedenen möglichen Definitionen enthaltenen Voraussetzungen erst später erörtert wird.

Für die Geometrie zeigt sich neuerdings immer mehr das Bedürfnis, Definitionen und Sätze der Gruppentheorie anzupassen, und für die Ableitung der regelmäßigen Vielflache ist der Anschluß an diese Theorie eine geradezu selbstverständliche Forderung. Und doch ist der Übergang von der bisherigen Auffassung zu der gruppentheoretischen keineswegs so einfach, als man glauben könnte; denn die letztere stellt viel allgemeinere Begriffe auf, die mit den geometrischen erst durch Einschränkungen in Übereinstimmung gebracht werden können.

Die Gruppentheorie bedient sich allgemeiner Verknüpfungen, wie wir sie am Anfang besprochen haben, und diese ergaben die „windschiefen Seiten“ und damit eine Erweiterung der bisherigen

Einschränkungen.

Vielflache. Es ginge über den Rahmen der vorliegenden Abhandlung hinaus, alle regelmäßigen Vielflache mit windschiefen Seiten abzuleiten, und deshalb beschränken wir uns hier auf solche mit *ebenen Seiten* (Einschränkung I.).

I. Ebene Seiten.

Da nur Gruppen mit einer endlichen Anzahl von Drehungen, deren Achsen nicht zusammenfallen, vorausgesetzt sind, so müssen sich die Drehachsen in einem Punkte O schneiden, der bei allen Drehungen der Gruppe fest bleibt, und den wir den *Drehpunkt* des Vielflachs nennen. Hieraus und aus der Bedingung b), S. 28, folgt dann: Alle Eckpunkte eines regelmäßigen Vielflachs liegen auf einer Kugel, alle Kanten berühren eine zweite Kugel, die Ebenen aller Seiten hüllen eine dritte Kugel ein, und die Mittelpunkte der drei Kugeln sind im Drehpunkt O vereinigt. Weiter folgt: Jede Kante enthält nur zwei Eckpunkte und ist nur in zwei Seiten enthalten, und damit ist die frühere Forderung c) S. 25 von selbst erfüllt.

II. Entartete Seiten.

Wenn die Ebene einer Seite und damit die Ebenen aller Seiten durch den Drehpunkt O gehen, so entsteht ein *entartetes Vielflach.* Da in einem solchen an jeder Kante nur eine Seite liegt, so widerspricht es der Voraussetzung b), S. 25, und man könnte es nur dadurch einordnen, daß man jede Seite des entarteten Vielflachs doppelt überdeckt denkt. Jedoch sehen wir von solchen Vielflachen ab (Einschränkung II.).

Geometr. Folgerung.

Jede Seite besteht jetzt aus einem ebenen Vieleck mit gleichlangen Seiten (den Kanten des Vielflachs), dessen Eckpunkte auf einem Kreise liegen, nämlich auf dem Schnitte der Ebene der Seite mit der durch die Eckpunkte gelegten Kugel, also aus einem *regelmäßigen Vieleck,* und in gleicher Weise zeigt man, daß auch die übrigen Voraussetzungen der geometrischen Definition eines regelmäßigen Vielflachs erfüllt sind, die verlangt, daß die Seiten kongruente regelmäßige Vielflache und die Flächenwinkel einander gleich sind, woraus die Kongruenz der Ecken folgt.[1])

Damit erscheint der Anschluß unserer (gruppentheoretischen) Definition an die gewöhnliche leicht erreicht. Es ist aber dabei eine Möglichkeit noch nicht berücksichtigt, *daß nämlich zwei oder mehr Seiten, d. h. ebene Vielecke in derselben Ebene liegen.* Dieser Fall trifft, wie sich im zweiten Teile dieser Arbeit ergeben wird, z. B. bei einem in 5 Oktaeder zerfallenden Vielflach ein, dessen Seiten ihre Ebenen mit denen eines Ikosaeders gemein haben.

[1]) CHR. WIENER, Lehrbuch der darst. Geometrie (Leipzig, 1884), Nr. 154 bis 156, S. 126, 127.

Nun läßt sich aber sofort zeigen, *daß die geometrische Definition gar keinen Aufschluß über zerfallende Vielflache gibt.* Denn wollte man diese Definition auf solche anwenden, so würde z. B. eine beliebige Anzahl beliebig im Raume verteilter gleichgroßer Würfel ein regelmäßiges Vielflach bilden, was ganz unzulässig ist. Nach unserer Definition erkennt man sofort, daß z. B. die Gesamtheit der beiden Tetraeder, die Hemiedrien eines Oktaeders sind (Modell Nr. 111), als regelmäßiges Vielflach aufzufassen ist, dagegen entstehen bei dem oben erwähnten Beispiel der 5 Oktaeder Zweifel; denn die Definition fordert, daß jede Seite in jede andere durch eine Drehung der Gruppe übergeführt werden könne, und dies trifft, falls man unter Seiten die Vielecke versteht, bei zwei in einer Ebene liegenden Dreiecken jener 5 Oktaeder nicht zu. Wollten wir nun die Übereinstimmung dadurch herstellen, daß wir als Seite nicht das Vieleck, sondern seine Ebene bezeichnen, so würden wir zwar die geometrischen Elemente Punkt, Gerade und Ebene für die Stücke des Vielflachs verwenden, kämen aber in Widerspruch mit unseren früheren Ausführungen, nach denen der Zusammenschluß des Vielflachs gerade durch die als Ketten gebildeten Seiten geschieht. An diesen Bildungen müssen wir festhalten, und können die „Seite" also nur als ein ebenes (im allgemeinen Falle windschiefes) Vieleck auffassen.

III. Überführbarkeit der Vielecke.

Zunächst scheint es, daß wir hierdurch ein für die Theorie der regelmäßigen Vielflache wichtiges Prinzip, nämlich die *Dualität* verletzen, wenn wir nicht gleichzeitig *fordern, daß auch an jedem Eckpunkt, an dem zwei (oder mehr) Vielkante zusammenstoßen, jedes dieser in das andere durch eine Drehung der Gruppe übergeführt werden könne* (Einschränkung III.). Unbedingt notwendig ist jedoch diese Forderung nicht. Wir bauten das „begriffliche Vielflach" auf, indem wir von Punkten als ursprünglich gegebenen Stücken ausgingen; und man kann das Prinzip der Dualität dadurch wahren, daß man anstelle der Punkte die Ebenen setzt, und aus ihnen in dualem Verfahren die zu den vorigen dualen Gebilde zusammenfügt. Während nun jedes Vielflach der Tetraeder- und Oktaedergruppe und die nicht zerfallenden Vielflache der Ikosaedergruppe die beiden einander dual gegenüberstehenden Erzeugungen zulassen, kann die Gesamtheit der fünf Würfel, die mit dem Dodekaeder die Eckpunkte gemein haben, nach unserer Definition nur dann als regelmäßig angesehen werden, wenn es aus den Eckpunkten erzeugt ist, und das dazu duale der fünf

Oktaeder, nur wenn es aus seinen Ebenen auf dem dualen Wege erzeugt ist.

Daher stehen einander *zweierlei Definitionen* der regelmäßigen Vielflache als möglich gegenüber:

I. Definition. ***Erste Definition:*** *Man faßt das Wort „Ecke" in der Definition S. 28 als gleichbedeutend mit „Eckpunkt" auf. Dann muß man der Erzeugung der regelmäßigen Vielflache aus den Punkten eine duale aus den Ebenen gegenüberstellen, die in besonderen Fällen Vielflache liefert, die auf die erste Art nicht erzeugt werden können.*

II. Definition. ***Zweite Definition:*** *Man fordert, daß nicht nur jeder Eckpunkt durch eine Drehung der Gruppe in jeden anderen übergeführt werden könne, sondern auch jedes an einem Eckpunkt gebildete Vielkant in jedes andere (Einschränkung III.). Man faßt also in der Definition (S. 28) das Wort „Ecke" als irgend eines der an einem Eckpunkt liegenden Vielkante auf.*

Hierin liegt, daß man nicht mehr, wie im I. Abschnitte den Punkt (Eckpunkt) als ein zur Kante und Seite gleichwertiges Stück anzusehen hat, sondern das in der Erzeugung ebenfalls auftretende Vielkant (die Ecke). Und hierdurch erst erhält das Vielflach lauter Stücke, die einander dual gegenüberstehen: Die Seite der Ecke; die Kante, die zwei Ecken verknüpft, der Kante, die zwei Seiten verknüpft.

Das aus fünf Würfeln und das aus fünf Oktaedern bestehende Vielflach, sowie das aus beiden abzuleitende, aus zehn Tetraedern bestehende, können dann nicht mehr als regelmäßig gelten.

Selbstverständlich hat man zwischen beiden Definitionen freie Wahl, und nur die Folgerungen, die aus beiden gezogen werden, entscheiden, ob man zweckmäßiger Weise die eine oder die andere bevorzugt. Für die zweite Definition spricht vielleicht die Tatsache, daß sie nur dann *zerfallende* Vielflache zuläßt, wenn die Gruppe eine *zusammengesetzte* ist. Ob dies aber ein allgemein gültiger Satz ist, dürfte sich erst durch die Erweiterung der Betrachtungen auf allgemeinere Gruppen entscheiden lassen. (Man vergleiche hierzu die Anmerkung III. im IV. Abschnitt).

III. Überführung einer Kante in eine Nachbarkante.

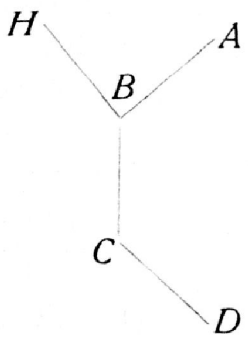
Um zu untersuchen, wie zwei Nachbarstücke (Ecken, Kanten oder Seiten) durch Drehungen der Gruppe ineinander übergeführt werden können, wählen wir für irgend eine Seite einen *Umlaufsinn*, indem wir etwa festsetzen, daß das die Seite bildende

Vieleck, vom Drehpunkt O aus gesehen (der nach der Einschränkung II. außerhalb des Vielecks liegt) im Uhrzeigersinn durchlaufen erscheine. Da sich der Sinn nicht ändert, wenn das Vieleck durch eine Drehung um O in ein anderes übergeführt wird, so erhalten dann alle Seiten des Vielflachs, von O aus gesehen, gleichfalls den Uhrzeigersinn. Sind die beiden Seiten außerdem benachbart, so erhält die Kante, in der beide zusammenstoßen, *verschiedenen Sinn*, je nachdem sie beim Umlaufen des einen oder des andern Vielecks durchwandert wird; denn da die Eckpunkte der beiden kongruenten regelmäßigen Vielecke auf einer Kugel liegen, so erscheinen diese vom Drehpunkt O aus nebeneinander, also wird bei gleichem Umlaufsinn der Vielecke die gemeinsame Kante entgegengesetzt durchlaufen.

Der aus allen so zusammenstoßenden Vielecken gebildete Teil des regelmäßigen Vielflachs (der auch das ganze Vielflach sein kann) erfüllt somit das „Gesetz der Kanten", durch das sich nach MÖBIUS die zweiseitigen von den „einseitigen Polyedern" unterscheiden [1]).

Zweierlei Drehungen.

Es soll jetzt untersucht werden, welcher Art die Drehungen sind, die eine Kante AB in eine Nachbarkante BC überführen, d. h. in eine solche, die mit ihr einen Eckpunkt B gemein hat, und in derselben Seite, nämlich dem Vieleck $ABCD\ldots$ enthalten ist. Nach Voraussetzung b β) läßt sich die erste durch eine Drehung der Gruppe in die zweite Kante überführen; dabei kann AB dem Sinne nach entweder in BC oder in CB übergehen. Nun stoßen



an BC zwei und nur zwei Seiten zusammen, und in jeder liegt an der Kante BC nur ein Vieleck, nämlich $ABCD\ldots$ in der einen Seite und etwa $HBC\ldots$ in der anderen; ABC muß daher entweder in sich selbst, oder in das andere übergehen, und was von beidem zutrifft, wird durch den Sinn entschieden. Geht nämlich AB dem Sinne nach in BC über, so geht das Vieleck in sich selbst, nämlich die Ecken A, B, C in B, C, D über; geht aber AB in BC über, so geht das Vieleck ABC in das Nachbarvieleck CBH über, in dieser Reihenfolge der Ecken.

Während sich also im ersten Falle das regelmäßige Vieleck in sich selbst dreht, geschieht dies im zweiten Falle mit der Ecke B. So ergibt sich der

[1]) MÖBIUS, Gesammelte Werke II, S. 477.

Satz I. *Jede in der Gruppe enthaltene Drehung, die eine Kante in eine Nachbarkante überführt, dreht entweder die Ecke, an der beide Kanten zusammenstoßen, oder die Seite, in der beide liegen, in sich selbst.*

Nach der Gruppeneigenschaft b) S. 28 gibt es an *jeder* Ecke diese Drehungen, falls sie an einer Ecke vorkommen, und in *jeder* Seite, falls sie in einer Seite vorkommen. Wir nennen diese beiden Arten die *eckenbildenden* bezw. *seitenbildenden Drehungen der Gruppe.* Ist nämlich $\mathfrak{E}$ die Drehung, die die Kante AB in die Nachbarkante CB überführte, so führt $\mathfrak{E}$, wie vorhin bewiesen wurde, die Seite $ABC\ldots$ in die Nachbarseite $CBH\ldots$, und damit die Kante CB in die Nachbarkante HB über. Aus demselben Grunde führt $\mathfrak{E}$ wiederum HB in ihre Nachbarkante, und die Seite $CBH\ldots$ in ihre Nachbarseite über. Nun geht aber AB durch die Wiederholung von $\mathfrak{E}$, die wir mit $\mathfrak{E}^2$ bezeichnen, in HB über, durch $\mathfrak{E}^3$ in die dieser benachbarte Kante, u. s. f. Die Drehungen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^2, \mathfrak{E}^3\ldots$ bilden aber notwendig eine Untergruppe der gegebenen Gruppe von Drehungen, und zwar eine zyklische Untergruppe, so daß irgend eine Wiederholung (etwa die ν-te) AB in sich zurückführt, so daß also $\mathfrak{E}^\nu = 1$ wird. Während also alle Drehungen der zyklischen Gruppe

$$\mathfrak{E},\ \mathfrak{E}^2,\ \ldots\ \mathfrak{E}^{\nu-1},\ 1$$

die Ecke B in sich drehen, ist die Drehung $\mathfrak{E}$, sowie ihre Umkehrung $\mathfrak{E}^{\nu-1}$ dadurch ausgezeichnet, daß sie die Kette von Nachbarkanten und Nachbarseiten erzeugt, aus der das Vielkant an der Ecke B besteht. Und wenn an der Ecke B mehrere solcher Vielkante zusammenstoßen, so muß wegen ihrer Kongruenz jedes in derselben Weise durch die Drehung $\mathfrak{E}$ (sowie durch $\mathfrak{E}^{\nu-1}$) erzeugt werden.

Ganz in derselben Weise zeigt man, daß auch jede seitenbildende Drehung der Gruppe das Vieleck, aus dem die Seite besteht, erzeugt.

Anmerkung. Es ist keineswegs gesagt, daß eckenbildende und seitenbildende Drehungen an einem regelmäßigen Vielflach gleichzeitig vorkommen müssen, wenn dies auch bei den gewöhnlich betrachteten geschieht. Das Vielflach, das aus den fünf einem Dodekaeder eingeschriebenen Würfeln besteht, besitzt nur eckenbildende Drehungen, das dazu duale (das aus fünf Oktaedern besteht) nur seitenbildende, während ein anderes der Ikosaedergruppe angehöriges zerfallendes Vielflach, das aus zehn Tetraedern besteht, wieder beiderlei Drehungen besitzt. Wenn auch diese Vielflache nach der zweiten Definition (S. 32) nicht als regelmäßig gelten, so werden

sie es, sobald man die durch symmetrische Abbildungen „erweiterte Gruppe" zu Grunde legt. Sollen also unsere Betrachtungen allgemein gelten, so dürfen wir nicht das gleichzeitige Bestehen beider Drehungen als notwendig voraussetzen.

Kanten-umwendunge

Wir untersuchen zuerst den Fall, in dem das regelmäßige Vielflach beiderlei Drehungen aufweist; es gehe also eine Kante AB in die Nachbarkante durch eine eckenbildende Drehung $\mathfrak{E}$ im Sinne CB über und durch eine seitenbildende Drehung $\mathfrak{F}$ im Sinne BC. Führt man dann die letztere Drehung rückwärts aus, $\mathfrak{F}^{-1}$, und hierauf die erstere Drehung $\mathfrak{E}$, so geht durch die Folge $\mathfrak{s} = \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{E}$ dieser beiden Drehungen die Kante BC in CB über. Eine Drehung aber, die zwei Punkte miteinander vertauscht, ist stets involutorisch[1]) (eine Achsenspiegelung oder Umwendung) und wir nennen diese hier eine *„Kantenumwendung"*; eine solche ist dann (infolge der Überführbarkeit) auch für jede andre Kante vorhanden.

Besteht umgekehrt außer der einen sicher vorhandenen (ecken- oder seitenbildenden) Drehung auch eine Kantenumwendung, so ist auch die andere der beiden vorhanden. Denn es folgt aus $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{s}$ eine Drehung $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}\mathfrak{s}$, die die Kante AB in BC überführt, also eine seitenbildende Drehung (nach S. 33), und ebenso folgt aus $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{s}$ die eckenbildende Drehung $\mathfrak{F}\mathfrak{s} = \mathfrak{E}$. Ist also nur eine der beiden (ecken- oder seitenbildenden) Drehungen vorhanden, so kann es keine Kantenumwendung geben, und gibt es keine Kantenumwendung, so kann nur eine der beiden Drehungen vorhanden sein. Dies liefert den

Zwei Fälle.

Satz II. *Bei den regelmäßigen Vielflachen sind zwei Fälle denkbar: Vielflache mit Kantenumwendungen („erster Fall") und solche ohne Kantenumwendungen („zweiter Fall").*

Zwei Unterfäll

Der erste Fall umfaßt alle Vielflache, die gleichzeitig beiderlei Drehungen, nämlich eckenbildende und seitenbildende besitzen, der zweite Fall solche mit nur einerlei Drehungen. Der zweite Fall liefert daher zwei Unterfälle, von denen der erste die Vielflache mit eckenbildenden und ohne seitenbildende Drehungen, der zweite die mit seitenbildenden und ohne eckenbildende Drehungen umfaßt.

Anmerkung. Es ist vorhin, wie üblich[2]), die Folge zweier Drehungen (allgemeiner gesagt: Abbildungen, Verwandtschaften) durch Neben-

[1]) Vergl. meine Abhandlung „Zur Theorie der Umwendungen", Ber. der math.-ph. Cl. der Kgl. Sächs. Ges. d. W. 1890, S. 73.

[2]) Man vergl. meine Abhandlung „Über geometrische Analysen". Ber. der math.-ph. Cl. der Kgl. Sächs. Ges. d. W., 1890, S. 245 ff, Abschnitt VI: Das Rechnen

einanderschreiben der die einzelnen Drehungen bezeichnenden Buchstaben ausgedrückt, ferner die Umkehrung einer Drehung $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{F}^{-1}$; dementsprechend setzt man die Drehung, die jeden Punkt an der Stelle läßt (Deckung, Identität), $= 1$, und man kann eine solche identische Drehung jeder anderen vorn oder hinten anfügen, ohne sie zu verändern. Eine involutorische Drehung (Spiegelung) $\mathfrak{S}$ hat dann die Eigenschaft, daß $\mathfrak{S}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^2 = 1$ gesetzt werden kann.

Es folgt dann aus

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}\mathfrak{S}$$

rein formal

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}\mathfrak{S}$$

und ebenso

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{G}.$$

Erster Fall. Wenn sich eine von zwei Drehungen (allgemeiner gesagt, Verwandtschaften), wie $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$, aus der anderen ergibt, indem man die Folge aus dieser andern und einer involutorischen Drehung (Spiegelung) bildet, so ergibt sich in gleicher Weise die zweite aus der ersten, und es heißen beide zu einander „harmonisch“ [1]). Man erhält also den

Satz III. *Bei einem regelmäßigen Vielflach des ersten Falles geht jede Kante in eine Nachbarkante durch zwei harmonische Drehungen über, von denen die eine ($\mathfrak{G}$) die Ecke, in der beide Kanten zusammenstoßen, die andere ($\mathfrak{F}$) die Seite, in der beide Kanten liegen, in sich dreht.*

Ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal beider Fälle ergibt sich durch den

Satz IV. *Im ersten Falle gibt es zwei, im zweiten Falle nur eine einzige Drehung der Gruppe, die eine gegebene Kante in eine beliebige andere überführen.*

Die gegebene Kante sei B_0C_0, sie wird nach b) der Definition S. 28 sicher durch eine Drehung $\mathfrak{G}$ in die beliebige Kante BC übergeführt, und zwar geschehe dies so, daß dem Sinne nach B_0C_0 in BC übergeht. Soll es möglich sein, durch eine zweite Drehung $\mathfrak{D}$ die erste Kante in die zweite überzuführen, so kann dies nur in umgekehrtem Sinne geschehen, so daß B_0C_0 nach CB kommt, denn es gibt nur eine einzige Drehung, die das Dreieck OB_0C_0 in OBC überführt. Dann vertauscht aber die Drehung $\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{D}$ die beiden Ecken B und C, ist also eine Kantenumwendung.

---

mit Verwandtschaften, und VII: Das Rechnen mit involutorischen Verwandtschaften. Ferner TH. REYE: „Über symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften“. Math. Ann. 43 (1893), S. 145 ff.

[1]) Vergl. die Fußnote S. 21.

Gibt es also zwei der genannten Drehungen, so hat man den ersten Fall, und da dies auch umgekehrt gilt, so folgt hieraus der Satz.

Daraus, daß bei den *Vielflachen des zweiten Falles* eine Kante nur durch eine einzige Drehung der Gruppe in eine andere übergeführt werden kann, folgt dann: wenn man irgend einer Kante einen bestimmten Sinn beilegt, etwa der Kante AB den von A nach B gerichteten, so überträgt sich dieser eindeutig auf alle übrigen Kanten. Jedenfalls überträgt sich der Sinn von AB durch alle Drehungen der Gruppe auf alle übrigen Kanten, z. B. durch $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ auf A_1B_1 und A_2B_2; führt man aber die Kante A_1B_1 in A_2B_2 über, so geschieht dies nur durch eine einzige Drehung, nämlich die Folge $\mathfrak{D}_1^{-1}\mathfrak{D}_2$, also erhält A_2B_2 von A_1B_1 aus denselben Sinn, wie von AB aus. Zweiter Fall.

Untersuchen wir nun den *ersten Unterfall* — das einzige Beispiel, das uns die Gruppen der regelmäßigen Vielflache darbieten werden, ist die Gesamtheit der fünf dem Dodekaeder eingeschriebenen Würfel — so geht die Kante AB durch die beim ersten Unterfall vorhandene *eckenbildende Drehung*, etwa mit festem Eckpunkt B, in die Nachbarkante CB, diese in ihre Nachbarkante HB über u. s. f. Der Sinn dieser Kanten ist dann wie bei AB in den Eckpunkt B hineingerichtet. Da sich jeder Eckpunkt in jeden anderen überführen läßt, so besitzt jeder Eckpunkt ein Vielkant (oder mehrere), wie AB, CB, HB, dessen Kanten in den Eckpunkt hineingerichtet sind. Betrachtet man nun eine Seite des Vielflachs, z. B. das Vieleck $ABCD\ldots$, so ist die Kante CB am Eckpunkt C aus der Ecke herausgerichtet (ebenso AB an der Ecke A). Es kann also die Kante CB unmöglich zu den Kanten des Vielkants mit dem Eckpunkt C gehören, das aus dem vorigen Vielkant durch eine Drehung der Gruppe hervorgeht. Daraus folgt: 1. Unterfall.

Satz V. *Bei den Vielflachen des ersten Unterfalles (d. h. solchen, die eckenbildende und keine seitenbildende Drehungen besitzen) verteilen sich die an einem Eckpunkte liegenden Kanten und Seiten auf zweierlei Vielkante (von denen jedes wieder in Teilvielkante zerfallen kann) derart, daß sich in jedem der beiden Vielkante jede seiner Kanten (Seiten) in jede andre seiner Kanten (Seiten) überführen läßt, daß es dagegen keine Drehung der Gruppe gibt, die das eine Vielkant in das andere überführt.* [1])

[1]) Mit Hilfe der früher aufgestellten geometrischen Sätze läßt sich beweisen, daß beide Vielkante einander kongruent sind.

Betrachten wir nun die Kanten, die in einer *Seite* ein Vieleck, etwa $ABCD$ . ., bilden, so können zwei aufeinanderfolgende AB und BC nicht denselben Sinn haben, weil es sonst eine Drehung gäbe, die das Vieleck in sich überführte, indem es eine Kante in die Nachbarkante brächte, was beim ersten Unterfall ausgeschlossen ist. Es müssen daher, wenn man das Vieleck umläuft, die beiden Kanten, die in einer Ecke zusammenstoßen, dem festgelegten Sinne nach abwechselnd in diese Ecke hinein und aus ihr herausgerichtet sein. Dies ist aber beim Umlaufen des Vielecks nur dann widerspruchslos möglich, wenn es eine *gerade Anzahl* von Ecken und Seiten hat.

Satz VI. *Bei jedem Vielflach des ersten Unterfalles ist jede Seite ein Vieleck von gerader Seitenzahl.*

2. Unterfall. Auf den zweiten Unterfall übertragen sich diese Betrachtungen dual, seine Vielflache haben an jeder Ecke Vielkante von gerader Seitenzahl.

Beispiel. Vergegenwärtigen wir uns diese Sätze an der Gesamtheit der fünf Würfel, die dem Dodekaeder eingeschrieben sind. In jeder Ecke des Dodekaeders liegen die Ecken von zwei Würfeln vereinigt. Sie bilden an der Ecke zwei Dreikante mit rechtwinkeligen Seiten, derart, daß nach Festlegung des Sinnes auf einer der 60 Kanten in dem einen Dreikant die Kanten in die Ecke hineingerichtet sind, bei dem anderen aus ihr heraus. Ist $ABCD$ eines der Quadrate, die die Seiten der Würfel und gleichzeitig des regelmäßigen Vielflachs ausmachen, so hängen den vier in dem Quadrat liegenden Kanten vier weitere Quadrate an. Wird AB in eine Nachbarkante, etwa in BC übergeführt, so geschieht dies im Sinne CB, das Quadrat $ABCD$ geht in das an BC angehängte Quadrat über; wird hierauf CB in CD übergeführt, so schlägt das Quadrat wieder in das erste zurück, nämlich in die Lage $CDAB$ u. s. w.

Es geht also das Vieleck $ABCD$ durch die Folge zweier eckenbildenden Drehungen in sich selbst über, diese Folge ist aber keine seitenbildende Drehung, weil dabei die Kante AB nicht in die Nachbarkante, sondern in die *Gegenkante* CD übergeht. Die Wiederholung dieser Drehung führt CD wieder in AB zurück, woraus folgt, daß die Drehung involutorisch ist; sie ist aber keine Kantenumwendung für unser Vielflach, sondern für das Dodekaeder, dem dieses eingeschrieben ist. Die Drehungen um einen Rechten, die ein Quadrat so in sich überführen, daß die Kanten in die Nachbarkanten übergehen, sind nicht in der Gruppe enthalten, ebensowenig die Kantenumwendungen der Würfel.

IV. Tragweite der verschiedenen Voraussetzungen. Dritte Definition des regelmäßigen Vielflachs.

Folgerungen aus der II. Definition.

Es hat sich bei der Definition des regelmäßigen Vielflachs als wünschenswert herausgestellt, der Forderung der Überführbarkeit einer „Ecke“ in eine beliebige zweite die Deutung zu geben, daß nicht nur der gegebene Eckpunkt durch eine Drehung in jeden anderen gebracht werden könne, sondern auch jedes an dem Eckpunkte liegende Vielkant in jedes andere (zweite Definition des regelmäßigen Vielflachs, S. 32). Setzen wir dies voraus, so geht beim Vorhandensein einer eckenbildenden Drehung jedes der an einem Eckpunkte liegenden Vielkante durch eine Drehung der Gruppe in jedes andere an dem Eckpunkt liegende über, und wenn eine Kante dem Sinne nach in den Eckpunkt hineingerichtet ist, so gilt dasselbe für jede Kante. Dadurch ist der „zweite Fall“ (S. 35) ausgeschlossen, in dem bei Vorhandensein von eckenbildenden Drehungen die Kanten an einem Eckpunkt zur Hälfte in den Eckpunkt hinein, zur Hälfte aus ihm herausgerichtet sind. Es gilt also der

Satz I. *Nach der zweiten Definition (S. 32) sind in jedem aus einer Gruppe von Drehungen abgeleiteten regelmäßigen Vielflach Kantenumwendungen und somit ecken- und seitenbildende Drehungen gleichzeitig vorhanden.*

Nun läßt sich in Folge der Annahme einer eckenbildenden Drehung an einem beliebigen Eckpunkte B jede Seite in jede andere überführen, die demselben Vielkant angehört, und wegen der Überführbarkeit der Vielkante auch in jede andre Seite, die am Eckpunkte B liegt.

Dann läßt sich aber auch jede Seite $ABCD\ldots$ so in sich selbst überführen, daß eine Ecke B der Seite in irgend eine andre (etwa C) übergeht. Denn dreht man B nach C, das derselben Seite als Nachbarecke von B angehört, so geht die Seite im allgemeinen in eine andere an C liegende über, und diese läßt sich bei festem C, wie vorhin gezeigt, in jede andre an C liegende, also auch in $ABCD\ldots$ drehen.

Hier hat man zwei Folgerungen aus der Überführbarkeit der Vielkante gewonnen, die nun als selbständige Forderungen an die Stelle dieser Voraussetzung der Überführbarkeit gesetzt werden dürfen. Geschieht dies, so kann man dafür auf andere Voraussetzungen, z. B. die der Ebenheit der Seiten verzichten.

Wir sehen also jetzt von der Bedingung, daß die Seiten der regelmäßigen Vielflache ebene Vielecke seien, ab, und damit fällt auch die Möglichkeit weg, einer Seite auf der früheren Grundlage einen bestimmten „Umlaufsinn" zu erteilen[1]). *Dafür führen wir die beiden folgenden neuen Voraussetzungen ein:*

Änderung der Voraussetzungen.

1) Es soll möglich sein, an jeder Ecke eines regelmäßigen Vielflachs (mit ebenen oder windschiefen Seiten) jede Seite durch eine Drehung der Gruppe in jede andere an der Ecke liegende Seite überzuführen.

2) Ebenso soll jede Seite durch eine Drehung der Gruppe so in sich gedreht werden können, daß jede Ecke der Seite in jede andre Ecke der Seite übergeht.

Aus diesen neuen Bedingungen soll jetzt für die aus einer Gruppe von Drehungen abgeleiteten regelmäßigen Vielflache das Vorhandensein von Kantenumwendungen von neuem bewiesen werden.

Sind AB und BC benachbarte Kanten, die der Seite $ABCD\ldots$ angehören, so gibt es nach 1) eine Drehung $\mathfrak{E}$, die den gemeinsamen Eckpunkt B beider Kanten fest läßt, und die Seite $ABCD\ldots$ in die zweite an BC anstoßende Seite $BCH\ldots$ überführt, und zwar geht hierbei die Kante AB dem Sinne nach in CB über, da B nach Voraussetzung festbleibt. Ebenso gibt es eine Drehung $\mathfrak{F}$, die die Seite $ABCD\ldots$ in sich und die Kante AB in die Kante BC überführt, und dies kann entweder (α) gleichfalls im Sinne CB oder (β) im Sinne BC geschehen.

Geschieht es (α) im Sinne CB, so ist die Drehung $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{E}$ identisch, da beide das Dreieck OAB nach OCB bringen; $\mathfrak{E}$ ist daher eine Drehung, die von der Seite $ABCD\ldots$ eine Ecke B fest läßt und die Seite in sich dreht. Die an B anstoßenden Kanten vertauschen sich also, d. h. das Dreieck ABC geht in CBA über, $\mathfrak{E}$ ist also die Spiegelung an der Geraden OB. Geht von einem Eckpunkte B eine solche Spiegelachse nach O, so gilt dies wegen 2) für jeden Eckpunkt, z. B. für C. Daraus folgt, daß nicht nur die Seite BC, sondern auch die folgende Seite CD des Vielecks in der Ebene OAB liegt, u. s. f., daß also das Vieleck in einer durch O gehenden Ebene liegt; außerdem ist es (im gewöhnlichen Sinne) regelmäßig, weil alle Eckpunkte auf einer Kugel mit dem Mittelpunkte O liegen. Damit haben wir den *Hilfssatz* gewonnen:

[1]) Es könnte dies aber auf Grund des MÖBIUSschen „Kantengesetzes" geschehen (vergl. S. 33).

Entartung des Vielflachs.

Gibt es in einem (aus einer Gruppe von Drehungen abgeleiteten) regelmäßigen Vieflach, das den Bedingungen 1) und 2) genügt, eine Drehung, die eine Seite in sich selbst überführt und eine Ecke dieser Seite festläßt, so ist diese Seite ein ebenes regelmäßiges Vieleck, dessen Ebene durch den Drehpunkt O geht. Das Vielflach ist daher (nach S. 30) ein entartetes.

Da wir entartete Vielflache schon früher ausgeschlossen haben (Einschränkung II, S. 30), so bleibt nur noch die Möglichkeit (β) übrig, d. h.: *Soll die Kante AB so in die Nachbarkante übergeführt werden, daß die ebene oder windschiefe Seite ABCD . . in sich selbst und die Kante AB in die an B anstoßende Nachbarkante gedreht wird, so geschieht dies im Sinne BC.*

Damit ist gezeigt, daß es nach den Voraussetzungen 1) und 2) zwei voneinander verschiedene Drehungen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ gibt, die eine Kante AB in eine Nachbarkante überführen, nämlich das eine Mal im Sinne CB, das andere Mal im Sinne BC; und da wir nur Gruppen von Drehungen zu Grunde legten, so folgt daraus wie früher das Vorhandensein einer Kantenumwendung. Dies liefert den

Kantenumwendung.

Satz II: *Genügt ein aus einer Gruppe von Drehungen abgeleitetes regelmäßiges Vielflach mit ebenen oder windschiefen Seiten den Bedingungen 1) und 2), so gibt es für jede Kante eine der Gruppe angehörige Umwendung, die die beiden Ecken der Kante miteinander vertauscht (d. h. eine Kantenumwendung).*

Zerfallende Vielflache.

Es mag die Tragweite unserer Definitionen noch dadurch erläutert werden, daß wir angeben, welche Vielflache sich hiernach als regelmäßig herausstellen werden. Sehen wir dabei von den bisher nirgends untersuchten mit windschiefen Seiten ab, so deckt sich die zweite Definition (S. 32) mit der in den Bedingungen 1) und 2) (S. 40) enthaltenen. In der Tetraedergruppe tritt nur das Tetraeder auf, in der Oktaedergruppe gilt das Oktaeder und der Würfel, sowie ein in zwei Tetraeder zerfallendes Vielflach als regelmäßig, in der Ikosaedergruppe werden alle zerfallenden Vielflache (von denen es drei gibt) ausgeschlossen, so daß nur die zwei PLATONischen (Ikosaeder und Dodekaeder), die zwei KEPLERschen und die zwei POINSOTschen übrig bleiben. *Damit gelten in der Oktaedergruppe, die zusammengesetzt ist* (d. h. die invariante Untergruppen enthält), *zerfallende Vielflache als regelmäßig, während in der Ikosaedergruppe, die einfach ist, keine zerfallenden Vielflache vorkommen.*

Diese Beschränkung zerfallender Vielflache auf zusammengesetzte Gruppen findet sich auch, wenn man z. B. bei der

Ikosaedergruppe zur „erweiterten Gruppe“ übergeht, die außer den kongruenten auch symmetrische Abbildungen enthält. Dann gilt der Satz nicht mehr, daß falls zwei benachbarte Ecken durch eine Abbildung der Gruppe vertauscht werden, eine Kantenumwendung vorhanden ist; denn sie können auch durch Spiegelung an ihrer Mittelebene vertauscht werden. Durch solche Ebenenspiegelungen wird es aber möglich, z. B. bei dem in fünf Würfel zerfallenden Vielflach, an einer Ecke die beiden Vielkante (die zwei verschiedenen Würfeln angehören) ineinander überzuführen, und damit die zweite Definition (S. 32) zu befriedigen. Es gelten also in der erweiterten Gruppe die Gesamtheit der fünf Würfel (und ebenso der beiden anderen zerfallenden Vielflache) als regelmäßig. Die erweiterte Gruppe ist aber wieder zusammengesetzt.

Anmerkung I. Auch bei der erweiterten Gruppe ist es in dem Beispiel der fünf Würfel nicht möglich, eine Seite, d. h. ein begrenzendes Quadrat, so in sich überzuführen, daß eine Kante in die Nachbarkante übergeht. Wird eine Kante AB eines Quadrates $ABCD$ in die Nachbarkante BC übergeführt, so geht das Quadrat in das Nachbarquadrat desselben Würfels über (vergl. S. 38); in die Gegenseite CD des Quadrates geht bei der erweiterten Gruppe die Kante AB auf zwei Weisen über, nämlich im Sinne CD durch eine Umwendung (die aber für die fünf Würfel keine Kantenumwendung ist) und im Sinne DC durch eine Ebenenspiegelung. Die Bedingung 2) auf S. 40 ist damit ebenfalls erfüllt, und zwar folgt dies aus der „zweiten Definition“, da die Schlüsse auf S. 39, soweit sie nicht die Kantenumwendungen betreffen, immer noch gelten; aber die Seite (das Quadrat) ist nicht durch die Drehungen der Gruppe in der Weise erzeugt, wie dies bei den Vielflachen geschieht, die einer nur aus Drehungen bestehenden Gruppe angehören, wobei die Kante AB in die Nachbarkante im Sinne BC übergeht u. s. f. Wir haben hier aber den 1. Unterfall des zweiten Falles (S. 35), so daß die im III. Abschnitt getroffenen Unterscheidungen bei der „erweiterten Gruppe“ ihre Anwendung finden.

Anmerkung II. Es ist leicht, ein Beispiel eines regelmäßigen Vielflachs, oder besser gesagt, „räumlichen Vielseits“ mit windschiefen Seiten anzugeben. Als Ecken und Kanten wähle man die eines gewöhnlichen regelmäßigen Ikosaeders und ordne von den Kanten je solche zehn in eine Seite, die übrig bleiben, wenn man die Kanten wegläßt, die an zwei Gegenecken je eine fünfseitige regelmäßige Pyramide bilden.

Es stoßen von den so gefundenen sechs „Seiten“ je zwei an einer Kante zusammen, durch jede Ecke gehen fünf dieser Zehnecke, in jeder Seite liegen zehn Ecken und zehn Kanten, und das Gebilde gehorcht allen Forderungen, die dem regelmäßigen Vielflach auferlegt waren. Daß

zwei Nachbarvielecke nicht nur in einer Kante, sondern zugleich auch in der Gegenkante zusammenhängen, hat dabei ebensowenig zu sagen, wie der Umstand, daß je zwei Seiten benachbart sind.

Es sei hier aber vorgreifend erwähnt, daß alsbald eine auch auf windschiefe Seiten ausdehnbare Begriffsbestimmung der „entarteten Vielflache" gegeben wird, die das Vielflach unseres Beispiels als entartet erscheinen läßt; ich vermute, daß es in diesem Sinne außer den entarteten überhaupt keine windschiefen regelmäßigen Vielflache mehr gibt, jedoch ist es mir z. Zt. nicht möglich, diese Frage weiter zu verfolgen.

Die Voraussetzungen 1) und 2) lassen sich nicht in kurzen Worten zu einer Definition zusammenfassen, und dies rührt daher, daß sie nicht ausreichen, um den Begriff des „Regelmäßigen in einer Gruppe" auf die Ecken und Seiten anzuwenden.

Vielecke, die in einer Gruppe regelmäßig sind.

Beschränken wir uns vorerst auf die Seiten, so haben wir zu untersuchen, unter welchen Bedingungen ein Vieleck als regelmäßig in der Gruppe des regelmäßigen Vielflachs, oder wenigstens in einer Untergruppe dieser Gruppe gelten kann. Dabei setzen wir das Vieleck nicht von vornherein als eben voraus, sondern betrachten es als eine aus Eckpunkten und Kanten gebildete geschlossene Kette (vgl. S. 24). *Ein solches Vieleck soll „in einer Gruppe regelmäßig" heißen, wenn seine Eckpunkte und Kanten regelmäßige Systeme (vgl. S. 28) in dieser Gruppe bilden.* Hierbei treten zwei Aufgaben auf, nämlich die Vielecke zu bestimmen, die in einer Gruppe regelmäßig sein können, und die Gruppen zu bestimmen, in denen ein Vieleck regelmäßig sein kann. Es wird gefordert, daß jede Drehung einer solchen Gruppe jede Ecke (und ebenso jede Kante) wieder in eine Ecke (bezw. Kante) des Vielecks überführt (vgl. Bedingung a) der Definition S. 28), und daraus ergibt sich bei der Anwendung auf die Vielflache, daß die Gruppe, in der das Vieleck regelmäßig ist, nur eine Untergruppe der Gruppe des regelmäßigen Vielflachs sein kann. Ferner soll durch Drehungen der Gruppe, die das Vieleck in sich überführt, α) jeder Eckpunkt in jeden andern Eckpunkt des Vielecks übergehen können und β) jede Kante in jede andre (Bedingung b) der Definition).

Eine Kante AB geht also durch wenigstens eine Drehung der Gruppe, die das Vieleck $ABCD$ . . in sich überführt, in seine Nachbarkante BC über. Wir betrachten

1) den Fall, daß eine Drehung dieser Gruppe die Kante AB im Sinne CB in die Nachbarkante überführt; dieselbe Drehung führt dann CB in eine am festbleibenden Punkte B anliegende Kante des Vielecks, also in AB über, und somit ABC in CBA.

Diese Drehung ist daher eine Achsenspiegelung $\mathfrak{s}$ und eine ebensoche $\mathfrak{t}$ führt das Dreieck BCD in DCB über. Durch $\mathfrak{t}$ geht die Spiegelung $\mathfrak{s}$ in eine neue Spiegelung der Gruppe über, deren Achse den Punkt D enthält u. s. f. Man erhält also in der Gruppe ein geschlossenes Spiegelsystem, und wegen der endlichen Anzahl der Spiegelungen schneiden sich die Spiegelachsen von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ in einem Punkte O, durch den alle diese Spiegelachsen hindurchgehen. Sie bilden daher einen regelmäßigen ebenen Vielstrahl OA, OB, OC, . . und die Spiegelungen selbst ein geschlossenes Spiegelsystem, das wir als ein „*zyklisches geschlossenes Spiegelsystem*“ bezeichnen wollen. Auch das Vieleck selbst ist ein *ebenes*, da jede Ecke auf einer der Spiegelachsen liegt.

Über die Anzahl der Eckpunkte wurde bisher keine Voraussetzung gemacht; es fällt z. B., wenn sie gleich 3 ist, D mit A zusammen, ohne daß sich im Beweise etwas ändert. Fällt aber schon C mit A zusammen, so bestimmen ABC nicht mehr eine Ebene und der Beweis wird hinfällig. Das Vieleck ist dann ein Zweieck, oder es zerfällt in eine Anzahl von Zweiecken, deren Gesamtheit in der Gruppe regelmäßig sein soll. Ein solches Vieleck bezeichnen wir als *entartet* und schließen es von der Betrachtung aus.

Zufolge der Bedingung b) muß die Ecke A durch eine Drehung der Gruppe in die Ecke B übergehen, also AB entweder in BA oder in BC. Geht AB in BA über, so geschieht dies (weil zwei Punkte vertauscht werden) durch eine Spiegelung $\mathfrak{r}$, die auch das Vieleck (oder was auf dasselbe hinauskommt, das geschlossene Spiegelsystem in sich überführt, deren Achse also durch O geht; da aber AB nicht durch O gehen darf, weil dies ein entartetes Vieleck bedingte, so liegt die Spiegelachse von $\mathfrak{r}$ in der Ebene des Vielecks. Die Folge $\mathfrak{r}\,\mathfrak{s} = \mathfrak{D}$ ist dann eine Drehung um O, die AB nach BC bringt. — Setzt man umgekehrt das Vorhandensein einer Drehung voraus, die das Vieleck in sich, und AB in BC überführt, so wird die Drehung $\mathfrak{D}\,\mathfrak{s}$ eine Spiegelung $\mathfrak{r}$, die AB in BA überführt.

Ist die Anzahl der Eckpunkte des Vielecks ungerade, so ist die Spiegelung $\mathfrak{r}$ schon unter denen enthalten, die zu Achsen die Geraden OA, OB, . . besitzen, ist diese Anzahl aber gerade, so enthält jede Spiegelachse zwei Eckpunkte; in beiden Fällen hat man daher ein zyklisches geschlossenes Spiegelsystem, das ebensoviele Spiegelungen enthält, als das Vieleck Eckpunkte besitzt. Diese Spiegelungen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, . . ., zusammen mit den Drehungen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}^2$, . . $\mathfrak{1}$

bilden eine Gruppe, die man als „Doppelpyramidengruppe“[1]) bezeichnet, und die alle Drehungen enthält, die das Vieleck in der angegebenen Weise in sich überführen. Denn aus der Überführung einer Kante in die Nachbarkante ergibt sich durch Folgebildung die Überführung in eine beliebige Kante.

2) Soll es eine Gruppe geben, die das Vieleck in sich überführt, aber die Kante AB in die Nachbarkante nur im Sinne BC, so führt die Drehung $\mathfrak{D}$, die dies vollbringt, die Kante BC in CD über u. s. f., und die Gruppe besteht aus den Drehungen $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^2, \ldots \mathbf{1}$, d. h. sie ist eine „zyklische Gruppe“. Das Vieleck ist wieder ein ebenes und unterscheidet sich der Gestalt nach nicht vom vorigen.

Das Ergebnis fassen wir so zusammen:

Satz III. *Ein Vieleck kann nur regelmäßig sein entweder in einer Doppelpyramidengruppe, oder in einer zyklischen Gruppe, wobei die letztere ebensoviele Drehungen enthält, als das Vieleck Eckpunkte besitzt, die erstere doppelt so viel.*

Beidemal ist das Vieleck eben und deckt sich seiner Gestalt nach mit demjenigen, das man gewöhnlich als ein regelmäßiges Vieleck bezeichnet.

In jeder der beiden Gruppen sind auch zerfallende regelmäßige Vielecke möglich, auf die hier nicht eingegangen zu werden braucht.

Schlägt man beim Aufbau des regelmäßigen Vielflachs den dualen Weg ein, so hat man von einer aus Ebenen (Seiten) und Kanten gebildeten Kette, dem Vielkant, auszugehen, und man erhält dann Vielkante, die in einer zyklischen oder einer Doppelpyramidengruppe regelmäßig sind. Die aus der letzteren Gruppe hervorgehenden Vielkante haben nun entweder ihren Scheitel im Drehpunkt O oder sie sind Prismen. (Im besonderen Falle des „entarteten Vielkants“ gehören sie einem Ebenenbüschel an.) Beide können nicht verwendet werden, da sie entartete Vielflache liefern. Aber dasselbe gilt von den durch eine Doppelpyramidengruppe erzeugten Vielecken, da ihre Ebene, wie wir vorhin bewiesen haben, durch den Drehpunkt O hindurchgeht.

In einer Untergruppe regelm. Vielecke als Seiten.

Fügen wir nun der Voraussetzung 2) die Bedingung hinzu, daß durch Drehungen der Gruppe, die eine Seite in sich überführen, auch jede Kante dieser Seite in jede andere Kante überzuführen ist, so wird die Seite zu einem Vieleck, das in einer Untergruppe der Gruppe des Vielflachs regelmäßig ist. Die früher eingeführte Forderung der Ebenheit (Einschränkung I, S. 30) ist dann

[1]) Die „Doppelpyramidengruppe“, sowie die „zyklische Gruppe“ werden im zweiten Teil dieser Arbeit ausführlicher besprochen.

von selbst erfüllt, während der Ausschluß entarteter Vielflache (Einschränkung II, S. 30) dadurch erreicht wird, daß man fordert, die Seiten sollen Vielecke sein, die in einer zyklischen, aber nicht in einer Doppelpyramiden-Untergruppe der Gruppe des Vielflachs regelmäßig sind.

Wenn man sich nun auf die beiden Forderungen beschränkt, daß

a) jede Seite in jede andere durch eine Drehung der Gruppe übergeführt werden könne, und daß

b) jede Seite in einer zyklischen (aber nicht Doppelpyramiden-) Untergruppe regelmäßig sei,

so läßt sich hieraus beweisen, daß jeder *Eckpunkt* des Vielflachs in jeden anderen Eckpunkt, und jede *Kante* auf zweierlei Weise in jede andre Kante übergeführt werden kann, und daß endlich auch jede Ecke, als *Vielkant* aufgefaßt, in jede andre Ecke übergeht. Mit a) und b) sind daher alle Forderungen der zweiten Definition nebst den früheren Einschränkungen und ebenso die Voraussetzung 2) S. 40 von selbst erfüllt.

Der Beweis für diese Behauptungen soll nun erbracht werden. Es läßt sich die Seite $ABCD$, in eine andre Seite, in der eine beliebig gewählte *Ecke* E liegt, durch eine Drehung $\mathfrak{D}$ der Gruppe überführen, und wenn dabei A etwa in die Ecke L dieser Seite kommt, so gibt es nach b) eine Drehung $\mathfrak{C}$ der Gruppe, die diese Seite in sich und L nach E dreht, so daß die Drehung $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ die Ecke A in die beliebig gewählte Ecke E dreht.

Ebenso ergibt sich die Überführbarkeit der *Kanten*, und zwar kann jede Kante AB auf zwei verschiedene Arten in die Nachbarkante BC übergeführt werden; denn außer der Drehung $\mathfrak{F}$, die das Vieleck $ABC\ldots$ in sich dreht, nämlich in die Lage $BCD\ldots$, gibt es eine Drehung $\mathfrak{E}$, die $ABC\ldots$ in die an BC anstoßende Seite CBH, und dabei (wie eben für die Ecken A und E bewiesen) die Ecke B nach B selbst bringt; es kann aber $ABC\ldots$ dem Sinne nach nicht in $HBC\ldots$ übergehen, weil dann das Dreieck OBC und damit das ganze Vielflach festbliebe (sodaß ABC nicht in die Nachbarseite überginge); also geschieht dies im Sinne CBH, und wir haben zwei verschiedene Drehungen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{E}$, die AB in die Nachbarkante bringen, die eine im Sinne BC, die andre im Sinne CB. Hierdurch ist jetzt ohne Benützung des Umlaufssinns der Flächen das Vorhandensein der *Kantenumwendung* $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{E}$ aus den Voraussetzungen a) und b) nachgewiesen.

Da endlich jede an B anliegende Seite in jede andre solche Seite unter Festhaltung des Eckpunktes B gedreht werden kann,

so lassen sich auch zwei verschiedene *Vielkante*, die an B anliegen, in einander überführen.

Dies liefert uns die

Dritte Definition. *Ein Vielflach nennen wir in einer Gruppe regelmäßig, wenn alle Seiten ein in der Gruppe regelmäßiges System bilden, und wenn jede Seite aus einem Vieleck besteht, das in einer der Gruppe angehörigen zyklischen Untergruppe, aber in keiner Doppelpyramiden-Untergruppe regelmäßig ist.* III. Definition.

Von dem regelmäßigen Vieleck, das die Seite bildet, dürfen wir annehmen, daß es nicht zerfällt, da wir von zerfallenden Vielecken doch jeden Teil an andre solche Teile zur Bildung des Vielflachs zusammenschließen müssen.

Die Erweiterung der dritten Definition auf höhere Dimensionen bietet keine Schwierigkeit; so wird man ein Vielzell in einer Gruppe von Drehungen des vierdimensionalen Raumes als regelmäßig bezeichnen, wenn seine Zellen ein in dieser Gruppe regelmäßiges System bilden, und wenn jede Zelle ein nicht entartetes, in einer Untergruppe dieser Gruppe regelmäßiges Vielflach ist.

Nachdem es sich als notwendig herausgestellt hat, das „in einer Gruppe regelmäßige System" einzuführen, dürfte die dritte Definition den besten Anschluß an den landläufigen Begriff der regelmäßigen Vielflache darbieten. Ziemlich zu Anfang meiner Beschäftigung mit diesen Fragen war ich versucht, diese Definition an die Spitze zu stellen und so alle Schwierigkeiten bei Seite zu schieben, die aus den zerfallenden Vielflachen der Ikosaedergruppe entspringen. Dann aber schien mir das Abwägen der mannigfachen Möglichkeiten eine bessere Einsicht zu gewähren, als eine ohne Begründung willkürlich hingestellte Definition. Daß das Streben nach Vereinfachung der eingeführten Voraussetzungen mich schließlich zu der anfangs bevorzugten Begriffsbildung zurückleitete, dürfte für die Zweckmäßigkeit sowohl des eingeschlagenen Weges, wie auch der bevorzugten Definition sprechen.

Anmerkung III. Die in diesem Abschnitt angedeuteten Erweiterungen des Begriffs des regelmäßigen Vielflachs, in Verbindung mit den früheren Betrachtungen über das begriffliche Vielflach und Vielzell, zeigen gleichzeitig die Möglichkeit, die Operationen abstrakter Gruppen so zu verknüpfen, daß sie ein begriffliches Vielflach oder Vielzell u. s. f. bilden. Als Grundstück, das dem „Eckpunkte" entspricht, führe man eine in der Gruppe enthaltene zyklische Untergruppe ein, wie sie bei den regelmäßigen Vielflachen durch die Wiederholungen der eckenbildenden Drehungen entsteht. Freilich gibt es z. B. beim Ikosaeder zwölf Eckpunkte und nur sechs solcher

Untergruppen: wie man aber hier durch die „erweiterte Gruppe" die Anzahl der Operationen verdoppelt, so kann man auch bei den abstrakten Gruppen die Zahl der „Grundstücke" vermehren, in dem man die gegebene Gruppe als Untergruppe einer erweiterten Gruppe auffaßt. Ich hielte es für lohnend, die in der vorliegenden Arbeit für die Ikosaedergruppe abgeleiteten Sätze dadurch auf die von F. KLEIN und W. DYCK sehr eingehend studierte einfache Gruppe von 168 Operationen zu übertragen, daß für diese die möglichen regelmäßigen Gebilde aufgestellt würden.

V. Konstruktion eines regelmäßigen Vielflachs aus seiner Gruppe.

Es soll jetzt gezeigt werden, *wie man ein regelmäßiges Vielflach konstruieren kann, wenn seine Gruppe gegeben ist.*

Ecken. Man wähle aus der Gruppe irgend *eine nicht involutorische Drehung* $\mathfrak{E}$ als eckenbildende Drehung aus, und da ein Eckpunkt, etwa B, bei dieser Drehung festbleiben soll, so nehme man auf der Drehachse von $\mathfrak{E}$ den Punkt B beliebig an. Unterwirft man dann die Ecke B allen Drehungen der Gruppe, so geht sie jedesmal wieder in eine Ecke über, und die Drehungen, die B festließen, gehen durch die Drehungen, die B in eine neue Ecke B' überführen, in solche Drehungen über, die B' festlassen.

Kanten. Um aus B eine Nachbarecke A zu finden, greife man jetzt unter den Achsenspiegelungen[1]) der Gruppe irgend eine $\mathfrak{s}$ heraus und spiegle B an ihr nach A; dabei darf $\mathfrak{s}$ nicht mit der Drehachse von $\mathfrak{E}$ zusammenfallen, da sonst die Kante AB die Länge Null erhielte, und sie darf auch nicht senkrecht zu ihr sein, da sonst die Kante durch den Drehpunkt O hindurchginge, und ein aus diesen Kanten gebildetes Vieleck zu einem Vielstrahl, und das Vielflach zu einem Vielkant entartete. Um beides zusammenzufassen, *schließen wir aus, daß die Achsenspiegelung* $\mathfrak{s}$ *die Achse der Drehung* $\mathfrak{E}$ *in sich überführe.* Dann wird AB stets als Kante des zu erzeugenden Vielflachs dienen können. Unterwirft man die Kante AB allen Drehungen der Gruppe, so wird sie wieder in Kanten des Vielflachs übergeführt, und man erhält so alle Kanten. Gleichzeitig wird auch die Achsenspiegelung $\mathfrak{s}$, die für AB Kantenumwendung war, in sämtliche Kantenumwendungen des Vielflachs übergehen.

[1]) Daß jede (nicht zyklische) Gruppe einer endlichen Anzahl von Drehungen Umwendungen enthält, wird später gezeigt.

Anmerkung. In der Oktaedergruppe gibt es zweierlei Achsenspiegelungen, da drei von ihnen ein Achsenkreuz und die übrigen ein geschlossenes Spiegelsystem von sechs Spiegelungen bilden. Jene drei sind untereinander gleichberechtigt — d. h. sie gehen durch die Drehungen der Gruppe ineinander über — und ebenso diese sechs. Jedoch kann keine der drei in eine der sechs übergeführt werden. Jedes der beiden Systeme kann aber als System der Kantenumwendungen von Vielflachen dienen, die aus der Oktaedergruppe entstehen.

Vielkante und Vielecke.

Aus der Kante AB wird hierauf, so wie es früher (S. 34) auseinandergesetzt wurde, an der Ecke B mittels der eckenbildenden Drehung $\mathfrak{E}$ ein Vielkant gebildet, und endlich in einer an die Kante AB anstoßenden Seite mittels der aus $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{s}$ zusammengesetzten seitenbildenden Drehung ($\mathfrak{F} = \mathfrak{E}\mathfrak{s}$ vergl. S. 35) ein Vieleck. Unterwirft man schließlich Vielkant, Vieleck und Kante allen Drehungen der Gruppe, so erhält man alle weitere solche Stücke.

Duale Erzeugung.

Will man das Vielflach auf dual entsprechende Weise aus einer seitenbildenden Drehung $\mathfrak{F}$ unter Hinzufügen einer Kantenumwendung $\mathfrak{s}$ erzeugen, so hat man wie vorhin dreierlei Voraussetzungen zu machen. Es darf nämlich erstens die seitenbildende Drehung $\mathfrak{F}$ nicht involutorisch sein, da sie sonst ein Zweieck und nicht ein Vieleck als Seite erzeugte; zweitens darf die Achse der Kantenumwendung $\mathfrak{s}$, die die Seite in die Nachbarseite überführen soll, nicht in die Drehachse von $\mathfrak{F}$ hineinfallen, da sonst die Nachbarseite mit der Seite zusammenfiele, und drittens dürfen beide Achsen nicht senkrecht sein, da sonst die Nachbarseite zur Seite parallel würde und das Vieflach entartete. Die beiden letzten Bedingungen können wiederum dahin zusammengefaßt werden, daß *die Drehachse von $\mathfrak{F}$ durch die Achsenspiegelung $\mathfrak{s}$ nicht in sich übergeführt werden darf.*

Anmerkung. Die Entartung eines Vielecks oder Vielflachs, die entsteht, wenn die Nachbarecken auf einem (durch O gehenden) Durchmesser liegen, hat zum dualen Bilde die Entartung eines Vielseits oder Vielflachs, bei dem Nachbarseiten parallel sind. So entsteht z. B. aus einem gewöhnlichen regelmäßigen Sechseck außer einem in zwei Dreiecke zerfallenden (dessen Ecken unter Übergehen je einer Ecke zu Seiten verbunden werden) ein entartetes, das aus drei durch je zwei Ecken begrenzten Durchmessern besteht. Und dual dazu erhält man aus einem gewöhnlichen ebenen regelmäßigen Sechsseit außer einem in zwei Dreiseite zerfallenden (dessen Seiten unter Übergehen je einer Seite zum Schnitt gebracht werden) ein entartetes, das aus drei Paaren paralleler Geraden besteht, also drei unendlich ferne Ecken besitzt.

Nun sind aber die aufgestellten Bedingungen für die seitenbildende Drehung $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}\mathfrak{s}$ *von selbst erfüllt, falls sie für* $\mathfrak{E}$ *erfüllt sind, und umgekehrt.*

Ist nämlich eine der beiden Drehungen involutorisch, z. B. $\mathfrak{F}$, so ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}\mathfrak{s}$ eine aus den beiden Spiegelungen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{s}$ zusammengesetzte Drehung, also ist ihre Drehachse senkrecht zur Umwendachse von $\mathfrak{s}$. Und aus der Annahme, daß die Umwendachse zu der Achse einer der beiden Drehungen senkrecht sei, folgt entsprechend, daß die andere Drehung involutorisch ist; wenn z. B. die Achse von $\mathfrak{E}$ senkrecht zur Umwendachse von $\mathfrak{s}$ ist, so läßt sich die Drehung $\mathfrak{E}$ in die Folge zweier Spiegelungen $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ zerlegen, und es wird $\mathfrak{F} = \mathfrak{t}\mathfrak{s}\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$, also gleich einer Spiegelung, d. h. involutorisch.

Fällt aber die Achse von $\mathfrak{s}$ etwa mit der von $\mathfrak{F}$ zusammen, so bleibt auch bei $\mathfrak{F}\mathfrak{s} = \mathfrak{E}$ jeder Punkt dieser Achse an der Stelle, d. h. sie ist auch Achse von $\mathfrak{E}$, oder in anderen Worten, es fällt auch die Achse von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{E}$ zusammen.

Wir können die letzten Ergebnisse in den Satz zusammenfassen:

Bildung der Vielflache aus der Gruppe.

Hauptsatz. *Ist die Gruppe eines regelmäßigen Vielflachs gegeben, und man greift aus ihr erstens eine nicht involutorische Drehung und zweitens eine involutorische Drehung, die die Drehachse der ersten nicht in sich überführt, willkürlich heraus, und trifft die Bestimmung, daß die nicht involutorische Drehung eine Ecke festlassen, die involutorische aber diese Ecke in eine Nachbarecke überführen soll, so ist hierdurch ein regelmäßiges Vielflach — abgesehen von der Möglichkeit einer ähnlichen Veränderung — eindeutig bestimmt.*

Der Satz ist so gefaßt, daß er alle Versuche, die zu keinem regelmäßigen Vielflache führen würden, von selbst ausschließt.

Aus diesem Satz ist ersichtlich, wie man Vielflache bilden kann, die dieselben Ecken und Kanten, aber verschiedene Seiten (oder dieselben Seiten und Kanten, aber verschiedene Ecken) haben. Wählt man die eckenbildende Drehung $\mathfrak{E}$ und auf ihrer Achse die Ecke B und fügt noch die Kantenumwendung $\mathfrak{s}$ hinzu, so sind Ecken und Kanten bestimmt, und es wird an ihnen nichts geändert, wenn man statt $\mathfrak{E}$ eine andere nicht involutorische Drehung setzt, die dieselbe Drehachse besitzt, also z. B. $\mathfrak{E}^2$, falls nicht $\mathfrak{E}$ die Periode 4 ($\mathfrak{E}^2$ also die Periode 2) hat. Diese Bemerkung führt dazu, die Vielflache, bei denen die Periode 5 vorkommt,

2 71

d. h. die der Ikosaedergruppe, so wie es in der Einleitung angegeben wurde, in Paare zu ordnen.

Was die *Anzahl der Ecken, Seiten und Kanten* betrifft, die ein so erzeugtes Vielflach besitzt, so kann man von vorn herein nur sagen, daß diese Anzahlen $n:e$, $n:f$ und $n:k$ sind, wobei n die Anzahl der in der Gruppe enthaltenen Drehungen bedeutet, und e, f und k die Anzahlen der Drehungen, die eine Ecke, eine Seite oder eine Kante festlassen. Ist e' die Periode der eckenbildenden Drehung und es entstehen mehrere Vielkante an einer Ecke, die durch die Gruppe nicht ineinander übergeführt werden können, so ist $e = e'$. Dies tritt z. B. bei den nach der 1. Definition regelmäßigen Vielflachen des zweiten Falles (S. 35) ein, wenn die an einer Ecke gleichartig (in die Ecke hinein oder aus ihr heraus) gerichteten Kanten ein einziges Vielkant bilden. Die Anzahl der Kanten eines Vielflaches des zweiten Falles ist $= n$, da $k = 1$ wird. Im ersten Falle (und bei den nach der 2. oder 3. Definition regelmäßigen Vielflachen überhaupt) ist $k = 2$ und $n:k = \frac{1}{2}n$. Anzahlen.

Anmerkung. Da die Anzahl der eine Ecke, Seite oder Kante in sich überführenden Drehungen sich aus der Gruppe ergibt, so ist es nicht nötig, den zwischen diesen Anzahlen bestehenden EULERschen Satz zu benützen.

(Fortsetzung folgt.)

Berichtigung. Seite 22, Zeile 11 muß es statt „aus einem in der Gruppe" heißen: „aus einem in einer zyklischen Untergruppe", und die Worte der Zeile 13 sind zu ersetzen durch; „geschieht, indem man keine Doppelpyramidengruppe statt der zyklischen Untergruppe zuläßt".

Nr. 6. Wie sollen Flächen, insbesondere die der zweiten Ordnung, gezeichnet werden?

Zur IV. Reihe der Modelle. Nr. 401 bis 406.

Von H. WIENER in Darmstadt.

Zum Beleg dafür, daß ein Eingehen auf diese Frage nicht überflüssig ist, könnten viele Figuren aus mathematischen, physikalischen und geographischen Büchern und Abhandlungen angeführt werden, die teils geradezu fehlerhaft sind, teils eine Unsicherheit in der Beurteilung der Mittel verraten, die für die Veranschaulichung von krummen Flächen zu Gebote stehen. Schon bei Bildern der Kugel bleibt es oft dem Beschauer ungewiß, ob der Verfertiger senkrechte oder schiefe Projektion gewählt hat, ob er den Umriß der Kugel dargestellt hat, oder etwa einen Kugelkreis, der dem Umriß nahe kommt. Und die Zweifel über die Absichten des Darstellers wachsen bei Flächen, die sich ins Unendliche erstrecken.

Rundung der Flächen.

Auch bei geschlossenen Flächen, wie z. B. bei der Kugel oder dem Ellipsoid, *genügt der Umriß noch nicht* zum anschaulichen Bilde, da er die räumliche Rundung vermissen läßt. Diese aber durch Wiedergabe von Beleuchtungswirkungen zu veranschaulichen, ist nur dann am Platz, wenn Konstruktion oder Wirkung von Schatten und Helligkeiten den Gegenstand der Darstellung bilden; sonst wird man auf solche Mittel verzichten, schon wegen der Schwierigkeit, sie richtig anzuwenden, sodann auch, weil sie die Aufmerksamkeit von der Hauptsache ablenken.

Nun gibt es aber ein ganz einfaches und rein geometrisches Mittel, um die körperliche Rundung der Fläche im Bilde anzudeuten: *Man zeichne eine auf der Fläche von vorn um den Umriß herum auf die hintere Seite verlaufende Linie*, die man entweder berührend in den Rand einmünden läßt oder punktiert auf den unsichtbaren Teil der Fläche fortsetzt oder, unter Annahme der Durchsichtigkeit der Fläche, auch hinten auszieht, wobei man

am besten an den Überschneidungen der Linien die hintere kurz unterbricht. Zeichnet man auf diese Weise einige wenige Linien ein, so ist der Umriß oft ganz zu entbehren, da er leicht so hinein gedacht werden kann, daß er jene Linien berührt.

Umrandung.

Durch ähnliche Mittel lassen sich die anderen Schwierigkeiten bei der Abbildung von gekrümmten Flächen überwinden. Erstreckt sich eine solche ins Unendliche, oder soll nur ein Teil einer ausgedehnteren Fläche abgebildet werden, so muß unter allen Umständen *durch einen zusammenhängenden Zug von Randlinien der darzustellende Bereich der Fläche umgrenzt werden.* Hierzu können noch Umrißlinien eingezeichnet werden, falls solche überhaupt auftreten, es wird aber auch hier durch Hinzufügen von Linien, die auf der Fläche verlaufen, das Bild zu vervollständigen sein. Doch werden diese nur dann zu größerer Deutlichkeit beitragen, wenn sie nicht blind enden, sondern in sich geschlossen sind, oder auf die Randlinien aufstoßen und hier abbrechen.

Modelle Nr. 401 bis 406.

Die Modelle der IV. Gruppe sollen eine Anleitung geben, wie nach diesen Grundsätzen die *Flächen 2. Ordnung* zu zeichnen sind. Dabei sind diejenigen Linien, die die Fläche darstellen, insbesondere auch die Randlinien, durch Drähte wiedergegeben, derart, daß jedes Modell aus einem Drahtgestell besteht, und so dem Projizieren durch Schattenwerfen unterzogen werden kann. Als wichtigste Linien sind die *Hauptschnitte* genommen, durch welche Kugel und Ellipsoid hinreichend dargestellt sind; der Kugel sind 3 Durchmesser als Achsenkreuz beigefügt. Bei den beiden Hyperboloiden ist noch der Asymptotenkegel durch vier in den Hauptschnitten liegende Erzeugende angedeutet, und es sind als Grenzkurven je zwei Ellipsen genommen, deren Ebenen einem Hauptschnitt parallel sind. Die beiden Paraboloide werden durch Schnitte begrenzt, die zur Scheitelberührebene parallel sind; beim hyperbolischen Paraboloid werden diese beiden Randlinien durch vier sie verbindende Erzeugende ergänzt, und es sind außerdem die beiden Scheitelerzeugenden eingesetzt.

Wahl des Sehstrahls.

An den Schattenbildern wird auch der im Zeichnen weniger Geübte leicht bestimmen können, welche Art des Projizierens er für einen gegebenen Zweck am besten wählt, und wenn er sich für Parallelprojektion entschieden hat, die meist für geometrische Figuren die geeignete ist, welche Richtung des Sehstrahls und welche Stellung der Fläche gegen den Sehstrahl er annehmen soll. Und hier ist darauf zu achten, *daß die Überschneidungen der Linien bestimmt hervortreten* und nicht etwa einem Berühren nahe

kommen, wodurch die Verwechslung einer von vorn nach hinten verlaufenden Linie mit der Umrißlinie herausgefordert würde. Daraus folgt, daß bei *senkrechter Projektion* die *axonometrische* mit einer solchen Stellung des in die Achsen der Fläche fallenden Achsenkreuzes zu bevorzugen ist, daß keine Achse parallel oder nahezu parallel zur Tafel ist. Die axonometrische Darstellung hat für die Kugel den besonderen Vorteil, daß der Umriß als Kreis erscheint. Bei schiefer Projektion legt man i. a. eine Hauptebene (die (x, z)-Ebene) in die Tafel hinein, da dann alle zu dieser Hauptebene parallelen Schnitte in wahrer Gestalt erscheinen, und man hat dann nach dem oben aufgestellten Grundsatz nur dafür zu sorgen, daß sich die zur Tafel senkrechte Richtung (die y-Richtung) im schiefen Bilde genügend von der zur Tafel parallelen horizontalen und der vertikalen Richtung unterscheidet.

Nr. 7. Über Flächen 2. Ordnung.

Von H. WIENER in Darmstadt.

Die Mittel zur Untersuchung der Kurven und Flächen 2. O. müssen verschieden sein je nach dem Standpunkt, auf dem man steht, oder genauer ausgedrückt, je nach der Gruppe von Abbildungen, die man der Untersuchung zu grunde legt. In der darstellenden Geometrie, so wie in anderen Gebieten der Mathematik, zum Teil auch in der mathematischen Physik, spielen die *Parallelprojektionen* oder, was auf dasselbe hinauskommt, die *affinen Abbildungen* der Ebene und des Raumes eine besondere Rolle, in die sich die Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte ebensowenig hinein schicken wollen, wie die allgemeinen projektiven Eigenschaften; jene, weil sie bei Parallelprojektion verloren gehen, diese, weil sie einer umfassenderen Gruppe angehören, deren Kenntnis für sie nicht nötig ist; und wenn der Grundsatz, daß man mit den geringsten Mitteln, die zu einem Ziele führen, auskommen soll, in den mathematischen Wissenschaften vielfach die gebührende Beachtung noch nicht gefunden hat, so dürfte es gerade deshalb angebracht sein, in einzelnen Fällen seine Geltung zu erproben. Beschränkung auf aff. Abb.

Am wenigsten Schwierigkeiten macht es, die Ellipse und das Ellipsoid auf Grundlage der Affinität zu behandeln, da sie die affinen Bilder der als bekannt vorauszusetzenden Gebilde Kreis und Kugel sind, und da die Eigenschaften *senkrechter Spiegelung* (Symmetrie) bei affiner Abbildung in solche einer i. a. *schiefen Spiegelung* übergehen.

Um aber die durch affine Abbildung aus Kreis und Kugel für Ellipse und Ellipsoid gewonnenen Sätze auch auf andre Gebilde zu übertragen, bedarf es einer Beziehung, die verschieden geartete Kurven oder Flächen 2. O. unter einander verknüpft, und eine solche ist die *„harmonische Zuordnung“* zweier Kurven oder Flächen 2. O. Und wenn durch diese Beziehung auch nur Mittelpunktskurven und -Flächen mit ebensolchen, und Parabeln

und Paraboloide mit ebensolchen zu verknüpfen sind, so leitet sie doch auch zu einer allgemeinen Betrachtung hinüber, die gleichmäßig alle Kurven und Flächen der 2. O. umfaßt.

I. Reelle und ideelle Achsen und Scheitel der Flächen 2. O. Imaginäre Flächen.

Kurven 2. O. mit Mittelp.

Zunächst sei als bekannt vorausgesetzt, daß die Flächen 2. O. durch ihre Hauptschnitte bestimmt sind, und es soll die Konstruktion beliebiger Punkte und Berührebenen aus möglichst einfachen Bestimmungsstücken später folgen. Es mögen zuerst *ebene Gebilde* betrachtet werden. Bei einem Kegelschnitt mit Mittelpunkt spielen in vielen Untersuchungen die beiden Achsen und die unendlich ferne Gerade eine ganz gleiche Rolle und werden dann zweckmäßig unter der Bezeichnung der „Hauptgeraden", die das „Hauptdreieck" bilden, zusammengefaßt. Es müssen dann auch mit den Scheiteln die unendlich fernen Punkte des Kegelschnittes und mit den Scheiteltangenten die Asymptoten als gleichartig aufgefaßt werden, sodaß man jene als zwei (unendlich ferne) Scheitel und die Asymptoten als Scheiteltangenten bezeichnen kann.

Bei der *Ellipse* sind die beiden Scheitelpaare und das Rechteck ihrer Tangenten reell, dagegen die beiden unendlich fernen Punkte, sowie die Asymptoten imaginär. Man kann aber diese imaginären Paare leicht durch eine Involution darstellen, und zwar die Asymptoten durch die Involution konjugierter Durchmesser. Nach v. STAUDT[1]) wählt man zur Bestimmung einer Involution, die ein imaginäres Paar darstellen soll, nicht zwei beliebige Paare, sondern solche, die zueinander harmonisch sind; und nimmt man insbesondere für das erste Paar die beiden Achsen, so bestimmen sich daraus als zweites Paar die beiden konjugierten Durchmesser, deren Winkel von den Achsen halbiert werden, das sind die Diagonalen des Rechtecks der Scheiteltangenten. Diese beiden Geraden sind für jede Ellipse eindeutig bestimmt und stellen ihrerseits eindeutig die Asymptoten dar, da man sich zu ihnen als zweites Paar der Involution noch ihre Winkelhalbierenden hinzudenken muß. Sie heißen die *ideellen Asymptoten*, und ihre Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden die *ideellen unendlich fernen Punkte* (ideellen unendlich fernen Scheitel) *der Ellipse*.

[1]) Im folgenden Abschnitt wird eine Darstellung der hier in Betracht kommenden v. STAUDTschen Sätze gegeben, die nur Kongruenz und Affinität, aber nicht die allgemeine Projektivität benützt.

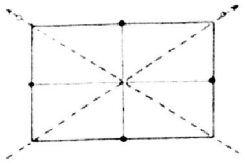


Fig. 1.

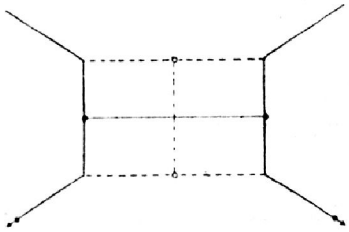


Fig. 2.

Bei der *Hyperbel* entspricht nach dem Gesagten jenem Scheiteltangenten-Rechteck ein Viereck, das in den reellen Scheiteltangenten das eine Paar und in den Asymptoten das andere Paar von Gegenseiten hat, und bei dessen Durchlaufen man auf einer Scheiteltangente vom Schnittpunkt mit einer Asymptote über den Scheitel hinaus bis zum Schnittpunkt mit der anderen Asymptote zu laufen hat, dann auf dieser über den unendlich fernen Scheitel hinweg bis zur anderen Scheiteltangente u. s. f. Die „Diagonalen" dieses Vierecks, d. h. die Verbindungsgeraden der Gegenecken, sind parallel zu der „reellen Achse" (d. h. derjenigen, die das reelle Scheitelpaar enthält). Diese beiden Geraden heißen die *ideellen Scheiteltangenten* und ihre Schnittpunkte mit der zweiten, der „ideellen Achse" heißen die *ideellen Scheitel der Hyperbel* (die Entfernung der beiden Scheitel heißt dann die „Länge der ideellen Achse"). In der Tat stellt das ideelle Scheiteltangentenpaar zusammen mit dem aus der parallelen Achse und der unendlich fernen Geraden bestehenden zweiten Geradenpaar die Involution der imaginären Scheiteltangenten dar, und die Schnittpunkte dieser beiden Geradenpaare mit der zweiten Achse die Involution der imaginären Scheitel.

Die beiden Figuren für Ellipse und Hyperbel stimmen völlig überein, nur wechselt in beiden die Bedeutung der reellen und ideellen Geraden und Punkte, und man kann diesen beiden Kegelschnitten noch einen dritten, die *„imaginäre Ellipse"* an die Seite stellen und sie dadurch bestimmen, daß man beide Achsen, und in Folge dessen auch die Seiten und Diagonalen des Rechtecks als ideell ansieht; von ihr wird dann die erstgenannte Kurve in der Bezeichnung als „reelle Ellipse" unterschieden. Die geometrische Bedeutung der imaginären Ellipse wird später erörtert werden.

Wir fassen die Merkmale der dreierlei Figuren zusammen:

Zwei auf einander senkrechte Strecken, die einander gegenseitig halbieren, können als Achsen von drei Arten von Kegel-

schnitten aufgefaßt werden. Nimmt man nämlich beide als reell oder beide als ideell, so erhält man eine reelle oder eine imaginäre Ellipse, nimmt man aber die eine als reell, die andre als ideell, so erhält man eine Hyperbel.

In allen drei Fällen sind die Seiten und Diagonalen des Rechtecks, das die beiden gegebenen Strecken zu seinen Mittellinien hat, die sechs Scheiteltangenten des Kegelschnitts; und zwar *sind die Diagonalen* (als Scheiteltangenten für die unendlich fernen Punkte) *nur dann als reell anzusehen, wenn die eine Achse reell, die andere ideell ist, in jedem anderen Falle aber als ideell;* und da die Endpunkte einer Achse reelle oder ideelle Scheitel sind, je nachdem es die Achse ist, so folgt:

Nach der Anzahl der reellen Scheitel gibt es zweierlei Mittelpunkts-Kegelschnitte, nämlich reelle (reelle Ellipse und Hyperbel) mit zwei reellen Scheitelpaaren und imaginäre (imaginäre Ellipse) mit keinem reellen Scheitel.

Durch ein Rechteck sind auf die angegebene Weise *vier Kegelschnitte* bestimmt (zwei Hyperbeln, da jede von den beiden Achsen als die reelle genommen werden kann) und je zwei von diesen vier Kurven heißen *einander harmonisch zugeordnet.*

Anmerkung. Es sei hier noch auf einige weitere Beziehungen zwischen diesen Figuren bei Ellipse und Hyperbel aufmerksam gemacht, die, wie es scheint, trotz ihrer Einfachheit bisher nicht beachtet worden sind. Bei Ellipse und Hyperbel schneiden die ideellen Scheiteltangenten (d. h. die Diagonalen des Vierecks der reellen Scheiteltangenten) die Kurve in reellen Punktepaaren, den „Diagonalpunkten". Der gegenseitige Abstand der Punkte eines solchen Paares hat zur Länge der Diagonale bei der Ellipse das Verhältnis $1:\sqrt{2}$, bei der Hyperbel das umgekehrte Verhältnis. Die Tangente eines Diagonalpunktes geht nach einem ideellen Scheitel und sein Krümmungsmittelpunkt wird auf seiner Normalen so gefunden, daß man diese mit dem Träger des ideellen Scheitelpaares, sowie mit den Trägern der beiden reellen Scheitelpaare schneidet und von dem ersten Schnittpunkt zu den beiden anderen den 4. harmonischen sucht; also bei der Ellipse das Stück der Normale zwischen den Achsen halbiert, bei der Hyperbel das Stück zwischen der ideellen und reellen Achse über die letztere hinaus weiterträgt.

Diese Elemente, zusammen mit den Krümmungskreisen der Scheitel bilden die beste Unterlage für das genaue Verzeichnen der Ellipse[1]) wie der Hyperbel.

[1]) Man vergl. CHR. WIENER, Verhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins zu Karlsruhe, Bd. XI „Über die Schönheit der Linien", Anhang, 1890 (1891).

Die Betrachtungen lassen sich unmittelbar auf Flächen 2. O. mit Mittelpunkt übertragen. Bei ihnen tritt außer den durch je zwei der Achsen gelegten „Hauptebenen“ als vierte noch die unendlich ferne Ebene auf; diese Ebenen bilden das „Haupttetraeder“. Die Kanten dieses Tetraeders treffen die Fläche in sechs Paaren von Scheiteln, die gleichzeitig Scheitel für die „Hauptschnitte“ sind, d. h. für die Kegelschnitte, in denen die Fläche von den Hauptebenen getroffen werden, so daß jeder Scheitel in zwei Hauptebenen liegt. Da die Scheitelberührebene auf jeder endlichen Hauptebene, in der der Scheitel liegt, senkrecht steht (wegen der Symmetrie der Fläche zu diesen Hauptebenen), so kann man die Eigenschaften des früher betrachteten Rechtecks auf ein rechtwinkeliges Parallelepiped übertragen und erhält die folgende Bestimmung der verschiedenen Arten von Mittelpunktsflächen: Flächen 2. O. mit Mittelp.

Man wähle *drei aufeinander senkrechte Strecken,* von denen jede die beiden anderen in der Mitte trifft, *als Achsen einer Fläche 2. O.* und bezeichne die Fläche:

I. als *reelles Ellipsoid*, wenn alle drei Achsen als reell genommen werden;

II. als *zweischaliges Hyperboloid*, wenn zwei Achsen als ideell, eine als reell genommen werden;

III. als *einschaliges Hyperboloid,* wenn zwei Achsen als reell, eine als ideell genommen werden;

IV. als *imaginäres Ellipsoid,* wenn alle drei Achsen als ideell genommen werden.

Die Endpunkte jeder Achse sind die *endlichen Scheitel* und zwar reelle oder ideelle, je nachdem die Achsen reell oder ideell sind. Die in den (reellen oder ideellen) Scheiteln senkrecht auf die Achse errichteten Ebenen sind (reelle oder ideelle) *Scheitelberührebenen* und sie bilden ein rechtwinkeliges Parallelepiped, dessen drei Paare von Diagonalebenen die *Berührebenen der unendlich fernen Scheitel* sind, während jeder dieser Scheitel selbst dadurch bestimmt ist, daß er in der auf seiner Berührebene senkrechten Hauptebene liegt. Und in dieser Ebene wird auf die oben angegebene Weise erkannt, ob er reell oder ideell zu nehmen ist; reell nämlich dann, wenn in dieser Hauptebene eine reelle und eine ideelle Achse liegt, in jedem andern Falle ideell. Daraus folgt, dass nur in den Fällen II. und III. reelle unendlich ferne Scheitelpaare vorkommen, und zwar in beiden Fällen zwei solche Paare; sie liegen in den beiden Hauptebenen, die im Falle II.

durch die reelle, im Falle III. durch die ideelle Achse hindurchgehen.

Danach sind von den sechs Scheitelpaaren der Fläche im I. und II. Falle *drei reell und drei ideell* (es sind dies die nicht geradlinigen reellen Flächen) im III. Fall (den geradlinigen Flächen) sind *vier reell und zwei ideell*, im IV. Fall (dem imaginären Ellipsoid) sind *alle sechs Scheitelpaare ideell.*

Um aus den *reellen Scheitel-Berührebenen* eine Vorstellung dieser Flächen in erster Annäherung zu bekommen, begrenze man jede dieser Ebenen um den Scheitel herum durch ein Viereck, dessen Seiten die endlichen Stücke der Kanten und die durchs Unendliche hindurchlaufenden Stücke der Diagonalen des Parallelepipeds sind. In den beistehenden Figuren sind für die beiden

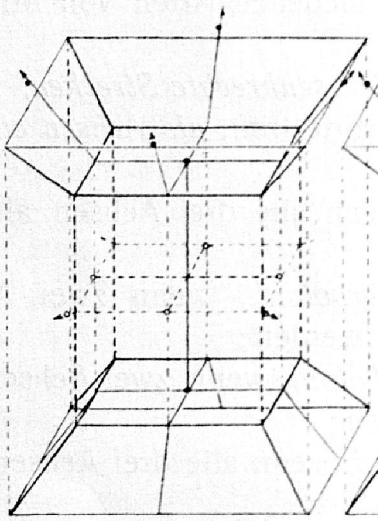


Fig. 3.

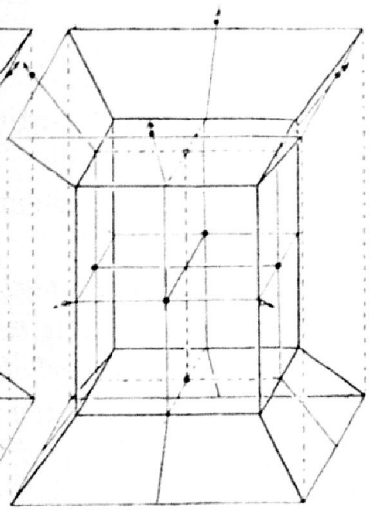


Fig. 4.

Hyperboloide die Berührebenen der reellen Scheitel durch ausgezogene Umrandung, die der ideellen durch teilweise ausgezogene, teilweise gestrichelte Umrandung angegeben; ebenso sind die reellen Achsen durch ausgezogene, die ideellen durch schwächere gestrichelte Linien von einander unterschieden.

Aus der Lage der Scheitel-Berührebenen ist auch die Gestalt der die Fläche längs der Hauptschnitte berührenden Kegel und Zylinder zu entnehmen, die für die drei endlichen Hauptschnitte elliptische oder hyperbolische oder imaginäre Zylinder, für den unendlich fernen Hauptschnitt reelle oder imaginäre Kegel (Asymptotenkegel) sind. Die für die Kegelschnitte ausgesprochenen Sätze lassen sich ohne weiteres auf diese Kegel und Zylinder übertragen, und wir können uns später auf die übertragenen Sätze berufen, auch ohne daß sie hier besonders ausgesprochen werden.

Ist ein Parallelepiped gegeben, so lassen sich im II. und III. Fall die reellen und ideellen Achsen der Fläche auf je drei Arten verteilen, *es sind also durch ein Parallelepiped ein reelles und ein imaginäres Ellipsoid, drei zweischalige und drei einschalige Hyperboloide bestimmt.*

Zwei Flächen, die nach Lage und Länge der drei Achsen übereinstimmen und sich nur durch deren Reell- oder Ideellsein unterscheiden, sollen *harmonisch zugeordnet* heißen.

In dieser Beziehung stehen die beiden in den Modellen dargestellten Hyperboloide unter einander und ebenso das Ellipsoid zu diesen beiden, wenn man ihre Achsen in richtiger Weise ineinandergesetzt und bei dem Ellipsoid die 3 Achsen auf etwa ein Drittel verkürzt denkt. Die Asymptotenkegel der beiden Hyperboloide fallen dann zusammen. Als Achsenverhältnis ist 3:4:5 gewählt. Modelle Nr. 402, 403, 404.

Analytisch drückt sich die Eigenschaft so aus, daß die Gleichung einer jeden der 8 Flächen enthalten ist in:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Zwischen zwei Parabeln, die in derselben Ebene liegen, besteht, wie später gezeigt werden wird, die entsprechende Beziehung, falls sie kongruent sind und einander in den Scheiteln berühren, und zwei solche Parabeln heißen einander harmonisch zugeordnet. Konstruiert man nun für ein beliebig gegebenes Paraboloid zu den Parabeln der beiden Hauptschnitte die harmonisch zugeordneten Parabeln, so erhält man im ganzen 4 Parabeln, von denen je zwei in verschiedenen Ebenen liegende die Hauptschnitte eines Paraboloides bilden, und von den 4 daraus zu bildenden Paraboloiden heißt jedes zu jedem andern harmonisch zugeordnet; zwei von den vieren sind elliptische, zwei hyperbolische Paraboloide. Ihre Gleichungen sind enthalten in: Paraboloide.

$$z = \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}.$$

Die beiden Paraboloide der Modelle Nr. 405 und 406 stehen, in die richtige Lage gebracht, in dieser Beziehung zu einander. Modelle Nr. 405, 406.

II. Die Erzeugung der Kurven und Flächen 2. O. im Gebiet der affinen Abbildungen.[1])

Elliptische Strahleninvol.

Gehen wir wieder von ebenen Gebilden aus, so haben wir, wie erwähnt, die Ellipse als das affine Bild des Kreises aufzufassen und zu ihrer Konstruktion die senkrechte Spiegelung an den Kreisdurchmessern durch eine Spiegelung an den Ellipsendurchmessern in der jedesmaligen konjugierten Richtung zu ersetzen. Um den Zusammenhang beliebiger Paare konjugierter Durchmesser (und damit konjugierter Richtungen) zu erhalten, *ohne sich auf Sätze der projektiven Geometrie zu stützen,* suche man am Kreise eine Konstruktion, die zu jedem Durchmesser den senkrechten liefert und bei Parallelprojektion erhalten bleibt. Eine solche leitet sich aus der Eigenschaft ab, daß die Drehung einer Ebene um einen festen Punkt um einen Rechten ersetzt werden kann durch die Folge zweier senkrechten Spiegelungen an zwei Achsen, die sich unter einem halben Rechten in dem Drehpunkt treffen. Dieser Satz kann auch so ausgedrückt werden: Man erhält zu einem Kreisdurchmesser den senkrechten, wenn man ihn der Folge zweier senkrechten Spiegelungen unterwirft, deren Achsen eine Mittellinie und eine Diagonale eines dem Kreise umschriebenen Quadrates sind. Da bei diesen senkrechten Spiegelungen die Spiegelrichtungen durch die andre Achse und die andre Diagonale gegeben sind, so folgt daraus durch Parallelprojektion:

Ist von einer Ellipse ein konjugiert umschriebenes Parallelogramm gegeben, so erhält man zu jedem Durchmesser den konjugierten, indem man ihn der Folge zweier Spiegelungen unterwirft, nämlich der Spiegelung an einer Mittellinie in der Richtung der anderen Mittellinie und der Spiegelung an einer Diagonale in der Richtung der anderen Diagonale (oder der umgekehrten Folge).

In dieser Konstruktion kommt es auf die Größe des der Ellipse umschriebenen Parallelogramms nicht an, es wird vielmehr jedes mit dem gegebenen ähnlich liegende Parallelogramm mit demselben Mittelpunkt, also auch jede einem solchen Parallelogramm konjugiert eingeschriebene Ellipse dieselbe Beziehung konjugierter Durchmesser liefern. Diese Beziehung heißt für jede dieser ähnlich liegenden Ellipsen die *„Involution konjugierter Durchmesser"* und für sich als Beziehung im Strahlenbüschel genommen *„elliptische Strahleninvolution"*; sie hat zum Sonderfall die *„Recht-*

[1]) Über die geometrischen Voraussetzungen, die den folgenden Betrachtungen zu Grunde liegen, geben die späteren Anmerkungen näheren Aufschluß.

winkel-Involution", d. i. die Involution konjugierter Durchmesser für den Kreis.

Um die Konstruktion von dem Parallelogramm loszulösen, beachte man, daß die Diagonalen und die Mittellinien eines Parallelogramms harmonisch sind und daß bei schiefer Spiegelung eine Gerade und ihr Spiegelbild ein harmonisches Paar zu der Spiegelachse und zu der durch ihren Schnittpunkt in der Spiegelrichtung gezogenen Geraden ist, und erhält so den Satz:

Sind von einer elliptischen Strahleninvolution zwei zu einander harmonische Paare zugeordneter Strahlen gegeben, so erhält man zu einem beliebigen weiteren Strahle den zugeordneten, indem man von ihm den vierten harmonischen zu dem einen Paare und von dem so erhaltenen den vierten harmonischen zum anderen Paare sucht.

Da die elliptische Strahleninvolution als affines Bild der Rechtwinkel-Involution gewonnen wurde, so erkennt man, daß zu jedem Paar der Involution stets ein harmonisch liegendes Paar gefunden werden kann; ebenso beweist man durch diese affine Abbildung in der bekannten Weise, daß unter den Paaren der Involution stets eines von senkrechten Strahlen vorkommt, diese beiden Strahlen heißen die „Achsen der Involution".

Hyperbolische Strahleninvol.

Wie durch das Senkrechtstehen die Strahlen eines Büschels gepaart werden, so kann es auch dadurch geschehen, daß man je zwei solche Geraden einander zuordnet, die zwei fest gewählte senkrechte Geraden des Büschels zu gemeinschaftlichen Winkelhalbierenden haben, und von dieser Zuordnung muß man ausgehen, um auch weiterhin die Anwendung von Sätzen der projektiven Geometrie zu vermeiden. Wir nennen diese Zuordnung eine *„Gleichwinkel-Involution"* und die beiden fest gewählten senkrechten Geraden, von denen jede sich selbst entspricht, ihre „Doppelstrahlen". Durch affine Abbildung geht diese Involution in eine solche über, bei der jedes Paar zu zwei festen Geraden, den Doppelstrahlen, harmonisch liegt. Wir definieren durch diese Eigenschaft eine *„hyperbolische Strahleninvolution"*, und werden sie später als Involution konjugierter Durchmesser für die Hyperbel benützen, wobei die Doppelstrahlen die Asymptoten werden. Es gibt in der Involution ein Paar senkrechter Strahlen, nämlich die beiden Winkelhalbierenden der Doppelstrahlen, sie heißen die „Achsen der Involution".

Bei der elliptischen Involution gibt es nur ein Paar, dessen Strahlen durch die Achsen halbiert werden, diese heißen die *„ideellen Doppelstrahlen" der elliptischen Involution.* Sie stimmen,

wie man sofort übersieht, in der Involution konjugierter Durchmesser einer Ellipse mit den im ersten Abschnitt eingeführten ideellen Asymptoten der Ellipse überein. Durch die ideellen Doppelstrahlen ist dann, wie schon dort bemerkt wurde, die Involution bestimmt, da als zweites Paar ihre Winkelhalbierenden hinzutreten, und so die obige Konstruktion anwendbar wird.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

Konstruktion I. der Strahleninvol.

Konstruktion I. der Involution [aus 2 besonderen Paaren]. *Jede elliptische oder hyperbolische Strahleninvolution ist durch ihre beiden ideellen oder reellen Doppelstrahlen bestimmt. Man erhält zu einem beliebig gegebenen Strahle den in der Involution zugeordneten,*

a) in der elliptischen Involution, indem man von dem gegebenen Strahle den harmonischen zu den ideellen Doppelstrahlen und von dem so erhaltenen den harmonischen zu den Achsen sucht;

b) in der hyperbolischen Involution, indem man von dem gegebenen Strahle den harmonischen zu den reellen Doppelstrahlen sucht.

Im Falle der elliptischen Involution kann die Reihenfolge der Konstruktionen auch umgekehrt werden.

Es lassen sich also die Paare einer hyperbolischen Involution durch *einmaliges,* einer elliptischen Involution durch *zweimaliges Aufsuchen eines vierten harmonischen Strahles* finden.

Da der harmonische eines Strahles zu den Achsen sein Spiegelbild an einer der Achsen (bei senkrechter Spiegelung) ist, so ergibt sich aus *b)* der

Zusatz I. *Von jedem Paare einer elliptischen Strahleninvolution liegt der eine Strahl und das durch Spiegelung an einer Achse erhaltene Bild des andern harmonisch zu den ideellen Doppelstrahlen.*

Harmonisch zugeordnete Involutionen.

Faßt man diese ideellen Doppelstrahlen als die reellen einer hyperbolischen Involution auf, so erhält man den

Zusatz II. *Fallen die ideellen Doppelstrahlen einer elliptischen Strahleninvolution mit den reellen Doppelstrahlen einer hyperbolischen Strahleninvolution zusammen, so stehen die beiden Involutionen in der folgenden Beziehung:*

Sucht man zu einem gegebenen Strahle den zugeordneten in der einen der beiden Involutionen und spiegelt dann den so gefundenen Strahl an einer der Achsen, so erhält man den Strahl, der dem gegebenen in der zweiten Involution zugeordnet ist.

Denselben Strahl erhält man auch, wenn man den gegebenen zuerst spiegelt und zu dem Spiegelbild den zugeordneten zur ersten Involution sucht.

Die beiden Involutionen heißen dann einander ***„harmonisch zugeordnet“.***

Anmerkung I. Allgemeiner wird dieser Name auch solchen Involutionen beigelegt, die aus jenen durch affine Abbildung entstehen, bei denen also die reellen Doppelstrahlen der hyperbolischen Involution ein Paar der elliptischen Involution bilden. Der Zusatz II findet auf Involutionen in dieser Lage entsprechende Anwendung.

Bei Punktinvolutionen in einer Geraden tritt an Stelle der Achsen der unendlich ferne Punkt der Geraden und sein zugeordneter, der *„Mittelpunkt“* der Involution. Bei der „hyperbolischen Punktinvolution“, die zwei *reelle Doppelpunkte* besitzt, liegt der Mittelpunkt in der Mitte zwischen diesen. Bei der „elliptischen Punktinvolution“ gibt es ein Paar zugeordneter Punkte, deren Mitte in den Mittelpunkt fällt, sie heißen die *„ideellen Doppelpunkte“* der Involution. Der Begriff der „harmonisch zugeordneten Involutionen“, wie er im Zusatz II gegeben wurde, sowie seine soeben gegebene Erweiterung finden hier entsprechende Anwendung.

Anmerkung II. Die Verwandtschaftsgleichungen, die in der Abhandlung Nr. 5 die Übersicht der Sätze erleichterten, lassen sich auch hier mit Vorteil einführen.

Ist a_1, a_2 ein Paar senkrechter Durchmesser des Kreises und sind d_1, d_2 ihre Winkelhalbierenden, und bedeuten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Strahleninvolutionen mit den Doppelstrahlen a_1, a_2, bezw. d_1, d_2, so wird die Rechtwinkelinvolution in demselben Strahlenbüschel

$$(1) \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a},$$

wobei

$$\mathfrak{S}^2 = 1, \quad \mathfrak{a}^2 = 1, \quad \mathfrak{b}^2 = 1,$$

sodaß die Involutionen als gleichartige Operationen mit den Spiegelungen aufgefaßt werden können.

Sind nun d_1 und d_2 die Asymptoten und somit a_1 und a_2 die Achsen einer gleichseitigen Hyperbel, so wird

$$(2) \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\mathfrak{a}$$

die Involution konjugierter Durchmesser der rechtwinkligen Hyperbel.

Im Zusatz I sind die Gleichungen (1) auf die Ellipse übertragen, wobei a_1, a_2 die Achsen, d_1, d_2 die ideellen Doppelstrahlen und $\mathfrak{S}$ die Involution konjugierter Durchmesser bedeuten. Die Gleichungen (2) beziehen sich dann auf eine schiefwinklige Hyperbel, deren Involution konjugierter Durchmesser $\mathfrak{b}$ ist. Aus den obigen Gleichungen folgt dann formal

$$(3) \qquad (\mathfrak{S}\mathfrak{b})^2 = 1,$$

und dies ist die Bedingung dafür, daß eine elliptische Involution $\mathfrak{S}$ und

eine hyperbolische Involution $\mathfrak{d}$ einander harmonisch zugeordnet sind, in Anwendung auf Strahlen- oder Punktinvolutionen im Sinne der Anmerkung I.

Außerdem folgt die Gleichung

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{d} = 1,$$

die der einfachste Ausdruck dafür ist, daß jede der drei Involutionen zu den beiden anderen harmonisch ist. Die vier Operationen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{d}$, 1 bilden eine „harmonische Gruppe" (da jede zu den drei übrigen harmonisch ist).

Spiegeleigenschaft der Kurven und Flächen 2. O.

Die Eigenschaft des Kreises, unendlich viele Symmetrie- oder Spiegelachsen zu besitzen, überträgt sich durch Parallelprojektion auf die Ellipse, nur daß die Spiegelung an einem Durchmesser, die beim Kreise in senkrechter Richtung erfolgte, bei der Ellipse in eine i. a. schiefe Spiegelung, nämlich in der dem Durchmesser konjugierten Richtung übergeht. Diese Eigenschaft, die wir die *„Spiegeleigenschaft"* nennen können, kommt auch den Hyperbeln und Parabeln, sowie den Flächen 2. O. zu, denn sie ist nur ein andrer Ausdruck des bekannten Satzes, daß bei Kurven bezw. Flächen 2. O. die Mitten aller parallelen Sehnen in einem Durchmesser bezw. einer Durchmesserebene liegen, und daß umgekehrt jedem Durchmesser bezw. jeder Durchmesserebene eine solche Richtung zugeordnet ist. Bei Ellipse und Hyperbel sind in der „Involution konjugierter Durchmesser" die Durchmesser so gepaart, daß jedem Durchmesser eines Paares die Richtung des andern (die konjugierte Richtung) als Spiegelrichtung zugeordnet ist, bei der Parabel aber, die einen Parallelbüschel von Durchmessern besitzt, besteht keine solche Involution, sondern es müssen die Durchmesser in unmittelbare Beziehung zu den zugeordneten Spiegelrichtungen gesetzt werden. Bei den Mittelpunktsflächen kann in der Richtung, die einer Durchmesserebene als Spiegelrichtung zugeordnet ist, ein Durchmesser gezogen werden, und für die im Strahlenbündel der Durchmesser und Durchmesserebenen so entstehende Zuordnung gilt dann die Beziehung, daß wenn der Durchmesser eine Ebene durchläuft, die zugeordnete Ebene sich um den Durchmesser dreht, der jener Ebene zugeordnet ist. Eine solche Beziehung, wie sie hier im Strahlenbündel der Durchmesser auftritt, heißt bekanntlich ein *„Polarsystem"* und in jener Beziehung findet die *„Grundeigenschaft des Polarsystems"* ihren Ausdruck. Für die Paraboloide, bei denen Durchmesser und Durchmesserebenen einen Parallelbündel bilden, gibt es zwar kein Polarsystem im Durchmesserbündel, aber es bleibt eine den Mittelpunktsflächen eigentümliche Beziehung bestehen: jedem Durchmesser ist eine Stellung zugeordnet; denn dreht sich die Durchmesserebene um

Grundeigenschaft des Polarsystems.

einen Durchmesser, so bleiben alle zugeordneten Spiegelrichtungen einer Ebene parallel (nämlich der Berührebene des Punktes, in dem der Durchmesser das Paraboloid trifft), d. h. sie gehören einer Stellung an und ebenso umgekehrt.

Wenn wir auch bisher nur für Ellipsen und Hyperbeln die Beziehung zwischen Durchmessern und zugeordneten Spiegelrichtungen, die hier durch die Involution konjugierter Durchmesser bestimmt ist, aufgestellt haben, so sind die nun folgenden Sätze und Konstruktionen doch für alle Kurven und Flächen 2. O. so gleichartig, daß kein Anlaß vorliegt, alles für Parabel und Flächen 2. O. später zu wiederholen. Indem ich deshalb ausdrücklich auf die später folgende Ableitung der noch fehlenden Beziehungen zwischen Durchmessern bezw. Durchmesserebenen und ihren zugeordneten Richtungen verweise, gebe ich jetzt die Sätze in der für alle jene Gebilde gemeinsamen Fassung.

Erzeugung I der Kurven und Flächen 2. O.

Erzeugung I der Kurven und Flächen 2. O. [Spiegelverfahren]. *Ist von einer Kurve (Fläche) 2. O. die Beziehung zwischen Durchmessern (Durchmesserebenen) und ihren konjugierten Richtungen gegeben, und außerdem ein der Kurve (Fläche) angehörender Punkt oder eine Tangente (Berührebene), so erhält man beliebige weitere solche Stücke, indem man das gegebene Stück an irgend welchen Durchmessern (Durchmesserebenen) in der jedesmal konjugierten Richtung spiegelt.*

Statt den gegebenen Punkt an einem Durchmesser (einer Durchmesserebene) in der konjugierten Richtung zu spiegeln, kann man durch ihn eine Gerade in dieser Richtung ziehen und sie mit derjenigen Geraden (Ebene) schneiden, die parallel zum Durchmesser (zur Durchmesserebene) im doppelten Abstande vom Punkte gelegt ist. So ergibt sich:

Erzeugung II.

Erzeugung II der Kurven und Flächen 2. O. [Schnittverfahren]. a) *Um für irgend eine Kurve (Fläche) 2. O. aus einem ihrer Punkte beliebige weitere zu finden, ziehe man durch den gegebenen Punkt in beliebiger Richtung eine Gerade und schneide sie mit derjenigen Geraden (Ebene), die zu dem jener Richtung konjugierten Durchmesser (zu der ihr konjugierten Durchmesserebene) parallel ist und von dem gegebenen Punkt nach derselben Seite hin den doppelten Abstand wie dieser Durchmesser (diese Durchmesserebene) hat.*

Da bei den Kurven (Flächen) mit Mittelpunkt sich alle Durchmesser (Durchmesserebenen) in einem Punkte treffen, so ist dies auch mit den im doppelten Abstande gelegten der Fall; der

gemeinsame Punkt ist derjenige, der durch Spiegelung des gegebenen an dem Mittelpunkt der Kurve (Fläche) entsteht, d. h. der „Gegenpunkt" des gegebenen.

Bei den ***Mittelpunktskurven (-Flächen)*** kann man daher auch so verfahren:

b) *Man bestimme zuerst zum gegebenen Punkte den Gegenpunkt, lege durch den einen der beiden Punkte eine Gerade in beliebiger Richtung, durch den andern aber eine Gerade (Ebene) in der konjugierten Richtung (Stellung) und bringe diese Gerade (Ebene) mit jener Geraden zum Schnitt.*

Der letzten Konstruktion entspricht die folgende für Tangenten (Berührebenen). Beim Spiegeln einer Tangente (Berührebene) an einem Durchmesser (einer Durchmesserebene) wird ihr Schnitt mit dem Durchmesser (der Durchmesserebene) auch dem Spiegelbilde angehören; ferner gibt der zu dem Durchmesser (der Durchmesserebene) konjugierte Durchmesser die Spiegelrichtung an, deshalb spiegelt sich sein Schnittpunkt mit der gegebenen Tangente (Berührebene) in seinen Schnittpunkt mit der Gegengeraden (-Ebene), d. h. mit derjenigen, die aus ihr durch Spiegelung am Mittelpunkt hervorgeht. Daraus folgt die

Erzeugung II der Kurven und Flächen 2. O. [Schnittverfahren]. ***c)*** *Um für eine* ***Mittelpunktskurve (-Fläche)*** *2. O. aus einer ihrer Tangenten (Berührebenen) beliebige weitere zu finden, bestimme man zuerst die Gegentangente (-Berührebene) der gegebenen; dann schneide man die eine von beiden mit einem beliebigen Durchmesser, die andre mit dem dazu konjugierten Durchmesser (der konjugierten Durchmesserebene) und lege die Gerade (Ebene) durch die beiden Schnittstücke hindurch.*

Wendet man für Mittelpunktskurven (-Flächen) die Spiegelung gleichzeitig auf einen Punkt und seine Tangente (Berührebene) an unter Benützung von Gegenpunkt und -Tangente (-Berührebene), so erhält man aus *II b* und *II c einen Punkt mit seiner Tangente (Berührebene),* falls man die Konstruktion so beginnt:

in *b)* man ziehe durch den einen jener beiden Punkte eine Gerade in beliebiger Richtung,

in *c)* man schneide den in dieser Richtung gezogenen Durchmesser mit der Tangente (Berührebene) des anderen Punktes.

Konj. Durchmesser und Richtungen.

Im Vorigen ist die Aufgabe, zu jedem Durchmesser die Spiegelrichtung (oder zu jeder Spiegelrichtung den zugeordneten Durchmesser) zu suchen, erst für die Ellipse und Hyperbel gelöst,

zudem sind zur Bestimmung der übrigen konjugierten Durchmesser zwei Paare *in Sonderlage* angenommen. Wir stellen jetzt die Aufgabe so, daß ihre Lösung auch auf die Parabel Anwendung findet:

Es ist aus zwei *beliebigen,* mit ihren konjugierten Richtungen gegebenen Durchmessern zu jedem dritten die konjugierte Richtung zu finden (oder umgekehrt zu jeder dritten Richtung der konjugierte Durchmesser). Die Lösung dieser Aufgabe leitet sich aus der „Spiegeleigenschaft" der Kegelschnitte ab. Ist nämlich ein beliebiges, dem Kegelschnitt eingeschriebenes Dreieck gegeben, so sind die Durchmesser, die nach den Seitenmitten dieses Dreiecks gezogen sind, den betreffenden Seiten konjugiert. Das aus diesen Mitten gebildete Dreieck ist aber den drei Durchmessern eingeschrieben und hat mit dem vorigen parallele Seiten. Der hierin liegende Satz[1]) ist umkehrbar und führt zu folgender Beziehung, in der die Lösung unserer Aufgabe enthalten ist:

Konstruktion II der Strahleninvolution.

Satz und Konstruktion II der Involution [aus 2 beliebigen Paaren]. *Sollen drei Richtungen zu drei gegebenen Durchmessern eines Kegelschnitts konjugiert sein, so lassen sich diesen stets Dreiecke einschreiben, bei denen die Richtung jeder Seite demjenigen Durchmesser konjugiert ist, der durch die gegenüberliegende Ecke hindurchgeht.*

Von einem solchen Dreieck läßt sich ein Eckpunkt (auf einem der gegebenen Durchmesser) oder eine Seite (in einer der gegebenen Richtungen) beliebig annehmen. Zur Lösung der Aufgabe, zu einem dritten gegebenen Durchmesser die konjugierte Richtung (oder zu einer dritten gegebenen Richtung den konjugierten Durchmesser) zu suchen, nehme man die Ecke auf dem dritten gegebenen Durchmesser (oder die Seite in der dritten gegebenen Richtung) an und ergänze das Dreieck nach dem Satze.

Anmerkung III. Um die grundsätzliche Stellung der in diesem Abschnitte vorgetragenen Theorie der Kurven und Flächen 2. O. zu bezeichnen, sei betont, daß in ihr *nirgends der Grundsatz der projektiven Geometrie benützt zu werden braucht* (d. h. der Satz, daß jeder Punkt einer Geraden in einer Projektivität sich selbst entspricht, wenn dies für 3 Punkte zutrifft). Vielmehr ist diese Theorie, weil sie vom Kreise und dem Gebiet der Parallelprojektion ausgeht, durchaus *elementarer Natur,*

[1]) v. Staudts bekannte projektive Verallgemeinerung dieses Satzes (wonach die Gegenseiten eines vollständigen Vierecks auf einer Geraden drei Paare einer Involution ausschneiden) läßt nicht so deutlich die Beziehung zu den Spiegelungen erkennen.

und demgemäß werden öfter Konstruktionen mit Zirkel und Lineal da angebracht sein, wo in der projektiven Geometrie lineare Konstruktionen gefordert werden müßten. Indem ich mir vorbehalte, diesen Stoff an anderer Stelle ausführlicher zu behandeln, schalte ich hier nur eine kurze Übersicht über die wichtigsten Sätze der Kegelschnittslehre, sowie der dabei zur Verwendung kommenden Beweismittel ein.

1. Die Beziehungen harmonischer Paare bedürfen zu ihrer Ableitung nur der *affinen Abbildungen*[1]).

2. Das zum Beweis der Konstruktion auf S. 62 angeführte Verfahren, um aus einem gegebenen Quadrat beliebige weitere senkrechte Strahlenpaare zu finden, stimmt seiner grundsätzlichen Bedeutung nach mit dem von STEINER[2]) angegebenen überein. Die Uebertragung der STEINER'schen Konstruktion auf die Ellipse scheint bisher noch nicht genügend ausgewertet worden zu sein, und doch liefert sie, oder das obige Verfahren, den natürlichsten Beweis des Hauptsatzes, *daß bei Parallelprojektion das Bild einer Ellipse wieder eine Ellipse wird*, wenn als Ellipse das Parallelbild eines Kreises definiert ist. Es geht nämlich das der Ellipse konjugiert umschriebene Parallelogramm (das seinerseits das Bild eines dem Urkreis umschriebenen Quadrates ist) bei Parallelprojektion in ein dem Ellipsenbild konjugiert umschriebenes Parallelogramm über, und für dieses kann man eine Parallelprojektion finden (auf unendlich viele Arten), die es in ein Quadrat überführt; es überträgt sich dabei die Konstruktion konjugierter

---

[1]) In meinen Vorträgen über darstellende Geometrie definiere ich die harmonischen Strahlenpaare durch das Parallelogramm und beweise ihre Eigenschaften mittels perspektiv-affiner und perspeptiv-ähnlicher Abbildungen; die harmonischen Punktepaare einer Geraden aber, die erst bei der Einführung der Perspektive unentbehrlich sind, pflegte ich mittels Perspektive, d. h. kollinearer Abbildung zu behandeln, bis ich (im Sommer 1902) durch Herrn L. BALSER in Darmstadt darauf aufmerksam gemacht wurde, daß auch die Eigenschaften der harmonischen Punktepaare aus der Affinität herzuleiten sind. Sie sind dann als Schnitte einer Geraden mit den vier harmonischen Strahlen eines Strahlenbüschels zu definieren, die als Spur einer affinen Abbildung aufgefaßt wird, woraus die Eindeutigkeit dieser Definition folgt.

Daß auch der Beweis der allgemeineren Sätze über harmonische Stücke im vollständigen Vierseit nicht des Grundsatzes der projektiven Geometrie bedarf, ist bekannt. Es ist aber auch leicht zu beweisen (indem man die Abbildung einer Geraden aus ihrem Spurpunkt und Fluchtpunkt definiert), daß die perspektiv-kollinearen ebenen Systeme ohne räumliche Betrachtungen aus der perspektiv-ähnlichen Abbildung der Ebene hergeleitet werden können.

[2]) JAK. STEINER, „Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises", § 9. (1833). Ges. Werke I, S. 477. Ist O der Mittelpunkt eines Quadrates und liegen die drei Punkte A, B und C so auf seinem Umfang, daß AB einer Quadratseite, BC einer Diagonale parallel ist, so steht OC senkrecht auf OA.

Durchmesser der Ellipse durch die zweifache Parallelprojektion in die Konstruktion senkrechter Strahlenpaare in der Ebene dieses Quadrates. Dann folgt aber aus der ersten (oder der zweiten) der obigen Ellipsenkonstruktionen (Seite 67), die sich ebenfalls auf das Bild und das abermalige Bild der Ellipse überträgt, daß dieses letzte ein Kreis ist, und damit auch umgekehrt das Ellipsenbild das Bild dieses Kreises, also nach der Definition selbst eine Ellipse.

Dieser Beweis[1]) benützt zwar die Kongruenz ebener Figuren, aber keine Verhältnisse von Maßzahlen; er kann sofort auf den Fall übertragen werden, bei dem ein Kreis zentral in eine Ellipse projiziert wird, ohne daß die Kenntnis der Doppelverhältnisse oder der Grundsatz der projektiven Geometrie vorauszusetzen wäre.

3. Bei der *Hyperbel* wird in der gegebenen Definition ein Punkt bevorzugt, aus dem nämlich die anderen durch schiefe Spiegelung hervorgehen. Hier ist zu beweisen, daß wenn man an die Stelle des ersten irgend einen der neuen setzt, man durch Spiegelung dieses neuen (an Durchmessern in der jeweils konjugierten Richtung) keine anderen Punkte erhält, wie vorher. Hierzu bedarf man z. B. des Satzes von der Flächengleichheit der durch beliebige Hyperbelpunkte und die Asymptoten bestimmten Parallelogramme, sowie dessen Umkehrung; beide, Satz wie Umkehrung, ergeben sich sofort aus der schiefen Spiegelung. Statt der Flächengleichheit kann man wiederum die Kongruenz der ebenen Figuren als Beweismittel nehmen, indem man für die rechtwinklige Hyperbel den Satz beweist, daß die Seitenmitten eines dieser Kurve eingeschriebenen Dreiecks mit dem Kurvenmittelpunkt auf einem Kreise liegen.[2]) Daraus folgt leicht jene Eigenschaft, die sich dann durch Affinität auf die schiefwinklige Hyperbel überträgt.

Für die Ellipse folgt die Ersetzbarkeit des zu spiegelnden Punktes durch einen beliebigen Kurvenpunkt mittels Affinität aus dem Kreis.

Daraus ergibt sich für Ellipse und Hyperbel die „Spiegeleigenschaft“ (S. 66 oben). Setzt man dann zur Erzeugung dieser Kurven die Konstruktion I der Involution (S. 64) voraus, so folgt daraus (vgl. S. 68) die Konstruktion II.

4. Es ist der Beweis zu erbringen, daß auch umgekehrt eine durch die zweite Konstruktion konjugierter Durchmesser und Richtungen (S. 68) definierte Beziehung stets mit der übereinstimmt, die aus der ersten Konstruktion (S. 64) hervorgeht und somit entweder eine elliptische oder eine hyperbolische Involution ist, und daß man bei der zweiten Konstruktion statt der gegebenen Paare konjugierter Durchmesser, sie mögen a, a' und b, b'

[1]) In meinen Vorträgen über darstellende Geometrie gebe ich diesen Beweis seit dem W. S. 1895/96.

[2]) Auch auf dieses Beweisverfahren (mittels der Kongruenz allein) hat mich Herr L. BALSER aufmerksam gemacht.

heißen, irgend zwei andre Paare zur Bestimmung der Involution wählen kann. Beides erledigt sich, indem man die Paare in solche andere affin abbildet, für die sich der gesuchte Zusammenhang unmittelbar ergibt. Für Ellipse und Hyperbel wird hierzu bei beliebig gewählter Affinitätsspur das Bild des Mittelpunktes in übereinstimmender Weise gefunden: Man ordne die vier Schnittpunkte der gegebenen Durchmesser so in Paare, daß jedes Paar durch das andre getrennt wird, und nehme jedes Paar als Endpunkte eines Kreisdurchmessers. Einer der beiden Schnittpunkte der so bestimmten Kreise ist der Scheitel der gesuchten Strahleninvolution, die für die Ellipse, wo a, a' und b, b' einander trennen, eine Rechtwinkel-Involution wird; bei der Hyperbel, für die a, b und a', b' einander trennen mögen, werden die beiden Winkelhalbierenden der affinen Bilder von a und a' zugleich Winkelhalbierende für die affinen Bilder von b und b' sein; nimmt man diese also als Asymptoten einer (gleichseitigen) Hyperbel, so erhält man die gewünschten Beziehungen durch rückwärtige affine Abbildung der für diese Gleichwinkel-Involution bekannten Sätze.

5. Bei der *Parabel* ist jeder Durchmesser mit einer Richtung, nämlich seiner konjugierten, gepaart; und um aus zwei solchen Paaren weitere in beliebiger Anzahl zu bestimmen, kann man von dem (auch für die anderen Kurven 2. O., sowie für die Flächen 2. O. entsprechend geltenden) Satze Gebrauch machen, daß jeder Durchmesser mit seiner konjugierten Richtung an jedem anderen Durchmesser in dessen konjugierter Richtung gespiegelt, wieder einen Durchmesser mit seiner konjugierten Richtung liefert; dieser Satz läßt das System konjugierter Stücke als ein „geschlossenes Spiegelsystem" erkennen (man vergleiche die Abhandlung Nr. 4, S. 16). Dies ergibt unter Anwendung des Spiegelverfahrens sofort die bekannteste Konstruktion zur Bestimmung beliebig vieler Parabelpunkte, die auf gleichweit unter einander abstehenden Durchmessern liegen. Der Uebergang zu Durchmessern, die beliebig dazwischen liegen, führt auf die Eigenschaft, daß wenn man eine beliebige Anzahl von Durchmessern mit einer festen Geraden schneidet und in ihren konjugierten Richtungen Geraden durch einen festen Punkt zieht und mit irgend einem Durchmesser schneidet, man auf diesem und auf der festen Geraden ähnliche (affine) Punktreihen erhält.[1])

---

[1]) Hierbei kommt der Satz zur Verwendung, daß „ähnliche Punktreihen" (d. h. solche, die auf parallelen Geraden zentral auf einander projiziert werden) gleichzeitig „affine Punktreihen" sind (d. h. solche, die durch mehrfache Parallelprojektion auf einander bezogen sind). Ueber die Bedeutung dieses Satzes für die Grundlagen der Geometrie vergleiche man meine Abhandlung: „Weiteres über Grundlagen und Aufbau der Geometrie", Jahresbericht der deutsch. Math.-Ver. Bd. III., Nr. 2, S. 17, 18.

Statt dieses Satzes kann man unter Benützung des Brennpunktes wiederum die Kongruenz der ebenen Figuren zu grunde legen.

Zu derselben Konstruktion kommt man, wenn man die zwischen drei Durchmessern und ihren konjugierten Richtungen bestehende Beziehung (S. 69) auf die Parabel anwendet, und es ergibt sich aus dieser Uebereinstimmung auch für die Parabel die Möglichkeit, den Urpunkt der Spiegelung durch irgend einen seiner Bildpunkte zu ersetzen.

Durchmesser-Polarsysteme der Mittelpunktsflächen.

Es sollen nun für die Mittelpunktsflächen 2. O. die Polarsysteme im Durchmesserbündel abgeleitet werden.

Senkrechtstehen im Raume.

Die Zuordnung der Strahlen des Bündels auf ihre senkrechten Ebenen erfüllt die „Grundeigenschaft des Polarsystems“ (vgl. S. 66) und diese Zuordnung liefert das Durchmesser-Polarsystem für die um den Scheitel des Bündels als Mittelpunkt gelegten Kugeln. Geht man von einem Würfel aus, der einer solchen Kugel umschrieben ist, so liefert jene Grundeigenschaft für unsere nur des Ziehens von Parallelen bedürfenden Konstruktionen senkrechter Stücke die Erweiterung auf den Raum. Um nämlich zu irgend einem gegebenen Durchmesser die senkrechte Ebene zu suchen, lege man durch ihn und je eine Achse des Würfels eine Ebene und konstruiere zu dieser den senkrechten Strahl, indem man die Ebene mit der zur jeweils gewählten Achse senkrechten Mittelebene schneidet, und zur Schnittgeraden in der Mittelebene entweder nach der STEINERschen Konstruktion oder mittelst zweimaliger Konstruktion eines vierten harmonischen Strahles die Senkrechte sucht. Zur STEINERschen Konstruktion benutzt man das Quadrat, in dem die Mittelebene den Würfel schneidet, zur anderen die Mittellinien und Diagonalen dieses Quadrates. So erhält man in jeder der drei Mittelebenen einen Strahl und von diesen drei Strahlen dienen zwei zur Bestimmung der gesuchten senkrechten Ebene, die dritte zur Probe.

Ist die Ebene gegeben, so erhält man den dazu senkrechten Strahl, indem man die einzelnen Schritte der vorigen Konstruktion in umgekehrter Reihenfolge ausführt.

Anmerkung IV. Die STEINERsche Konstruktion (S. 70) und ihre Übertragung auf die Ellipse (die Mittelpunktsflächen 2. O.) ist ihrer Fassung nach weniger einfach, wie die andre Lösung der Aufgabe, die auf zweimaliger Konstruktion harmonischer Strahlen beruht (S. 63). Ist aber ein der Kurve (Fläche) konjugiert umschriebenes Parallelogramm (Parallelepiped) gegeben, und wird zur Konstruktion der Punkte der Kurve (Fläche) das „Schnittverfahren“ auf die Berührpunkte zweier Gegenseiten des Parallelogramms (Parallelepipeds) angewandt, so erspart man beim übertragenen STEINERschen Verfahren einige Linien gegenüber der andern Konstruktion. Es kann hier jedoch nicht näher auf diese Vereinfachungen eingegangen werden.

Die auf zweimaligem Aufsuchen eines vierten harmonischen Strahls beruhende Konstruktion lehrt die geringste Anzahl von Linien kennen, durch die *im Strahlenbündel* das Senkrechtstehen bestimmt wird. Vorhin waren zweierlei Linien nötig, nämlich die *drei* Verbindungsgeraden der Mitten der Gegenseiten des Würfels (die Achsen) und die *sechs* Verbindungsgeraden der Mitten der Gegenkanten, und es ist zweckmäßig, diesen noch die *vier* Verbindungsgeraden der Gegenecken hinzuzufügen. Von diesen bilden die *sechs* den regelmäßigen Sechsstrahl, der gleichzeitig ein „geschlossenes Spiegelsystem" darstellt (Modell Nr. 115), und sie werden von den drei Achsen zu einem geschlossenen Spiegelsystem von *neun* Strahlen ergänzt, die *vier* Geraden aber bilden einen regelmäßigen Vierstrahl im Bündel. Durch diese vier lassen sich nun die vorigen leicht bestimmen. Faßt man nämlich die *vier* Geraden als Kanten eines „vollständigen Vierkantes" auf, so schneiden sich von seinen sechs Seiten je zwei gegenüberliegende in einer Achse (als Nebenkante) und die durch die Achsen gelegten Ebenen (die Nebenseiten) schneiden aus den sechs Seiten jenen Sechsstrahl aus. Dies liefert den folgenden Satz, der als die Erweiterung des STEINERschen Satzes auf den Raum anzusehen ist:

Im Strahlenbündel läßt sich aus einem (nicht ebenen) regelmäßigen Vierstrahl (S. 16, 2) durch alleinige Anwendung der Konstruktion harmonischer Strahlen das System senkrechter Stücke finden.

Je zwei Gegenebenen unseres vollständigen Vierkantes sind auf einander senkrecht, also zur Kugel *konjugiert*; nun nennt man bei der Kugel (und entsprechend auch bei beliebigen Polarsystemen im Bündel) ein Vierkant, bei dem dies eintrifft, ein *„Polvierkant"*. Während aber im allgemeinen ein Polvierkant schon dadurch entsteht, daß man ein beliebiges Dreikant wählt, durch jede Kante eine zur Gegenseite senkrechte Ebene legt und diejenige Gerade, die diese drei Ebenen, wie bekannt, gemeinsam haben, als vierte Kante jenen dreien hinzufügt, so hat das hier vorliegende Polvierkant noch die besondere Eigenschaft, *daß sein Nebendreikant aus drei Ebenen besteht,* von denen je zwei auf einander senkrecht stehen, d. h. *die ein „Poldreikant" bilden.*

Durchmesser-Polarsystem des Ellipsoids.

Denken wir uns nun den Raum einer affinen Abbildung unterworfen, so verwandelt sich dabei die Kugel mit dem umschriebenen Würfel in ein *Ellipsoid* mit einem konjugiert umschriebenen Parallelepiped, ferner jede Würfeldiagonale in eine Diagonale des Parallelepipeds und endlich das System senkrechter Durchmesser

und Durchmesserebenen der Kugel in das Durchmesser-Polarsystem des Ellipsoids. Vier Strahlen aber, die als Diagonalen eines Parallelepipeds aufzufassen sind, haben im Bündel keine besondere Lage mehr, vielmehr kann jeder Vierstrahl dafür gewählt werden, von dem keine drei Strahlen in einer Ebene liegen. Es folgt dies daraus, daß wenn man den Vierstrahl als vollständiges Vierkant ansieht, jede parallel zu einer Nebenseite gelegte Ebene die vier Strahlen in den Ecken eines Parallelogramms schneidet, während die am Scheitel des Bündels gespiegelte Ebene vier weitere Punkte ausschneidet, die jene zu den Ecken eines Parallelepipedes ergänzen.

Ein beliebiges nicht ebenes Vierkant kann daher stets als affines Bild des durch die vier Diagonalen eines Würfels gegebenen Vierkants angesehen werden und bildet somit für das Durchmesser-Polarsystem des Ellipsoids ein „Polvierkant“ von der oben bezeichneten besonderen Art, und wir haben den Satz:

Das Durchmesser-Polarsystem eines Ellipsoids ist durch ein beliebig gegebenes Vierkant bestimmt, wenn dieses in dem Polarsystem als ein solches Polvierkant angesehen wird, dem als Nebendreikant ein Poldreikant zugehört.

Die Konstruktion konjugierter Durchmesser und Durchmesserebenen wird (wie beim Senkrechtstehen, S. 73) so ausgeführt, daß man in zwei Seiten dieses Poldreikants (nach Bedarf zur Probe auch in der dritten) zweimal einen vierten harmonischen Strahl bestimmt.

Durchmesser-Polarsystem der Hyperboloide.

Um zu dem Durchmesser-Polarsystem der *Hyperboloide* zu kommen, gehen wir wieder von dem der Kugel aus und wenden darauf dasselbe Verfahren an, das von der Rechtwinkel-Involution zur Gleichwinkel-Involution, und allgemeiner von der elliptischen zur hyperbolischen Involution führte. Hierzu greifen wir unter den Durchmesserebenen der Kugel irgend eine, sie heiße S, als feste Spiegelebene heraus und ordnen im Durchmesserbündel einem jeden Strahle p diejenige Ebene Q zu, die man erhält, indem man zum Strahle p die senkrechte Ebene P sucht und diese an der festen Ebene S senkrecht spiegelt. Da zwei auf einander senkrechte Stücke p und P durch senkrechte Spiegelung in wiederum senkrechte Stücke q und Q übergehen, so kann man noch auf anderem Wege vom Strahle p zur Ebene Q gelangen, indem man nämlich p an S nach q spiegelt und zu diesem Strahle die senkrechte Ebene sucht. Dann führt auch jeder dieser beiden Wege dazu, umgekehrt zu jeder Ebene Q diejenige Gerade p zu bestimmen, der sie zugeordnet ist.

Hierin ist aber schon die „Grundeigenschaft des Polarsystems“ (S. 66) enthalten. Geht nämlich eine Ebene H durch die Gerade p, so kann man die der Ebene und der Geraden zugeordneten Stücke so suchen, daß man zuerst ihre senkrechten Stücke bestimmt, nämlich die Gerade h senkrecht zur Ebene H und die Ebene P senkrecht zur Geraden p, und diese beiden an S spiegelt, nämlich h nach g und P nach Q. Da nun im Bündel von einer Ebene und einer in ihr liegenden Geraden sowohl die senkrechten Stücke wie auch die Spiegelbilder wieder in einander liegen, so liegt h in P und g in Q. Dreht sich also H um p, so dreht sich g in Q und damit ist die „Grundeigenschaft“ bewiesen.

Durchläuft eine Gerade des Bündels insbesondere die Ebene S, so deckt sich jedesmal die zur Geraden senkrechte Ebene mit ihrem Spiegelbild. Eine solche Gerade r steht also auf ihrer zugeordneten Ebene R senkrecht, und die Schnittgerade r' von R und S ist der Geraden r in der Rechtwinkel-Involution der Ebene S zugeordnet.

Und durchläuft eine Gerade p des Bündels eine zu S senkrechte Ebene R, so dreht sich ihre zugeordnete Ebene Q um die zu R senkrechte Gerade r' bleibt also auch senkrecht zu R. Die Schnittgerade q' von Q und R wird dann dadurch erhalten, daß man zu p in der Ebene R die Senkrechte p' sucht und diese an S spiegelt. Hier sind p und p' einander in der Rechtwinkel-Involution der Ebene S zugeordnet, und p' und q' in der Gleichwinkel-Involution, die zu Doppelstrahlen die Schnittgerade von R und S und die dazu senkrechte Gerade besitzt. Dann folgt aber aus der Anm. II auf S. 65, daß auch p und q' eine *Gleichwinkel-Involution* bilden, deren Doppelstrahlen gegen jene beiden Doppelstrahlen, also auch gegen die Ebene S unter einem halben Rechten geneigt sind. Dabei liegt jeder dieser Doppelstrahlen in der ihm durch das Polarsystem zugeordneten Ebene; man nennt solche Stücke „Ordnungsstrahlen“ und „Ordnungsebenen“ des Polarsystems.

Die Gesamtheit der Ordnungsstrahlen des Polarsystems bildet einen mit der Öffnung eines rechten Winkels um eine zur Spiegelebene S *senkrechte Achse beschriebenen Drehkegel, während die Ordnungsebenen diesen Kegel einhüllen.*

Der Kegel heißt „*Ordnungskegel*“ des Polarsystems im Durchmesserbündel.

Der reelle und der imaginäre Kegel.

Zur einfachsten Bestimmung des Polarsystems wählt man nun, wie bei dem früheren, drei zu einander senkrechte Ebenen, darunter die Spiegelebene S. In diesen Ebenen, deren Schnitt-

geraden als Achsen bezeichnet seien, ist auf die soeben angegebene Weise je eine Involution bestimmt, nämlich in S durch die beiden Achsen und ihre Winkelhalbierenden, also durch zwei harmonische Paare, und in jeder der beiden anderen Ebenen durch die Winkelhalbierenden der Achsen als Doppelstrahlen der Involution. Aus der „Grundeigenschaft des Polarsystems" gewinnt man dann genau wie früher die Zuordnung beliebiger Durchmesser und Durchmesserebenen mittels dieser drei Involutionen.

Wiederum ist es das vollständige Vierkant eines regelmäßigen Vierstrahles, das die bestimmenden Stücke in sich enthält. Aber diesmal sind zwei Paare von Gegenseiten des Vierkantes Ordnungsebenen und sie berühren den Ordnungskegel in vier von den Strahlen des Sechsstrahls, in dem die Ebenen der Achsen von den sechs Seiten des vollständigen Vierkants getroffen werden.[1])

Unterwirft man nun die ganze Figur einer affinen Abbildung, so übertragen sich alle Konstruktionen auch auf das Bild, da sie ganz auf die Konstruktion harmonischer Strahlen zurückgeführt worden sind. Dabei geht aber der besondere Drehkegel (von der Öffnung eines Rechten) in einen beliebigen Kegel über.

Wir nehmen vorerst die affine Abbildung so an, daß die Bilder der Achsen zu einander senkrecht, also die Achsen des Bildkegels sind. Wir wollen nun die Figur des vollständigen Vierkants, das wieder drei Spiegelebenen besitzt, mit denjenigen Figuren in Beziehung setzen, die wir im ersten Abschnitt dieser Abhandlung untersucht haben. Schneiden wir das vollständige Vierkant mit irgend einer Ebene, die zu der Bildebene von S parallel ist, so erhalten wir ein vollständiges Rechteck; von diesem berühren vier Seiten (nämlich die eigentlichen Rechteckseiten) die Schnittellipse des Kegels mit unserer Ebene in ihren Scheiteln, während die beiden letzten Seiten (die Diagonalen des Rechtecks im gewöhnlichen Sinne) diejenigen sind, die wir früher als ideelle Scheiteltangenten bezeichnet haben.

Daher müssen wir von dem dreifach symmetrischen vollständigen Vierkant sagen, daß zweimal zwei seiner Gegenseiten reelle, die zwei letzten Gegenseiten aber ideelle Berührebenen des Kegels oder Ordnungsebenen des Polarsystems seien.

[1]) In den Figuren 3 und 4, die den allgemeineren Fall darstellen, in denen nämlich an Stelle des der Kugel umschriebenen Würfels ein rechtwinkliges Parallelepiped tritt, ist der Sechsstrahl durch Pfeile und die 4 Ordnungsebenen durch ihre Erweiterungen über das Parallelepiped hinaus angedeutet.

Und dem entsprechend sagen wir beim Durchmesser-Polarsystem des Ellipsoids von dem zu seiner Bestimmung gewählten dreifach symmetrischen Vierkant, daß seine drei Paare von Gegenseiten ideelle Ordnungsebenen des Polarsystems oder ideelle Berührebenen eines „imaginären Kegels" seien.

Wir sprechen im ersten Falle von dem *„Polarsystem des reellen Kegels"*, im zweiten Falle von dem *„Polarsystem des imaginären Kegels."*

Die drei Ebenen der Achsen schneiden dann die zugehörigen reellen oder ideellen Ordnungsstrahlen ber beiden Polarsysteme d. h. die reeellen oder ideellen Erzeugenden der beiden Kegel aus.

Läßt man nun bei der affinen Abbildung die Annahme vom Vorhandensein dreier Ebenen senkrechter Symmetrie fallen, läßt aber die vorher eingeführten Bezeichnungen bestehen, so erhält man die folgende einheitliche Darstellung der beiden Polarsysteme:

Konstruktion des Polarsystems der Kegel 2. O. *a) Das Polarsystem eines reellen oder imaginären Kegels läßt sich durch ein vollständiges Vierkant bestimmen, dessen Scheitel mit dem Kegelscheitel zusammenfällt. Das Nebendreikant des vollständigen Vierkants wird ein Poldreikant des Polarsystems, und die drei Paare von Gegenseiten des Vierkants werden ideelle oder reelle Berührebenen des Kegels, und zwar beim imaginären Kegel alle drei Paare ideell, beim reellen Kegel ein Paar ideell und zwei Paare reell; die Schnittgeraden der Nebenseiten des Vierkants mit je einem Paare von Gegenseiten werden ideelle oder reelle Erzeugende des Kegels in diesen ideellen oder reellen Berührebenen.*

b) Ein in einer Ebene des Dreikants liegender Strahl und je eine durch die gegenüberliegende Kante gehende Ebene sind im Polarsystem einander so zugeordnet, daß in der Ebene des Dreikants ihre Schnittgerade mit jener Ebene und der zugeordnete Strahl eine Involution bilden; die in der Ebene des Dreikants liegenden ideellen oder reellen Kegelerzeugenden sind die ideellen oder reellen Doppelstrahlen dieser Involution, und es kann somit zu jedem Strahl der in der Involution zugeordnete durch zwei- oder einmalige Konstruktion eines vierten harmonischen Strahles gefunden werden (nach dem Satz auf S. 64, sowie Zusatz II und Anmerkung I).

c) Es wird dann im Bündel zu einem beliebig gegebenen Strahle oder zu einer beliebig gegebenen Ebene das zugeordnete Stück nach der „Grundeigenschaft des Polarsystems" gefunden, indem man nämlich, wenn der Strahl gegeben ist, durch ihn Ebenen

nach den drei Kanten des Poldreikants legt, und wenn die Ebene gegeben ist, sie mit den drei Seiten des Poldreikants schneidet und nach b) zu diesen dreien die zugeordneten Stücke konstruiert; zwei von den so erhaltenen Geraden oder Ebenen dienen zur Bestimmung der gesuchten Ebene oder des gesuchten Strahles, die dritte zur Probe.

Denkt man sich durch ein und dasselbe vollständige Vierkant (nach *a*) einen imaginären und einen reellen Kegel bestimmt, indem man die Erzeugenden in der einen Seite S des Poldreikants für beide Kegel ideell annimmt, in den beiden anderen Seiten für den imaginären Kegel ideell und für den reellen Kegel reell, so stehen die Polarsysteme beider Kegel in der folgenden Wechselbeziehung zu einander:

d) Sucht man zu irgend einem durch den gemeinsamen Kegelscheitel gehenden Strahl die zugeordnete Ebene in dem einen Polarsystem und spiegelt diese an der Ebene S *in der gemeinsam konjugierten Richtung, so ist die gespiegelte Ebene dem gegebenen Strahl im anderen Polarsystem zugeordnet.*

Die Polarsysteme der beiden Kegel heißen dann einander ***harmonisch zugeordnet.***

Die Reihenfolge der beiden Konstruktionen darf umgekehrt werden, und das Verfahren läßt sich auch anwenden, wenn die Ebene gegeben und der Strahl gesucht ist.

Harmonisch zugeordnete Kegel.

Denkt man sich nach *a*) einen reellen Kegel gegeben, und bezeichnet man mit S eine Seite des Poldreikants, die den Kegel in reellen Erzeugenden trifft, so liefert das unter *d*) angegebene Verfahren das Polarsytem eines anderen reellen Kegels, da die reellen Erzeugenden der Ebene S reell bleiben, in den beiden anderen Seiten des Poldreikants aber die reellen Erzeugenden ideell und die ideellen Erzeugenden reell werden.

Es wäre hier der Beweis dafür einzuschalten, daß zu jedem Poldreikant eines gegebenen reellen oder imaginären Kegels stets und nur auf eine Weise ein vollständiges Vierkant, wie es in *a*) bezeichnet ist, gefunden werden kann, aus dem das Polarsystem nach dem in *b*) und *c*) angegebenen Verfahren zu bestimmen ist. Dieser Beweis mag hier übergangen werden, es soll in einer folgenden Anmerkung auf die dazu nötigen Beweisverfahren kurz eingegangen werden.

Aus diesem Satze folgt dann, daß wenn das Polarsystem irgend eines Kegels gegeben ist und man auf dieses, sowie auf

eine beliebige Ebene S und ihren konjugierten Strahl das in *d*) angegebene Verfahren anwendet, man ein neues Polarsystem erhält, das zum ersten in der angegebenen Wechselbeziehung steht. Von zwei hierdurch einander „harmonisch zugeordneten Polarsystemen" haben beide reelle Ordnungskegel, wenn die Ebene S reelle Erzeugende enthält, enthält sie aber ideelle Erzeugende, so ist der eine Kegel reell, der andre imaginär.

Es bleibt jetzt zur Konstruktion der Flächen 2. O. nur übrig, die nun gewonnenen Ergebnisse mit den früheren Konstruktionen zu verknüpfen. Es geschieht dies in den folgenden Sätzen, deren Beweis hier ebenfalls übergangen werden mag:

Mittelpunktsflächen 2. O.

Zur Konstruktion einer Mittelpunktsfläche 2. O. gehe man von dem Polarsystem eines reellen oder imaginären Kegels aus, das man zum Durchmesser-Polarsystem der Fläche nimmt. Wird dann ein Punkt (oder eine Berührebene) der Fläche beliebig gewählt, so erhält man aus ihm (aus ihr) mit Hilfe des Spiegelverfahrens oder unter Hinzufügung des Gegenpunktes (der Gegenebene) mit Hilfe des Schnittverfahrens beliebige weitere Punkte (Berührebenen) der Fläche.

Der Ordnungskegel des Polarsystems wird dann zum *Asymptotenkegel der Fläche*, der Kegelscheitel zu ihrem *Mittelpunkt,* und man erhält ein *Ellipsoid,* falls dieser Kegel imaginär ist, dagegen ein *Hyperboloid,* falls er reell ist, und zwar ein *einschaliges Hyperboloid,* wenn der gewählte Punkt außerhalb des Kegels liegt oder die gewählte Ebene ihn in einer Hyperbel schneidet, und ein *zweischaliges Hyperboloid,* falls der Punkt innerhalb des Kegels liegt oder die Ebene ihn in einer Ellipse schneidet.

Erteilt man dem gewählten Punkt verschiedene nicht in derselben erzeugten Fläche enthaltene Lagen, so erhält man weitere Flächen, die in ihrer Gesamtheit ein einfach unendliches System bilden (dessen nicht entartete Flächen zugleich einem Büschel und einer Schar angehören), derart, daß je zwei dieser Flächen ähnlich und ähnlich gelegen sind, falls die beiden gewählten Punkte nicht durch einen reellen Asymptotenkegel von einander getrennt sind. Um auch im Falle einer solchen Trennung die Zugehörigkeit zum System zu bezeichnen, hat Herr REYE Flächen 2. O., die denselben Asymptotenkegel besitzen, *homothetisch* genannt.

Statt den Punkt beliebig zu wählen, ist es zweckmäßig, ihn auf einer Kante des Poldreikantes anzunehmen (vgl. Figur 3 u. 4). Die parallel zur Gegenseite des Dreikants durch ihn gelegte

301

Ebene ist seine Berührebene und sie bestimmt (vergl. Seite 75 oben) ein Parallelepiped, das wir *„ein der Fläche konjugiert umschriebenes Parallelepiped“* nennen; seine drei Mittellinien, d. h. die drei Linien, die die Mitten je zweier Gegenseiten verbinden, bestimmen schon das Parallelepiped und damit auch das Polarsystem des Asymptotenkegels; man hat dann nur zu bezeichnen, welche von den durch je zwei Gegenkanten des Parallelepipeds gelegten Ebenen als reelle Berührebenen des Asymptotenkegels anzusehen sind, und welche als ideelle. Dies bestimmt sich daraus, daß der Punkt nur dann an einer Durchmesserebene in der konjugierten Richtung in die Mitte einer *benachbarten* Parallelepipedseite gespiegelt wird, wenn die in der Ebene der beiden zugehörigen Mittellinien bestehende Involution elliptisch ist. Im anderen Falle können wir aber die Mitte der benachbarten Parallelepipedseite einen *ideellen Punkt* und diese selbst seine *ideelle Berührebene* nennen. — So kommen wir zu einer Bestimmung der Flächen 2. O., die der im I. Abschnitt abgeleiteten ganz entsprechend ist und sich mit ihr völlig deckt, falls wir das Polardreikant als aus drei zu einander senkrechten Kanten gebildet annehmen; denn dann gehen die soeben verwendeten reellen oder ideellen Punkte und Berührebenen in die (im Endlichen gelegenen) Scheitel und Scheitel-Berührebenen der Flächen über.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß alle hier abgeleiteten Konstruktionen durch räumlich-kollineare Abbildung ein erweitertes Anwendungsgebiet finden.

Für die *Paraboloide* bedürfen die Beziehungen zwischen Durchmesserebenen und konjugierten Richtungen einer besonderen Ableitung.

Anmerkung V. Im vorigen wurde das Polarsystem der Kegel 2. O. aus einem beliebig gegebenen vollständigen Vierkant (Vierstrahl) mittels Konstruktion harmonischer Stücke abgeleitet und der Satz ohne Beweis mitgeteilt, daß man auf unendlich viele Arten von dem gegebenen auf andre Vierkante übergehen kann, die dann nach derselben Konstruktion dasselbe Polarsystem liefern. Nun lassen sich die vier Kanten des Vierkants stets in die vier Diagonalen eines Würfels affin abbilden. Hierzu schneide man sie durch eine geeignet (S. 75) gelegte Ebene so, daß die vier Schnittpunkte die Ecken eines Parallelogramms werden, hierauf bilde man das Vierkant durch räumliche Affinität so ab, daß das Parallelogramm zum Quadrat wird, und endlich bilde man das neue Vierkant durch eine neue Affinität so ab, daß der Scheitel des Vierkants der Mittelpunkt O eines

Würfels wird, von dem jenes Quadrat eine Seite ist. Da die Konstruktion des Polarsystems aus dem Vierstrahl allein durch das mehrmalige Aufsuchen eines vierten harmonischen Strahles ausgeführt war, so erkennt man unmittelbar, daß je nachdem das gegebene Polarsystem zu einem reellen oder zu einem imaginären Kegel gehörte, das daraus affin abgeleitete Polarsystem entweder zu einem Drehkegel gehört oder das Senkrechtstehen von Strahlen und Ebenen im Bündel liefert.

Durch rückwärtige Abbildung übertragen sich die Eigenschaften dieser besonderen Polarsysteme auf die gegebenen. Für den *imaginären Kegel* folgt dann ohne weiteres, *daß jedes seiner Polarvierkante, dessen Nebendreikant ein Polardreikant ist, der Konstruktion des Polarsystems* (S. 78) *zugrunde gelegt werden kann*, denn seine Kanten sind das affine Bild eines regelmäßigen Vierstrahls.

Beim *reellen Kegel* folgt dies nur für ∞^1 Vierkante, für die übrigen bedarf es eines besonderen Beweises. Hierzu denke man sich den Drehkegel mit einer zur Drehachse senkrechten Ebene in einem Kreise geschnitten, dessen Mittelpunkt M heiße. Ein beliebiger Strahl p des Bündels und seine zugeordnete Ebene Q schneiden die Kreisebene in einem Punkte P und in einer Geraden q, deren Konstruktion sich aus der für Q (S. 75) so ergibt: Man schneide den Kreisdurchmesser MP mit dem Kreis in zwei Punkten, suche von P zu ihnen den vierten harmonischen Punkt Q und errichte in ihm die Senkrechte q auf MP; q wird daher die Polare des Punktes P zum Kreise. Führt man diese Konstruktion, wie es zweckmäßig ist, als Definition von Pol und Polare ein, so kann man die Polareigenschaften des Kreises mit Hilfe der Kongruenz ebener Figuren und des Harmonischliegens herleiten[1]), also genau mit den Mitteln, die wir hier zulassen. Dann ergibt sich die Möglichkeit, den Kegelschnitt (auf zwei Arten) durch eine perspektive Spiegelung an Pol und Polare so in sich überzuführen, daß dabei ein beliebiger Punkt des Kreisinnern in den Mittelpunkt M und damit ein beliebiges dem Kreise konjugiert umschriebenes Vierseit in ein umschriebenes Quadrat übergeführt wird[2]).

---

[1]) Dieser Beweis findet sich im „Lehrbuch der darstellenden Geometrie" von Rohn u. Papperitz, Erste Auflage, S. 170. Dabei ist aus der Kongruenzlehre der Satz vom Höhenpunkt eines Dreiecks benützt.

[2]) Auch der Satz, daß durch Zentralprojektion eines Kreises eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel entsteht, läßt sich mit den oben erwähnten Hilfsmitteln leicht erledigen. Liegt nämlich der zum Kreise konstruierte Pol der Verschwindungsgeraden im Innern des Kreises (so daß die Bildkurve eine Ellipse wird), so hat man durch die oben benützte perspektive Spiegelung den Kreismittelpunkt in diesen Pol überzuführen; durch die Zentralprojektion geht dann dieser Pol in den Mittelpunkt der Bildkurve über, und durch die Folge dieser beiden Abbildungen die Involution senkrechter Strahlen des Kreismittelpunkts in eine elliptische Involution des Ellipsenmittelpunkts, und aus ihr wird (etwa nach dem Spiegelverfahren, S. 67)

Im Bündel tritt für die perspektive Spiegelung an Pol und Polare eine räumliche schiefe Spiegelung ein, und durch sie wird jedes dem Kegel konjugiert umschriebene Vierkant in ein solches affin übergeführt, dessen Kanten einen regelmäßigen Vierstrahl ausmachen; und durch die umgekehrte Abbildung überträgt sich die Konstruktion des Polarsystems von diesem besonderen Vierkant auf das allgemeinere. Wird dann noch der Drehkegel in einen beliebigen affin abgebildet, so folgt für diesen, *daß jedes dem Kegel konjugiert umschriebene Vierkant der Konstruktion des Polarsystems* (S. 78) *zugrunde gelegt werden darf.* Dabei ist unter einem konjugiert umschriebenen Vierkant ein einfaches Vierkant verstanden, dessen vier Seiten den Kegel berühren, während die durch je zwei gegenüberliegende Berührungserzeugende gelegten Ebenen zum Kegel konjugiert sind.

Aus dieser Ableitung folgt für beiderlei Kegel auch die Konstruktion des Vierkantes, wenn sein zugehöriges Polardreikant gegeben ist, und damit der Satz, daß zu jedem Polardreikant ein einziges solches Vierkant gehört.

In den hier gegebenen Ableitungen verwischen sich offenbar die Unterschiede zwischen der perspektiv-affinen und der perspektiv-kollinearen Abbildung. Der innere Grund dafür wurde in der Fussnote 1) S. 70 angegeben. Das Wesentliche an dem eingeschlagenen Weg besteht darin, daß wir für die Geometrie der Ebene sowohl auf den Grundsatz der projektiven Geometrie, wie auf den PASCALschen Satz fürs Geradenpaar — den zweiten Schließungssatz[1]) — verzichten und dafür die Kongruenz ebener Figuren benützen, während vom DESARGUESschen Satz — dem ersten Schließungssatz — nur die auf perspektive Affinität und perspektive Ähnlichkeit bezüglichen Sonderfälle benützt zu werden brauchen, weil aus diesen der allgemeine Fall abgeleitet werden kann.

Eine ausführliche Darstellung dieser Theorie, die hier in ihren Grundzügen geschildert wurde, werde ich in der neuen Auflage von CHR. WIENER's Lehrbuch der darstellenden Geometrie bringen.

Anmerkung VI. Die harmonische Zuordnung der Polarsysteme zweier Kegel (S. 79) läßt sich wieder durch eine Verwandtschaftsgleichung darstellen. Bedeutet $\mathfrak{k}$ das Polarsystem des Senkrechtstehens im Bündel und $\mathfrak{s}$

---

die Kurve erzeugt. Liegt der Pol aber außerhalb des Kreises, so gehen die aus ihm gezogenen Kreistangenten bei der Zentralprojektion in die Asymptoten der Bildhyperbel über und bestimmen so ihre Involution konjugierter Durchmesser unmittelbar. Nur im Falle der Bildparabel (wo die Verschwindungsgerade den Kreis berührt) ist ein besonderer Beweis nötig, der sich aber wiederum mit Hilfe des Satzes vom Höhenpunkt eines Dreiecks liefern läßt.

[1]) Man vergleiche meine Vorträge auf der Naturforscher-Versammlung zu Halle 1891 und auf der Mathematiker-Versammlung zu München 1893, Jahresberichte der D. Math.-Ver., Bd. I (1892), S. 45 ff. und Bd. III (1893), S. 70 ff.

die senkrechte Spiegelung der Strahlen und Ebenen des Bündels an irgend einer Ebene des Bündels S, so ist

$$\mathfrak{f}\,\mathfrak{s} = \mathfrak{s}\,\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1$$

das harmonisch zugeordnete Polarsystem des Drehkegels. Sind dann S, T, U drei zueinander senkrechte Ebenen des Bündels, so bilden die senkrechten Spiegelungen $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ an diesen Ebenen zusammen mit der Identität eine „harmonische Gruppe“[1]), die auf die Gruppe des Achsenkreuzes ein-eindeutig abbildbar (zu ihr holoedrisch isomorph) ist. Setzt man nun das Polarsystem $\mathfrak{f}$ mit jeder dieser drei Spiegelungen zusammen, so erhält man noch zwei weitere zu $\mathfrak{f}$ harmonisch zugeordnete Polarsysteme $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_3$ zweier Drehkegel, die auch einander, sowie dem Polarsystem $\mathfrak{f}_1$ harmonisch zugeordnet sind. Die Operationen

$$1,\ \mathfrak{s},\ \mathfrak{t},\ \mathfrak{u},\ \mathfrak{f},\ \mathfrak{f}_1,\ \mathfrak{f}_2,\ \mathfrak{f}_3$$

bilden dann wiederum eine harmonische Gruppe. Diese Beziehungen übertragen sich auf die Polarsysteme allgemeiner reeller und imaginärer Kegel durch affine räumliche Abbildung.

In entsprechender Weise erhält man in der Ebene „harmonisch zugeordnete Polarsysteme von Kegelschnitten“. CHR. WIENER bezeichnet die Ableitung eines Kegelschnittes aus einem zweiten, wenn die Polarsysteme beider einander harmonisch zugeordnet sind, als Imaginärprojektion.

Auf die harmonisch zugeordneten Polarsysteme von Flächen 2. O. soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Verbesserung: Die Wörter „Poldreikant“ und „Polvierkant“ sind auf S. 74 bis 80 durch „Polardreikant“ und „Polarvierkant“ zu ersetzen.

---

[1]) Unter einer „harmonischen Gruppe“ verstehe ich eine solche, bei der jede Operation der Gruppe zu jeder anderen harmonisch ist. Die zur Identität harmonischen Operationen sind aber die involutorischen, eine harmonische Gruppe besteht daher aus lauter zu einander harmonischen involutorischen Operationen und der Identität. Die Ordnung einer solchen Gruppe ist gleich einer Potenz von 2.

Diese Gruppen habe ich ausführlicher behandelt in meiner Arbeit „Über geometrische Analysen“, Fortsetzung (IX. Gruppen, die außer der Identität nur involutorische Verwandtschaften enthalten). Ber. d. math. ph. Cl. der Kgl. Sächs. Ges. d. W., 1891, S. 424 ff.

Nr. 8. Bewegliche Fadenmodelle der Regelflächen 2. Ordnung mit gleichbleibenden Fadenlängen.

Zur V. Reihe der Modelle. Nr. 411 und 412.

Von H. WIENER in Darmstadt.

Modell Nr. 411.

1. Von einem Drehzylinder, der durch zwei zur Achse senkrechte Ebenen begrenzt ist, kann man leicht ein Fadenmodell verfertigen, indem man die beiden Grenzkreise des Zylinders durch Drahtringe darstellt, und zwischen beiden Ringen, die man mit Löchern versieht, z. B. in gleichen Abständen, eine Anzahl gleich langer Fäden zieht. Hält man dann den einen (oberen) Ring in horizontaler Lage, so stellt sich der andere (untere) Ring von selbst horizontal ein, und die Fäden hängen sich vertikal zu Erzeugenden eines Zylinders aus.

Faßt man aber beide Ringe dieses Zylinders und dreht den einen um die Zylinderachse, so stellen sich die Fäden zur Achse windschief, während sich gleichzeitig die Grenzkreise einander nähern. Die Fäden bilden dann die eine Schar einer Dreh-Regelfläche (eines einschaligen Dreh-Hyperboloids) und man erhält durch Veränderung des Drehwinkels ein ganzes System solcher Flächen mit den Grenzfällen des Zylinders (in der Anfangslage) und des Kegels (bei einer halben Umdrehung).

Durch eine kleine Änderung in der Anordnung dieses Modells kommt man zu den beiden Scharen von Erzeugenden dieser Dreh-Regelflächen. Hierzu braucht man nur durch Aufeinanderlegen zweier gleich großen Ringe den oberen Grenzkreis doppelt darzustellen und von jedem dieser oberen Ringe, unabhängig vom andern, Fäden nach dem unteren Ring zu ziehen. Dreht man an dem so verfertigten Modell die beiden oberen Ringe in entgegengesetztem Sinne um denselben Winkel, so wird sich der untere Ring nicht drehen, sondern nur in der Richtung der Achse etwas heben. Beiderlei Fäden, die nach dem unteren Ringe gezogen sind, werden für sich eine Regelschar eines Dreh-Hyperboloids bilden, und wegen der Symmetrie, die die Figur zu jeder durch

die Achse gelegte Ebene zeigt, ist es beide Male *dasselbe* Hyperboloid, dessen beide Scharen von Erzeugenden die Fäden darstellen.

Anmerkung. Ein derartiges Modell habe ich im Jahre 1896 zusammen mit einigen anderen Fadenmodellen im Verlag von L. BRILL in Darmstadt (jetzt M. SCHILLING in Halle a. S.) veröffentlicht, aber dem damaligen Zwecke entsprechend in kleinem Maßstabe. Das neue Modell ist dagegen für den Gebrauch im Hörsaal berechnet und deshalb in erheblich größerem Maßstabe gehalten. Die obige Erläuterung stimmt mit der damals beigegebenen überein.

Modell Nr. 412. 2. Durch ein beliebiges windschiefes Viereck ist stets *ein* hyperbolisches Paraboloid bestimmt, das die Geraden des Vierecks zu Erzeugenden hat. Denn schneidet man das eine Paar von Gegengeraden mit einer Schar von Ebenen, die sämtlich zu den beiden anderen Gegengeraden parallel sind (die also einem Parallelebenenbüschel angehören), so werden jene beiden Geraden durch diese Ebenen ähnlich aufeinander bezogen, und die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte bilden die eine Schar eines Paraboloids; diesem gehören auch die beiden anderen Gegengeraden an, da sie entsprechende Punkte verbinden. Durch eine zweite Schar von Ebenen, die zu den beiden anderen Gegengeraden parallel sind, wird, wie bekannt, auf gleiche Weise eine andre Schar von Erzeugenden derselben Fläche bestimmt.

Die beiden Parallelebenenbüschel schneiden sich gegenseitig in einer Schar paralleler Geraden (in einem Parallelstrahlenbündel), die bekanntlich zur Achse des Paraboloids parallel, also Durchmesser sind. Daher bestimmen die vier Ebenen der beiden Ebenenbüschel, die durch die vier Geraden des windschiefen Vierecks hindurchgehen, ein Prisma, dessen Kanten Durchmesser des Paraboloids sind. Man denke sich nun dieses Prisma nach der einen Seite durch das windschiefe Viereck, nach der anderen durch eine senkrecht schneidende Ebene begrenzt und die aus Trapezen gebildeten Seiten dieses Prismenstumpfes als starre Flächen, aber in den Kanten gegeneinander drehbar; dann gehen aus dem einen Prisma durch Drehung der Flächen in den Kanten unendlich viele andere hervor, und auch das windschiefe Viereck wird bei unveränderlicher Länge der Kanten seine Gestalt ändern; dabei werden jedoch für jedes durch ein solches windschiefes Viereck hindurchgehende Paraboloid die Prismenkanten Durchmesser bleiben. Schneidet man ferner den Prismenstumpf mit einer weiteren Ebene, die zu zwei Prismenseiten parallel ist, so erhält man

ein Trapez, das man gleichfalls als starre Fläche und um seine parallelen Kanten drehbar mit den beiden anstoßenden Prismenseiten verbinden kann, und das dann an der Bewegung teilnimmt. Die eine Seite dieses Trapezes ist Erzeugende des Paraboloids und bleibt es auch bei der Bewegung. Zugleich behält jeder Punkt dieser Erzeugenden stets denselben Abstand von der senkrecht schneidenden Ebene.

Diese Eigenschaften des windschiefen Vierecks führen auf ein bewegliches Fadenmodell eines hyperbolischen Paraboloids mit unveränderten Fadenlängen. Man bespanne ein windschiefes Stabviereck so mit zwei Scharen von Fäden, daß sie Erzeugende des durch das Viereck bestimmten hyperbolischen Paraboloids werden; um dieses Modell in der verlangten Weise beweglich zu machen, hat man nur die in je einer Ecke zusammenstoßenden Stäbe durch ein Scharnier zu verbinden, dessen Drehachse zur Achse des Paraboloids parallel wird.

Ein solches Fadenmodell befindet sich (wie mir nachträglich Herr Felix Müller in Berlin mitteilte), aus einer Pariser Sammlung herrührend, seit 1871 in Berlin; ebenso sind, wie ich höre, seit längerer Zeit in Jena und Dresden solche Modelle vorhanden.

Auf derselben Eigenschaft des hyperbolischen Paraboloids beruht auch ein von AL. BRILL angegebenes Kartonmodell[1]); da nach seiner Veröffentlichung bewegliche Fadenmodelle des hyperbolischen Paraboloids in verschiedenen Ausführungen angefertigt wurden, aber meist mit nur einer Schar von Erzeugenden und stets mit veränderlicher Länge der Erzeugenden, so daß die Fäden durch angehängte Gewichte gespannt erhalten werden mußten, so dürfte einerseits das Vorhandensein jener Fadenmodelle in weiteren Kreisen unbekannt geblieben sein, andererseits der Übergang vom BRILL'schen Modell zu dem hier besprochenen keineswegs so selbstverständlich sein, als es nachträglich erscheinen könnte.

Statt der Stäbe, die nur durch die Scharniere mit einander verbunden sind, könnte man auch die vier begrenzenden Trapeze (jedes etwa durch seine vier Seiten dargestellt) als ein Gestell für das Fadenmodell verwenden, und ich behalte mir derartige Abänderungen späteren Veröffentlichungen vor.

[1]) Man vergleiche den Katalog mathematischer Modelle von L. BRILL in Darmstadt (M. Schilling in Halle a. S.) S. 1, Nr. 6.

Nr. 9. Bewegliche Stabmodelle zur Überführung einer Fläche 2. Ordnung in konfokale Flächen.

Zur V. Reihe der Modelle. Nr. 421 bis 424.

Von H. WIENER in Darmstadt.

Die beweglichen Stabmodelle der Regelflächen 2. Ordnung gehen auf O. HENRICI zurück. Als dieser ein Modell eines einschaligen Hyperboloids anfertigen ließ [1]), bei dem die Erzeugenden beider Scharen durch Holzstäbchen dargestellt wurden, die an den Kreuzungsstellen mit Bindfaden verknüpft und auf diese Weise gelenkig verbunden wurden, stellte sich heraus, daß das Modell nicht fest wurde, sondern daß die Stäbe an den Verbindungsstellen gegeneinander drehbar blieben. So erhielt er eine einfach unendliche Schar von Hyperboloiden in stetigem Übergang von einer durch die Stäbe umhüllten Ellipse bis zu einer Hyperbel.

Modell Nr. 421.

Der von HENRICI aufgestellte Satz von der Beweglichkeit des gelenkig angefertigten Stabmodells des Hyperboloids wurde von GREENHILL dahin vervollständigt, daß alle Hyperboloide, die aus einer solchen Fläche durch die Bewegung in den Gelenken unter Festhaltung von Mittelpunkt und Achsenrichtungen hervorgehen, einer Schar von *konfokalen Flächen* zweiter Ordnung angehören, deren Fokalkurven jene beiden Grenzkurven sind, und daß sich jeder Punkt beim Übergang aus einer Fläche in die benachbarte in einer Normalen zur Fläche bewegt.[2]) Weitere Sätze

[1]) W. DYCKS „Katalog mathematischer Modelle" (München 1892) S. 261. HENRICIS erstes Modell stammt aus dem Jahre 1873. Außer dem schon erwähnten Modell hat er noch ein weiteres angefertigt, an dem zwei der konfokalen Flächen durch Stäbe gelenkig mit einander verbunden sind. HENRICI nennt als am weiteren Ausbau der Theorie beteiligt: GREENHILL, CAYLEY, DARBOUX und MANNHEIM, für deren Arbeiten SCHUR (siehe Fußnote 5) die genauen Stellen angiebt.

[2]) CAYLEY beweist diese Sätze auf analytisch-geometrischem Wege: Mess. of Math. VIII S. 51, 52. 1879 (in den math. papers XI S. 66, 67 abgedruckt).

über diese Flächenschar haben DARBOUX[1]) und MANNHEIM[2]) aufgestellt, insbesondere zeichnet sich des letzteren Arbeit durch geometrische Beweisführung und Reichhaltigkeit aus.

Später hat FR. SCHUR[3]) auf das Auftreten solcher Hyperboloide in zwei affin aufeinander abgebildeten Räumen hingewiesen. Wie nämlich eine einfache Überlegung zeigt, wird durch irgend eine im Modell dargestellte Fläche und durch eine in beliebiger Lage befindliche zweite solche Fläche eine affine Abbildung des Raumes der ersten auf den Raum der zweiten festgelegt; und sind umgekehrt zwei beliebige *affine Räume* gegeben, so ist das Auftreten solcher Hyperboloide nur an eine Bedingung der Reellität geknüpft. Die Hyperboloide sind dabei in beiden Räumen solche, deren Erzeugende in der affinen Abbildung *kongruente* Geraden zu Bildern haben.

Neuerdings hat L. BURMESTER die Eigenschaften dieser Modelle einer eingehenden Untersuchung unterzogen und in eine allgemeine Theorie affiner räumlicher Systeme eingeordnet[4]); auch hat er die von A. BRILL aus Kartonkreisen hergestellten Modelle der Flächen zweiter Ordnung mit jenen in Verbindung gebracht. Vergl. auch Modell Nr. 425 bis 430.

Ein einfacher geometrischer Beweis für die Sätze von HENRICI und GREENHILL wird durch Verknüpfung der Betrachtungen von MANNHEIM (a. a. O. S. 189) mit denen von SCHUR (a. a. O. S. 63) erhalten, doch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

Von den Abarten des einschaligen Hyperboloids ist das hyperbolische Paraboloid schon früher erwähnt. Die Übertragbarkeit des HENRICIschen Satzes[5]) auf dieses ist durch die Bewegungsfähigkeit des BRILLschen Kartonmodells dargetan. (Man vergleiche die vorige Abhandlung). Modell Nr. 424.

[1]) Cours de mécanique par M. DESPEYROUS avec des notes par M. G. DARBOUX (1886) Note XVIII.

[2]) MANNHEIM: Principes et dévéloppements de géométrie cinématique, Paris 1894 S. 189 ff.

[3]) SCHUR, FR. „Die Deformation einer geradlinigen Fläche zweiten Grades ohne Änderung der Längen ihrer Geraden". Zeitschr. für Math. u. Phys., S. 62 (1898).

[4]) L. BURMESTER: „Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme". Zeitschr. für Math. u. Phys. XLVII S. 128 ff. (1902).

[5]) Einen einfachen analytischen Beweis des GREENHILLschen Satzes für das hyperbolische Paraboloid gibt FR. SCHUR a. a. O. S. 64. Zum geometrischen Beweis bedürfen für diese Fläche die MANNHEIMschen Betrachtungen einer nicht schwer anzugebenden Abänderung.

Von dem Drehhyperboloid war ein Modell schon vor HENRICIS Entdeckung in den Gebrauch des gewöhnlichen Lebens übergegangen als verstellbares *Blumentopfgitter*. An diesem sind Holzstäbe als Erzeugende verwendet und die Verbindungen durch Nieten hergestellt, um deren Achsen sich die beiden verbundenen Stäbe drehen können. Die beiden Grenzlagen eines derart beweglichen Drehhyperboloids sind geometrisch gesprochen eine einzige Gerade, in die alle Erzeugende hineinfallen, als Abart der Hyperbel und der Kreis als Abart der Ellipse. Die Nietverbindung jenes Holzmodells ist so lange sicher, als man es nicht zu weit aus der ersten Grenzlage entfernt, bei größeren Krümmungen der Teile des Hyperboloids aber platzen die Verbindungen leicht, denn der einzelne Stab des Modells ist keine mathematische Gerade, sondern im besten Fall ein Zylinder, und die Berührstellen mit den Stäben der anderen Schar liegen auf diesem Zylinder nicht in gerader Linie, sondern in einer geschraubten Kurve, deren Torsion sich bei den Verbindungen des Modells mitverändert. In Folge dessen werden bei dieser Art der Verbindung die Stäbe selbst tordiert.

Modell Nr. 423.

Aus diesen Überlegungen ist zu entnehmen, welche Forderungen auch für den allgemeinen Fall an die Verbindungen der Stäbe zu stellen sind, um die nötige Beweglichkeit und doch eine größere Festigkeit zu erzielen, als dies durch Verknüpfen mittels Fadens möglich ist. Erstens müssen zwei Stäbe an der Kreuzungsstelle eine Veränderung ihres Winkels gestatten, also wie die Schenkel eines Zirkels um eine zu beiden Stabachsen senkrechte Drehachse beweglich sein, und zweitens muß dem Berührpunkt beider Stäbe ein Herumwandern um jeden Stab — ohne Änderung seines Abstandes von den Stabenden — ermöglicht werden.

Um dies zu erreichen, lasse ich jeden Stab an der Kreuzungsstelle drehbar, aber nicht verschiebbar, in einer zylindrischen Hülse laufen, während die beiden Hülsen so mit einander vernietet sind, daß sie um eine Achse, die die beiden Zylinderachsen senkrecht trifft, nämlich um den Nietstift, drehbar bleiben.

Die *Herstellung des Gelenkes* geschieht so, daß die etwa 2 mm starken Metallstäbe an den Kreuzungsstellen auf etwa 4 mm Breite eingefräst werden; die darum zu legenden Hülsen werden aus rechteckigen, in der Mitte durchlochten Metallplättchen angefertigt, von denen zwei mit einem durch die Löcher gesteckten feinen Stahlstift aufeinander genietet werden, worauf jedes dieser Plättchen zur zylindrischen Hülse gebogen und um die Einkerbung des Stabes herum gelegt wird. (D. R. G. M.)

Da die Hülsen der Stabdicke angepaßt sind, so sind die Gelenke am fertigen Modell kaum zu bemerken, um so überraschender ist die gegenseitige Beweglichkeit zweier so verbundener Stäbe.

Trotz aller Beweglichkeit kann das Modell in den Grenzlagen nicht völlig in die Ebene gelegt werden, da am Umriß die vom Berührpunkt nach beiden Seiten laufenden Stäbe sich überdecken und durch ihre Dicke auftragen. Um das völlige Ausbreiten in die Ebene zu zeigen, habe ich ein Modell hergestellt, bei dem das Hyperboloid an der Kehlellipse durchgeschnitten gedacht und nur die eine Hälfte genommen ist. Dieses Modell kann nicht nur völlig in die Ebene ausgebreitet werden, so daß die Stäbe einseitig eine Ellipse berühren, sondern es läßt sich auch umstülpen, so daß die innere[1]) Schar zur äußeren, die äußere zur inneren wird. Man muß sich dies so vorstellen, daß die beiden Scharen von Stäben, wenn man zur Grenze, d. h. zu unendlich dünnen Stäben übergeht, die zwischen ihnen gedachte mathematische Fläche eines Hyperboloids berühren; sobald diese gedachte Fläche zur Ebene wird, ist (auch bei endlicher Dicke der Stäbe) keine der Scharen als innere oder äußere bevorzugt, so daß man das Modell aus dieser Lage ebenso gut nach der einen wie nach der anderen Seite der Ebene hin als Hyperboloid ausbiegen kann. Modell Nr. 422.

Auf dieselbe Weise hätte man das Modell auch durch die Hauptebene, in der die Grenzhyperbel liegt, halbieren können und hätte so eine Umstülpung durch die Hyperbel hindurch möglich gemacht.

[1]) Im Sinne der projektiven Geometrie kann man beim einschaligen Hyperboloid nicht vom „Inneren“ sprechen, da von allen Punkten des Raumes Berührkegel an es gelegt werden können. Die Fläche zeigt aber eine Röhrenform, auf die man wohl die Bezeichnung innen und außen unzweideutig beziehen kann. Es liegen dann im Innern der Fläche alle unendlich fernen Punkte, von denen keine unendlich fernen Flächentangenten ausgehen, und alle endlich gelegenen Punkte, die von jenen unendlich fernen nicht durch die Fläche getrennt sind.