Nr. 9. Bewegliche Stabmodelle zur Überführung einer Fläche 2. Ordnung in konfokale Flächen.

Zur V. Reihe der Modelle. Nr. 421 bis 424.

Von H. WIENER in Darmstadt.

Die beweglichen Stabmodelle der Regelflächen 2. Ordnung gehen auf O. HENRICI zurück. Als dieser ein Modell eines einschaligen Hyperboloids anfertigen ließ[1]), bei dem die Erzeugenden beider Scharen durch Holzstäbchen dargestellt wurden, die an den Kreuzungsstellen mit Bindfaden verknüpft und auf diese Weise gelenkig verbunden wurden, stellte sich heraus, daß das Modell nicht fest wurde, sondern daß die Stäbe an den Verbindungsstellen gegeneinander drehbar blieben. So erhielt er eine einfach unendliche Schar von Hyperboloiden in stetigem Übergang von einer durch die Stäbe umhüllten Ellipse bis zu einer Hyperbel. Modell Nr. 421. Der von HENRICI aufgestellte Satz von der Beweglichkeit des gelenkig angefertigten Stabmodells des Hyperboloids wurde von GREENHILL dahin vervollständigt, daß alle Hyperboloide, die aus einer solchen Fläche durch die Bewegung in den Gelenken unter Festhaltung von Mittelpunkt und Achsenrichtungen hervorgehen, einer Schar von *konfokalen Flächen* zweiter Ordnung angehören, deren Fokalkurven jene beiden Grenzkurven sind, und daß sich jeder Punkt beim Übergang aus einer Fläche in die benachbarte in einer Normalen zur Fläche bewegt.[2]) Weitere Sätze

[1]) W. DYCKS „Katalog mathematischer Modelle" (München 1892) S. 261. HENRICIs erstes Modell stammt aus dem Jahre 1873. Außer dem schon erwähnten Modell hat er noch ein weiteres angefertigt, an dem zwei der konfokalen Flächen durch Stäbe gelenkig mit einander verbunden sind. HENRICI nennt als am weiteren Ausbau der Theorie beteiligt: GREENHILL, CAYLEY, DARBOUX und MANNHEIM, für deren Arbeiten SCHUR (siehe Fußnote 5) die genauen Stellen angiebt.

[2]) CAYLEY beweist diese Sätze auf analytisch-geometrischem Wege: Mess. of Math. VIII S. 51, 52. 1879 (in den math. papers XI S. 66, 67 abgedruckt).

über diese Flächenschar haben DARBOUX[1]) und MANNHEIM[2]) aufgestellt, insbesondere zeichnet sich des letzteren Arbeit durch geometrische Beweisführung und Reichhaltigkeit aus.

Später hat FR. SCHUR[3]) auf das Auftreten solcher Hyperboloide in zwei affin aufeinander abgebildeten Räumen hingewiesen. Wie nämlich eine einfache Überlegung zeigt, wird durch irgend eine im Modell dargestellte Fläche und durch eine in beliebiger Lage befindliche zweite solche Fläche eine affine Abbildung des Raumes der ersten auf den Raum der zweiten festgelegt; und sind umgekehrt zwei beliebige *affine Räume* gegeben, so ist das Auftreten solcher Hyperboloide nur an eine Bedingung der Reellität geknüpft. Die Hyperboloide sind dabei in beiden Räumen solche, deren Erzeugende in der affinen Abbildung *kongruente* Geraden zu Bildern haben.

Neuerdings hat L. BURMESTER die Eigenschaften dieser Modelle einer eingehenden Untersuchung unterzogen und in eine allgemeine Theorie affiner räumlicher Systeme eingeordnet[4]); auch hat er die von A. BRILL aus Kartonkreisen hergestellten Modelle der Flächen zweiter Ordnung mit jenen in Verbindung gebracht. Vergl. auch Modell Nr. 425 bis 430.

Ein einfacher geometrischer Beweis für die Sätze von HENRICI und GREENHILL wird durch Verknüpfung der Betrachtungen von MANNHEIM (a. a. O. S. 189) mit denen von SCHUR (a. a. O. S. 63) erhalten, doch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

Von den Abarten des einschaligen Hyperboloids ist das hyperbolische Paraboloid schon früher erwähnt. Die Übertragbarkeit des HENRICIschen Satzes[5]) auf dieses ist durch die Bewegungsfähigkeit des BRILLschen Kartonmodells dargetan. (Man vergleiche die vorige Abhandlung). Modell Nr. 424.

---

[1]) Cours de mécanique par M. DESPEYROUS avec des notes par M. G. DARBOUX (1886) Note XVIII.

[2]) MANNHEIM: Principes et développements de géométrie cinématique, Paris 1894 S. 189 ff.

[3]) SCHUR, FR. „Die Deformation einer geradlinigen Fläche zweiten Grades ohne Änderung der Längen ihrer Geraden". Zeitschr. für Math. u. Phys., S. 62 (1898).

[4]) L. BURMESTER: „Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme". Zeitschr. für Math. u. Phys. XLVII S. 128 ff. (1902).

[5]) Einen einfachen analytischen Beweis des GREENHILLschen Satzes für das hyperbolische Paraboloid gibt FR. SCHUR a. a. O. S. 64. Zum geometrischen Beweis bedürfen für diese Fläche die MANNHEIMschen Betrachtungen einer nicht schwer anzugebenden Abänderung.

Von dem Drehhyperboloid war ein Modell schon vor HENRICIs Entdeckung in den Gebrauch des gewöhnlichen Lebens übergegangen als verstellbares *Blumentopfgitter.* An diesem sind Holzstäbe als Erzeugende verwendet und die Verbindungen durch Nieten hergestellt, um deren Achsen sich die beiden ver-
Modell Nr. 423. bundenen Stäbe drehen können. Die beiden Grenzlagen eines derart beweglichen Drehhyperboloids sind geometrisch gesprochen eine einzige Gerade, in die alle Erzeugende hineinfallen, als Abart der Hyperbel und der Kreis als Abart der Ellipse. Die Nietverbindung jenes Holzmodells ist so lange sicher, als man es nicht zu weit aus der ersten Grenzlage entfernt, bei größeren Krümmungen der Teile des Hyperboloids aber platzen die Verbindungen leicht, denn der einzelne Stab des Modells ist keine mathematische Gerade, sondern im besten Fall ein Zylinder, und die Berührstellen mit den Stäben der anderen Schar liegen auf diesem Zylinder nicht in gerader Linie, sondern in einer geschraubten Kurve, deren Torsion sich bei den Verbindungen des Modells mitverändert. In Folge dessen werden bei dieser Art der Verbindung die Stäbe selbst tordiert.

Aus diesen Überlegungen ist zu entnehmen, welche Forderungen auch für den allgemeinen Fall an die Verbindungen der Stäbe zu stellen sind, um die nötige Beweglichkeit und doch eine größere Festigkeit zu erzielen, als dies durch Verknüpfen mittels Fadens möglich ist. Erstens müssen zwei Stäbe an der Kreuzungsstelle eine Veränderung ihres Winkels gestatten, also wie die Schenkel eines Zirkels um eine zu beiden Stabachsen senkrechte Drehachse beweglich sein, und zweitens muß dem Berührpunkt beider Stäbe ein Herumwandern um jeden Stab — ohne Änderung seines Abstandes von den Stabenden — ermöglicht werden.

Um dies zu erreichen, lasse ich jeden Stab an der Kreuzungsstelle drehbar, aber nicht verschiebbar, in einer zylindrischen Hülse laufen, während die beiden Hülsen so mit einander vernietet sind, daß sie um eine Achse, die die beiden Zylinderachsen senkrecht trifft, nämlich um den Nietstift, drehbar bleiben.

Die *Herstellung des Gelenkes* geschieht so, daß die etwa 2 mm starken Metallstäbe an den Kreuzungsstellen auf etwa 4 mm Breite eingefräst werden; die darum zu legenden Hülsen werden aus rechteckigen, in der Mitte durchlochten Metallplättchen angefertigt, von denen zwei mit einem durch die Löcher gesteckten feinen Stahlstift aufeinander genietet werden, worauf jedes dieser Plättchen zur zylindrischen Hülse gebogen und um die Einkerbung des Stabes herum gelegt wird. (D. R. G. M.)

Da die Hülsen der Stabdicke angepaßt sind, so sind die Gelenke am fertigen Modell kaum zu bemerken, um so überraschender ist die gegenseitige Beweglichkeit zweier so verbundener Stäbe.

Trotz aller Beweglichkeit kann das Modell in den Grenzlagen nicht völlig in die Ebene gelegt werden, da am Umriß die vom Berührpunkt nach beiden Seiten laufenden Stäbe sich überdecken und durch ihre Dicke auftragen. Um das völlige Ausbreiten in die Ebene zu zeigen, habe ich ein Modell hergestellt, bei dem das Hyperboloid an der Kehlellipse durchgeschnitten gedacht und nur die eine Hälfte genommen ist. Dieses Modell kann nicht nur völlig in die Ebene ausgebreitet werden, so daß die Stäbe einseitig eine Ellipse berühren, sondern es läßt sich auch umstülpen, so daß die innere[1]) Schar zur äußeren, die äußere zur inneren wird. Man muß sich dies so vorstellen, daß die beiden Scharen von Stäben, wenn man zur Grenze, d. h. zu unendlich dünnen Stäben übergeht, die zwischen ihnen gedachte mathematische Fläche eines Hyperboloids berühren; sobald diese gedachte Fläche zur Ebene wird, ist (auch bei endlicher Dicke der Stäbe) keine der Scharen als innere oder äußere bevorzugt, so daß man das Modell aus dieser Lage ebenso gut nach der einen wie nach der anderen Seite der Ebene hin als Hyperboloid ausbiegen kann.

Modell Nr. 422.

Auf dieselbe Weise hätte man das Modell auch durch die Hauptebene, in der die Grenzhyperbel liegt, halbieren können und hätte so eine Umstülpung durch die Hyperbel hindurch möglich gemacht.

[1]) Im Sinne der projektiven Geometrie kann man beim einschaligen Hyperboloid nicht vom „Inneren" sprechen, da von allen Punkten des Raumes Berührkegel an es gelegt werden können. Die Fläche zeigt aber eine Röhrenform, auf die man wohl die Bezeichnung innen und außen unzweideutig beziehen kann. Es liegen dann im Innern der Fläche alle unendlich fernen Punkte, von denen keine unendlich fernen Flächentangenten ausgehen, und alle endlich gelegenen Punkte, die von jenen unendlich fernen nicht durch die Fläche getrennt sind.