

Graphische Lösung einer Randwertaufgabe der Gleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$



Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät

der

Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Walther Rottsieper

aus Ronsdorf.

Mit 34 Abbildungen.

Göttingen 1914.

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Angenommen von der math.-naturwissenschaftlichen Abteilung.

Referent: Herr Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. C. Runge.

Tag der mündlichen Prüfung: 8. Juli 1914.

Inhaltsübersicht.

I. Zeichnung eines genäherten Netzes von Quellstromlinien und Zirkulationsstromlinien und seine zeichnerische Verbesserung.

(1) und (2) Zeichnung eines genäherten Netzes im gewählten Bereich. (3) Der Halbmesser der ersten Näherung. (4) bis (8) Verbesserung des gezeichneten Netzes mit Hilfe sich anschmiegender Netze. (9) Berechnung eines sich anschmiegenden Netzes. Formeln zur Prüfung des entworfenen Netzes. (10) Zwei Beispiele sich anschmiegender Netze.

II. Rechnerische Verbesserung des Netzes.

(11) Berechnung des Netzes zu gegebenen Mündungen der Quellstromlinien auf dem Rande aus den rechtwinkligen Koordinaten dieser Mündungen. (12) Das allgemeine Verfahren. (13) und (14) Wichtiger Sonderfall. (15) und (16) Die praktische Berechnung der Netzpunkte. (17) bis (19) Genauigkeit und Schnelligkeit des Verfahrens. (20) Berechnung der Netzpunkte durch Reihenentwicklung. (21) bis (23) Ein Integrator für die mechanische Ausführung der Berechnung. (24) und (25) Berechnung eines Netzes zu absichtlich falsch angenommenen Mündungen. (26) und (27) Die Umgebung eines Punktes im falschen Netz. (28) bis (30) Das falsche Netz in der Nähe des Randes (31) und (32) Zeichnerische Verbesserung des berechneten Netzes. (33) Rechnerische Verbesserung des Netzes. (34) Das Ergebnis.

III. Berechnung des Netzes mit Hilfe des Schwarzschen alternierenden Verfahrens.

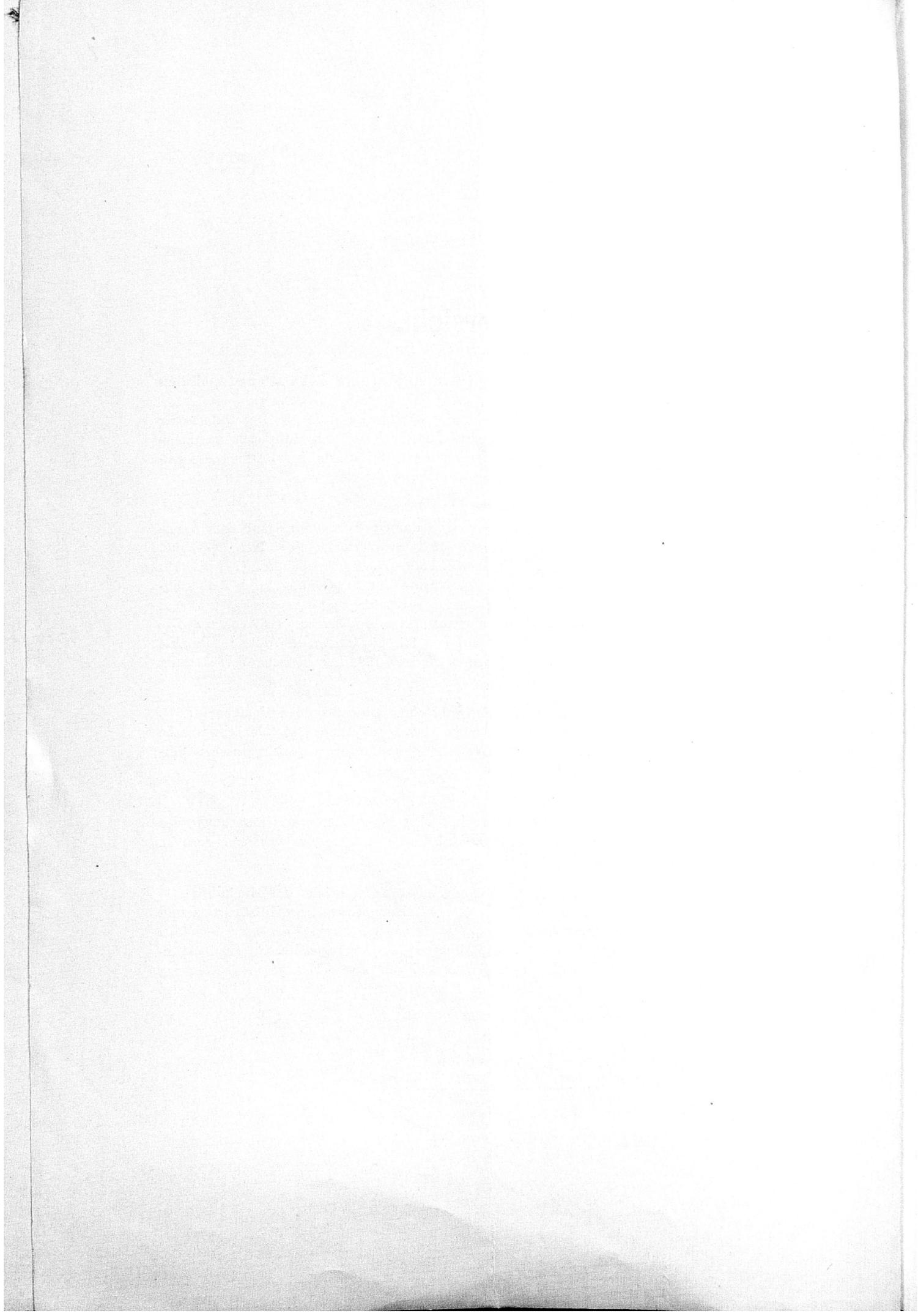
(35) und (36) Das Schwarzsche Verfahren im allgemeinen. (37) und (38) Das Schwarzsche Verfahren zur Berechnung unseres Netzes. (39) Weitere Anwendungen des Schwarzschen Verfahrens.

IV. Berechnung des Netzes im Rechteck.

(40) und (41) Berechnung des Netzes mit Hilfe elliptischer Funktionen. (42) Berechnung des Netzes aus den Randpunkten. (43) Seine Berechnung mit Hilfe des sich anschmiegenden Netzes im Parallelstreifen und (44) im Halbstreifen. (45) Das Netz im Quadrat.

V. Anwendung des erhaltenen Netzes zur Lösung einer Aufgabe aus der Mechanik.

(46) Die zu integrierende Aufgabe lautet $\Delta u = C$. (47) Einführung einer Hilfsfunktion und Entwicklung von u in eine Reihe. (48) Betrachtung der gewonnenen Figur und Vergleich derselben mit einer auf einem anderen Wege gewonnenen. (49) Deutung der Orthogonaltrajektorien der u -Kurven. (50) Deutung der Rauminhalte der u -Schichten und des von der u -Fläche begrenzten Körpers. (51) Der Verwindungshalbmesser. (52) Das Moment der Schubspannungen bei unserm Querschnitt.





I. Zeichnung eines genäherten Netzes von Quellstromlinien und Zirkulationsstromlinien und seine zeichnerische Verbesserung.

(1) Herr Prof. Runge zeigt in seiner Abhandlung¹⁾ „graphische Lösung von Randwertaufgaben der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ “, wie man auf einem praktischen Wege eine genäherte Zeichnung der Greenschen Funktion eines gegebenen einfach zusammenhängenden Bereichs der Ebene mit ihren Orthogonaltrajektorien erhalten kann. Im Anschluß hieran gibt er dann noch an, wie man die so gewonnene genäherte Darstellung mit Hilfe eines zeichnerisch-rechnerischen Verfahrens verbessern kann. Meine Aufgabe ist es nun, ein Beispiel für dieses Verfahren praktisch durchzuführen und über die dabei gewonnenen Erfahrungen zu berichten. Zur Prüfung des Ergebnisses soll dann mit Hilfe des Schwartzschen alternierenden Verfahrens die Greensche Funktion für den gegebenen Bereich auf einem anderen, unabhängigen Wege berechnet und schließlich die erhaltene Figur noch auf ein mechanisches Problem angewandt werden.

(2) Wir wählen als Bereich ein Kreuz, das man aus fünf gleichen Quadraten zusammensetzen kann. Abb. 1. Die Seite eines solchen Quadrates sei die Längeneinheit. Wegen der vierfachen Symmetrie zerfällt die Figur in acht kongruente Trapeze, die im Mittelpunkt O zusammenstoßen. Diesen Punkt O wählen wir als Quelle, sodaß wir nur ein Achtel der Zeichnung zu entwerfen brauchen, das in einem solchen Trapez enthalten ist. Von den 256 Quellstromlinien fallen 33 in dies Trapez, wenn man die beiden äußeren geraden Strecken, die von O zu der einspringenden Ecke und zu der Mitte der äußeren Quadratseite führen, mitrechnet. Die Einzeichnung des genäherten Netzes der Quell- und Zirkulationsstromlinien erfolgt in der Weise, wie sie Gött. Nachr. 1911 S. 437/38 geschildert wird. Es zeigt sich, daß die hierbei angewandte fortgesetzte Einschaltung einer mittleren Netzlinie recht genau nach Augenmaß möglich ist, ganz abgesehen von der guten Hilfe, die einem dabei die Diagonalkurven leisten können (Gött. Nachr. S. 445/46). Vermag man doch mit einiger Übung allein durch Abschätzen eine mittelgroße

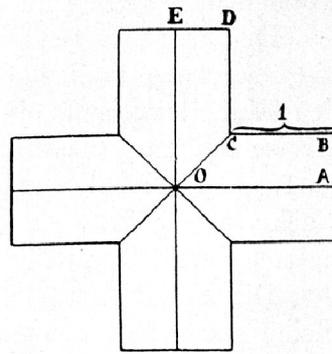


Abb. 1.

1) Aus den Nachrichten der K. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1911. S. 431—448.

Strecke bis auf 1 bis 2 v. H. zu hälften, wahrscheinlich wegen des spiegelbildlichen Baues unseres Körpers und besonders unseres Augenpaares. Überhaupt ist die Zeichnung des Netzes eine Sache der Übung und des Geschicks. Doch wird der Blick bald für die weitere Teilbarkeit einer Masche in quadratähnliche Unterteile geschärft. Wenn man ferner nicht an Gummi spart, sieht man ebenfalls bald, wie die Verschiebungen der Netzkurven an der einen Stelle die damit verknüpften Verschiebungen an einer andern Stelle bedingen und wie man diese Abhängigkeit bei einer beabsichtigten Wirkung berücksichtigen kann. Auf diese Weise bekommt man dann verhältnismäßig schnell einen brauchbaren Ausgang für die weitere Verbesserung.

Es ist vorteilhaft, sich für die angewandte Einteilung von 2π in $2^8 = 256$ Teile Täfelchen der wichtigsten Funktionen zusammenzustellen, z. B. der trigonometrischen Funktionen und ihrer Logarithmen, zur Umwandlung der Vielfachen von $\frac{2\pi}{256}$ in Grade oder Bogen und umgekehrt, von $\log \tan$, $n \cdot \log(e^n)$, um sich das häufige Umformen der Zahlenwerte zum Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln zu ersparen. Ein solcher Teil $\frac{2\pi}{256}$ soll im Folgenden kurz als 1τ bezeichnet werden. Er entspricht einem achteil Strich der Seeleute. Es ist

$$1\tau = \frac{360^0}{256} = 1\frac{1}{3}\frac{3}{2}^0 = 1,40625^0 = 1^0 24' 22\frac{1}{2}'' = \frac{2\pi}{256} = 0,0245437.$$

Ein brauchbarer Näherungswert ist $\frac{27}{1100} = 0,024545$.

(3) Ein Netz der Greenschen Funktion und ihrer konjugierten Funktion, das man in der besagten Weise durch zeichnerische Näherung gewonnen hat, kann man auf folgende Weise durch eine Zahl kennzeichnen.

Der gegebene Bereich \mathfrak{B} , unser Kreuz, liege in der $z = x + yi$ -Ebene. Durch die Greensche Funktion mit ihrer konjugierten Funktion wird \mathfrak{B} konform auf den Einheitskreis \mathfrak{K} einer $\xi = \xi + \eta i$ -Ebene abgebildet, in dessen Innerem die Kreise um $\xi = 0$ mit $r = e^g$ die Zirkulationsstromlinien und die vom Nullpunkt unter dem Winkel h ausgehenden Strahlen die Quellstromlinien bilden. (In Gött. Nachr. S. 431 ff. statt $h G_1$.) Der Kreis ist damit das konforme Abbild eines halben Parallelstreifens in der $k = g + hi$ -Ebene gemäß der Zuordnung $\xi = e^k$.

Die Funktion $z(\xi)$, die \mathfrak{K} konform auf \mathfrak{B} abbildet, kann man sich in eine Reihe entwickelt denken,

$$z = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + c_3 \xi^3 + \dots$$

Für kleine ξ ist dann in erster Annäherung $z = c_0 + c_1 \xi$, d. h. die Umgebung des Nullpunktes der ξ -Ebene wird auf die Umgebung des Punktes c_0 in der z -Ebene linear abgebildet; ist dabei $c_1 = e^{g_1 + h_1 i} = r_1 \cdot e^{h_1 i}$, so wird der Einheitskreis der ξ -Ebene zu einem Kreise vom Halbmesser r_1 gedehnt (und um den Winkel h_1 gedreht). Den Halbmesser r_1 dieses Kreises können wir als den Halbmesser der ersten Näherung bezeichnen. Seine Größe wird als ein Mittelwert die Art der gewonnenen Figur kennzeichnen, durch den man verschiedene Entwürfe miteinander vergleichen kann. In einfacher Weise kann man r_1 als geometrisches Mittel aus den Entfernungen des Quellpunktes von denjenigen Punkten finden,

an denen die Quellstromlinien auf dem Rande münden. Siehe (13). Diese Randpunkte mögen im Folgenden kurz als Mündungen der Quellstromlinien bezeichnet werden. Für die erste zeichnerische Näherung ergab sich in unserm Falle $r_1 = 0,912$; später ergab sich genauer $r_1 = 0,898$. Man kann daraus schließen, daß die Zeichnung bereits eine gute Annäherung dargestellt hat; das zeigte sich nachher auch bei der weiteren Verbesserung.

(4) Außer den in Gött. Nachr. 1911 S. 443 ff. angegebenen Mitteln zur Prüfung des gezeichneten Kurvennetzes kann man bei unserm Kreuz noch davon Gebrauch machen, daß sich das gezeichnete Netz an gewissen Stellen an ein Netz bestimmter Art anschmiegen muß. In der Umgebung des Mittelpunktes muß es sich wie $z = c_1 \cdot \xi' = c_1 \cdot e^{g' + h'i}$ verhalten. Aus der späteren Berechnung ergibt sich $z = 0,898 \cdot e^{0,02454(g' + h'i)}$, wenn wir g' und h' in τ und x und y durch die Quadratseite messen. Am Rande sind die ein- und ausspringenden Ecken solche Stellen. In der Nähe der einspringenden Ecken muß das Netz der g - und h -Kurven sich dem von $z = c(g' + h'i)^{\frac{3}{2}}$ anschmiegen, abgesehen von einer Drehung und Verschiebung (Abb. 2). Bei den erwähnten Einheiten ergibt sich später $z = 0,00206(g' + h'i)^{\frac{3}{2}}$. Nahe bei den ausspringenden Ecken haben wir $z = c(g' + h'i)^{\frac{1}{2}}$, $c = 0,29$ (Abb. 3). In der Mitte der äußeren Quadratseiten ist ungefähr $z = 0,137(g' + h'i)$.

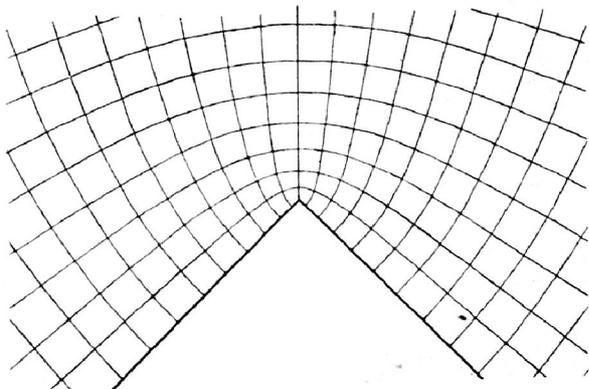


Abb. 2.

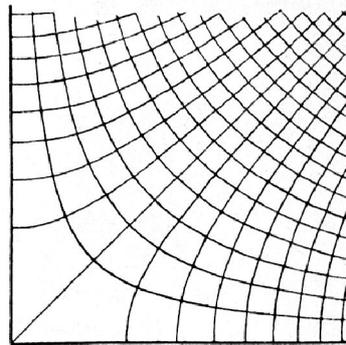


Abb. 3.

(5) Solch ein genaues Kurvennetz, das sich dem gezeichneten Netz an einer bestimmten Stelle anschmiegen muß, kann man zu einer Ausgleichung des gezeichneten Netzes an der betreffenden Stelle benutzen. Zunächst kann man auf graphischem Wege, z. B. mit Hilfe von logarithmischem Koordinatenpapier, einen Mittelwert der Konstanten c aus der Zeichnung gewinnen und dafür das genaue Netz zeichnen, z. B. das Netz der Funktion $z' = c(g' + h'i)^{\frac{3}{2}} = c \cdot k'^{\frac{3}{2}}$. Dieses genaue k' -Netz legt man dann an der betreffenden Stelle, in unserm Beispiel an der einspringenden Ecke, über das genähert gezeichnete Netz der Funktion $k = g + hi$ und bildet das Netz der neuen Funktion

$$w = u + vi = k' - k = (g' - g) + (h' - h)i,$$

indem man die Schnittpunkte der zueinander gehörigen Kurvenscharen in sinn- gemäßer Weise miteinander verbindet. Dies Netz muß, wenn das k -Netz richtig

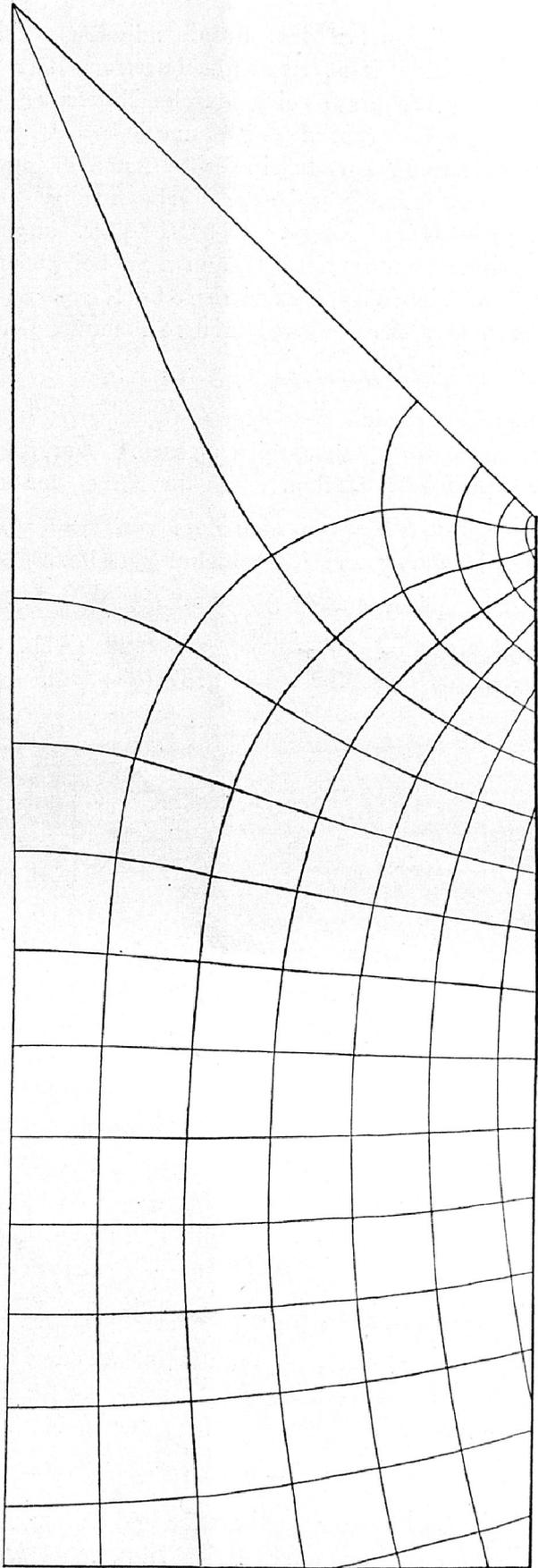


Abb. 4.

war, auch aus quadratischen Maschen bestehn. Im allgemeinen wird das aber nicht der Fall sein. Wenn die Abweichung der Maschen des k -Netzes von der quadratischen Gestalt auch nur eine geringe, vielleicht kaum bemerkbare ist, so sind die dadurch hervorgerufenen Abweichungen des w -Netzes von der richtigen Gestalt um so merklicher, je besser sich das k' -Netz an das k -Netz anschmiegt. Man hat damit einen empfindlichen Anzeiger von Fehlern des k -Netzes gegen die richtige Maschenform. Umgekehrt kann man nun diese Anzeichen benutzen, um die Fehler zu beseitigen. Man sieht es den fehlerhaften Maschen des w -Netzes sogleich an, wie man sie am ungezwungensten verbessern kann, sodaß sie quadratisch werden. Die damit verknüpften Änderungen des k -Netzes sind dann meist so geringfügig, daß sie nicht den ungezwungenen Anschluß an die benachbarten Gebiete des Netzes zerstören; sonst ist das bei der Änderung des w -Netzes zu berücksichtigen.

Auf diese Weise kann man die Maschen in einzelnen Teilgebieten des ganzen Netzes für sich quadratisch machen. Es würde dann noch notwendig sein, die einzelnen Gebiete miteinander in Einklang zu bringen. Da dies aber i. a. zu verwickelt wird, empfiehlt es sich, den ganzen Bereich mit einem genauen k' -Netz, das sich an einer Stelle dem gezeichneten k -Netz anschmiegt, zu bedecken und dann das zugehörige Netz der Funktion $w = k' - k$ zu zeichnen.

(6) Wir nehmen dazu wie in Gött. Nachr. 1911 S. 440 das Netz der Funktion $k' = g' + h'i = \ln\left(\frac{z}{c_1}\right)$, indem wir den Bereich \mathfrak{B} mit dem bekannten Netz der gleichmittigen Kreise und Nullstrahlen bedecken. (Hier ist $c_0 = 0$ angenommen.) Das auf diese Weise entstehende Netz der Funktion $w = k' - k$ ist zu einem Achtel in Abb. 4 dargestellt. (Hier sind die Maschen allerdings schon verbessert.) Wenn wir so das k' -Netz über den ganzen Bereich ausdehnen, bekommen wir für die Schar der u -Kurven einen bestimmten Anhalt, denn am Rande hat g einen bekannten Wert ($g = 0$); g' hat dort natürlich auch bekannte Werte und damit auch $u = g' - g$. Man kennt also die Punkte des Randes, an denen die u -Kurven sozusagen befestigt sind, wobingegen sie im Innern von \mathfrak{B} verschoben werden können. Dies und die Bedingung, daß die Quellstromlinien senkrecht auf dem Rande aufsetzen müssen, ist bei der Verbesserung der Maschen des w -Netzes zu berücksichtigen.

(7) Um die in der Abb. 4 am Nullpunkt entstehende Zeichnung zu verstehen, siehe Abb. 5, nehmen wir an, die Funktion $z = c_1 \xi + c_5 \xi^5$ führe den Einheitskreis der ξ -Ebene mit besserer Annäherung in den gegebenen Bereich der z -Ebene über. Wie der Bereich dann aussehen müßte, zeigt die Abb. 6. (Wegen der Symmetrieverhältnisse unseres Kreuzes kann z nur Glieder

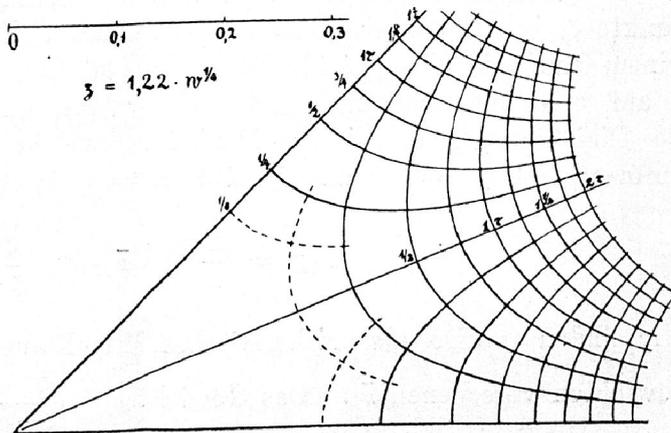


Abb. 5.

ξ^{2n+1} enthalten.) Die Zirkulations- und Quellstromlinien in \mathfrak{B} stellen die Funktion $g + hi = k = \ln \xi$ dar. In erster Annäherung ist $z = c_1 \xi' = c_1 e^{k'}$; also ist $k' = \ln \xi'$ diejenige Funktion, deren Netz sich bei $z = 0$ an das k -Netz anschmiegt. Dann ist $w = k' - k = \ln \xi' - \ln \xi = \ln \left(\frac{\xi'}{\xi} \right)$. Da $z = c_1 \xi' = c_1 \xi \left(1 + \frac{c_5}{c_1} \xi^4 \right)$, so ist $\frac{\xi'}{\xi} = 1 + \frac{c_5}{c_1} \xi^4$ und $w = \ln \left(\frac{\xi'}{\xi} \right) = \ln \left(1 + \frac{c_5}{c_1} \xi^4 \right) = \frac{c_5}{c_1} \xi^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{c_5}{c_1} \xi^4 \right)^2 + \dots$, in der Nähe des Nullpunktes ist also $w = \frac{c_5}{c_1} \xi^4$ und $\xi = \sqrt[4]{\frac{c_1}{c_5} w}$, $z = c_1 \sqrt[4]{\frac{c_1}{c_5}} \cdot w^{\frac{1}{4}}$; in unserm Falle ist $c_1 \sqrt[4]{\frac{c_1}{c_5}} = 1,22$, also ist $z = 1,22 (u + vi)^{\frac{1}{4}}$.

(8) Wenn man die Anschmiegung des k' -Netzes an das k -Netz verstärkt, wird das Netz der Funktion $w = k' - k$ entsprechend empfindlicher. Allerdings kann man die Gesetzmäßigkeit der Kurven dieses Netzes dann weniger leicht überblicken. Die Maschen selbst werden, wenn man die Maschen der andern beiden Netze nicht klein genug nimmt, verhältnismäßig groß; solchen großen Kurvenvierecken sieht man es auch weniger gut an, ob sie sich in quadratische Teilmaschen zerlegen lassen. Ebenso setzen die unvermeidlichen Zeichenfehler dem angedeuteten zeichnerischen Verbesserungsverfahren eine Grenze. Je besser die Anschmiegung der Netze ist, desto flacher werden auch die Schnitte der Kurven und desto unsicherer die Lage des w -Netzes. Trotzdem können derartige Netze, die sich dem gesuchten anschmiegen, gute Dienste leisten, namentlich dann, wenn man die Funktion w in der im Abschnitt (13) angegebenen Weise zur Berechnung des Stromlinienverlaufs aus den Quellstrommündungen benützt.

(9) Um ein genaues Kurvennetz zu erhalten, das für einen Bereich \mathfrak{B}' gilt, dessen Rand \mathfrak{R}' sich dem gegebenen Rande \mathfrak{R} anschmiegt, können wir so verfahren. Die in \mathfrak{B} angenähert gezeichneten Quellstromlinien für $h = 0, \tau, 2\tau \dots (n-1)\tau$ mögen auf \mathfrak{R} in $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2 \dots \bar{z}_{n-1}$ aufsetzen. $2\pi = n\tau$. Sie sollen also den Ecken $\xi_0 = 1, \xi_1 = e^{i\tau}, \xi_2 = e^{2i\tau} \dots \xi_{n-1} = e^{(n-1)i\tau}$ des dem Einheitskreise der ξ -Ebene eingeschriebenen regelmäßigen n -Ecks (mit einer Ecke in $\xi = 1$) entsprechen. Die Interpolationsformel von Lagrange gibt uns das Mittel eine ganze rationale Funktion zu bestimmen, welche die genannten n Punkte ξ_α in die entsprechenden \bar{z}_α überführt. Der Einheitskreis geht dabei mit seinem Rande in eine geschlossene Kurve \mathfrak{R}' über, welche sich durch die n Punkte \bar{z}_α auf \mathfrak{R} hindurchschlängelt und sich \mathfrak{R} dabei mehr oder minder anschmiegt.

Diejenige ganze rationale Funktion, welche die ξ -Ebene so in die z -Ebene umformt, daß $\xi_\alpha = e^{i\alpha\tau}$ auf \bar{z}_α fällt, $\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1$, ist

$$z(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=0}^{n-1} \bar{z}_\alpha \cdot e^{i\alpha\tau} \cdot \frac{\xi^n - 1}{\xi - e^{i\alpha\tau}}.$$

Wir finden z also als arithmetisches Mittel aus den mit gewissen komplexen Gewichten versehenen \bar{z}_α . Das Gewicht $e^{i\alpha\tau} \cdot \frac{\xi^n - 1}{\xi - e^{i\alpha\tau}}$ läßt sich nach Potenzen von ξ ordnen. Es ist nämlich

$$e^{\alpha\tau i} \cdot \frac{\xi^n - 1}{\xi - e^{\alpha\tau i}} = \frac{(\xi e^{-\alpha\tau i})^n - 1}{\xi e^{-\alpha\tau i} - 1} = \sum_0^{n-1} (\xi \cdot e^{-\alpha\tau i})^\beta;$$

also ist

$$z(\xi) = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \left(\bar{z}_\alpha \cdot \sum_0^{n-1} \xi^\beta \cdot e^{-\alpha\beta\tau i} \right) = \sum_0^{n-1} C_\beta \cdot \xi^\beta,$$

worin

$$C_\beta = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \bar{z}_\alpha e^{-\alpha\beta\tau i}$$

ist. Wir setzen $\bar{z}_\alpha = \bar{x}_\alpha + \bar{y}_\alpha \cdot i$, $C_\beta = A_\beta + B_\beta i$ und $e^{-\alpha\beta\tau i} = \cos(\alpha\beta\tau) - \sin(\alpha\beta\tau) i$; dann ist

$$A_\beta = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} (\bar{x}_\alpha \cdot \cos(\alpha\beta\tau) + \bar{y}_\alpha \cdot \sin(\alpha\beta\tau))$$

und

$$B_\beta = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} (-\bar{x}_\alpha \cdot \sin(\alpha\beta\tau) + \bar{y}_\alpha \cdot \cos(\alpha\beta\tau)).$$

Setzt man weiter $z = x + yi$ und $\xi = e^h = e^{g+hi} = e^g \cdot (\cos h + \sin h \cdot i)$, so ist

$$z(\xi) = x(\xi) + y(\xi) i = x(g, h) + y(g, h) i = \sum_0^{n-1} ([A_\beta + B_\beta i] \cdot e^{g\beta} \cdot [\cos(\beta h) + \sin(\beta h) i]),$$

also

$$x(g, h) = \sum_0^{n-1} (e^{g\beta} [A_\beta \cos(\beta h) - B_\beta \sin(\beta h)])$$

und

$$y(g, h) = \sum_0^{n-1} (e^{g\beta} [B_\beta \cos(\beta h) + A_\beta \sin(\beta h)]),$$

worin A_β und B_β die oben bestimmten arithmetischen Mittel sind. Diese Entwicklung ist der Entwicklung des Poissonschen Integrals in eine Reihe und für $g = 0$ der Fourierschen Reihe analog. Sie geht für $n = \infty$ unter der Bedingung darin über, daß die Randpunkte $\xi_\alpha = e^{\alpha\tau i}$ und \bar{z}_α einander so zugeordnet sind, wie es eine konforme Abbildung von \mathfrak{K} auf \mathfrak{B} erfordert. Für diesen Fall kann man zeigen, daß dann für beliebige positive ganze β die Gleichungen

$$\int_0^{2\pi} \bar{x} \cos(\beta h) dh = \int_0^{2\pi} \bar{y} \sin(\beta h) dh \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \bar{y} \cos(\beta h) dh = -\int_0^{2\pi} \bar{x} \sin(\beta h) dh$$

gelten müssen. Für unser Kreuz bleiben wegen der mannigfachen Symmetrie die Gleichungen

$$\int_0^{2\pi} \bar{y} \sin(3h) dh = \int_0^{2\pi} \bar{y} \sin(7h) dh = \dots = \int_0^{2\pi} \bar{y} \sin([4n+3]h) = \dots = 0$$

bestehn. Die Integrale $\int_0^{2\pi} \bar{y} \sin(\beta h) dh$ und $\int_0^{2\pi} \bar{y} \cos(\beta h) dh$ verschwinden nämlich für $\beta = 2, 6, 10 \dots$ und $\beta = 4, 8, 12 \dots$ bei jeder beliebigen Funktion $\bar{y}(h)$, wenn man nur die Symmetrieverhältnisse unseres Bereichs berücksichtigt.

Nur für $\beta = 1, 5, 9 \dots$ können die Integrale nicht verschwindende Werte liefern. Die Anwendung dieser Formeln zur Prüfung des gewonnenen Netzes liegt dann nah, wenn man zur Berechnung des Netzes aus den Mündungen der Quellstromlinien das in (11) erläuterte Verfahren anwendet, bei dem man von den Koordinaten $\bar{x}(h)$ und $\bar{y}(h)$ dieser Randpunkte ausgeht.

(10) Nimmt man $n = 8$ und für \bar{z}_α : $\frac{+3}{2}$, $\frac{+3i}{2}$, $\frac{+1+i}{2}$, d. h. die vier Mitten der äußeren Quadratseiten unseres Kreuzes und die vier einspringenden Ecken, so erhält man $z = 1,104\xi + 0,396.\xi^5$. Durch diese Umformung geht der Einheitskreis der ξ -Ebene in ein Vierblatt über, das durch die erwähnten acht Punkte des Kreuzrandes geht. Das Netz der g -Kreise und h -Strahlen im Einheitskreise wird dabei entsprechend mit umgeformt. (Abb. 6.)

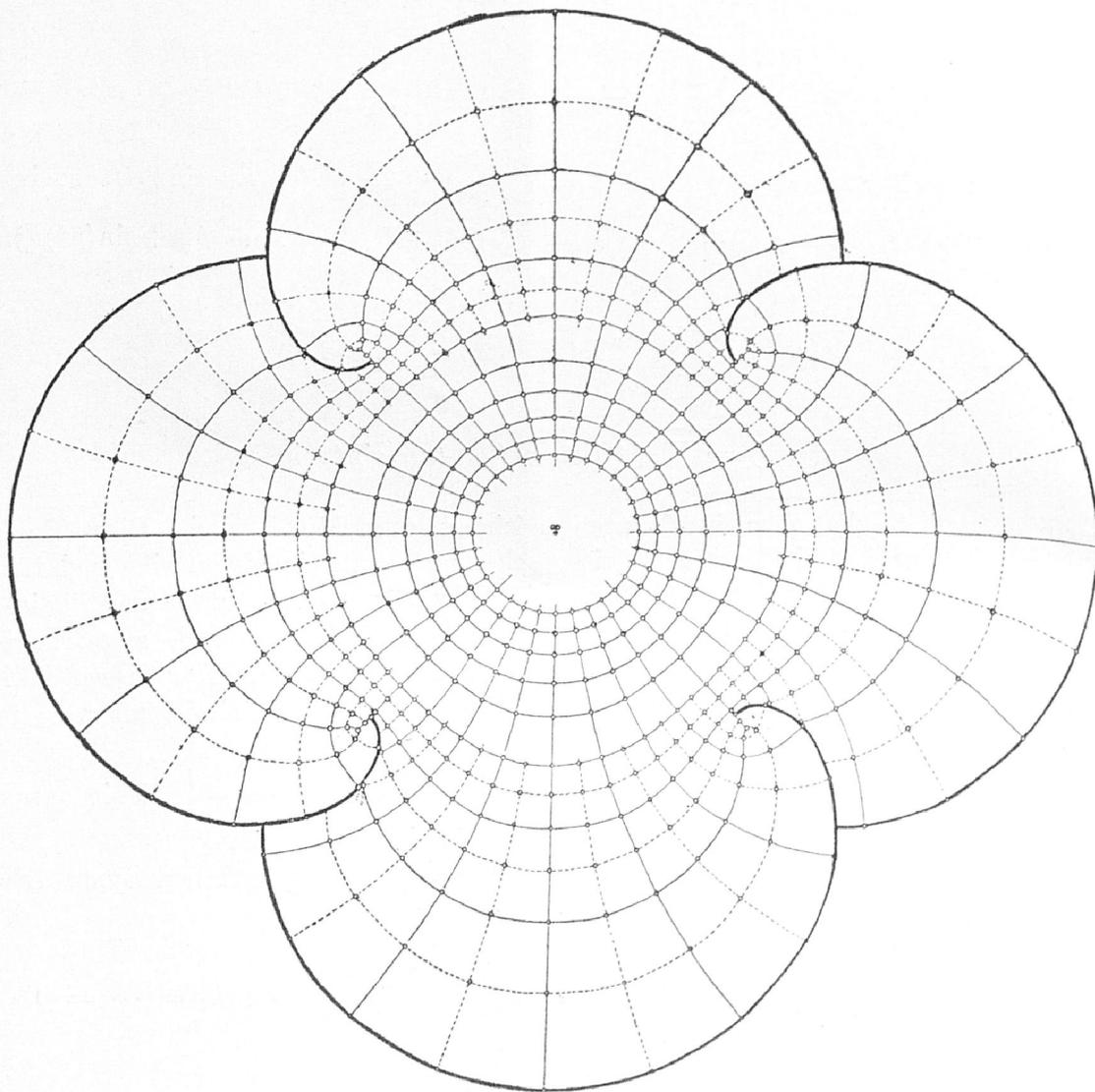


Abb. 6.

Nehmen wir 64 Punkte, in jedem Achtel 8, die wir durch die spätere Ausgleichung erhalten, dann bekommen wir die Funktion

$$\begin{aligned}
 z = & 0,8994 \zeta + 0,2631 \zeta^5 + 0,1240 \zeta^9 + 0,0805 \zeta^{13} \\
 & + 0,0523 \zeta^{17} + 0,0375 \zeta^{21} + 0,0249 \zeta^{25} + 0,0172 \zeta^{29} \\
 & + 0,0102 \zeta^{33} + 0,0053 \zeta^{37} + 0,0009 \zeta^{41} - 0,0018 \zeta^{45} \\
 & - 0,0049 \zeta^{49} - 0,0050 \zeta^{53} - 0,0032 \zeta^{57} - 0,0004 \zeta^{61}.
 \end{aligned}$$

Der Einheitskreis geht durch diese Funktion in ein Kreuz über, das außen an den Armen stark abgerundet ist, aber sich an den einspringenden Ecken, auf die es hauptsächlich ankommt, schon recht gut anschmiegt. (Abb. 7.)

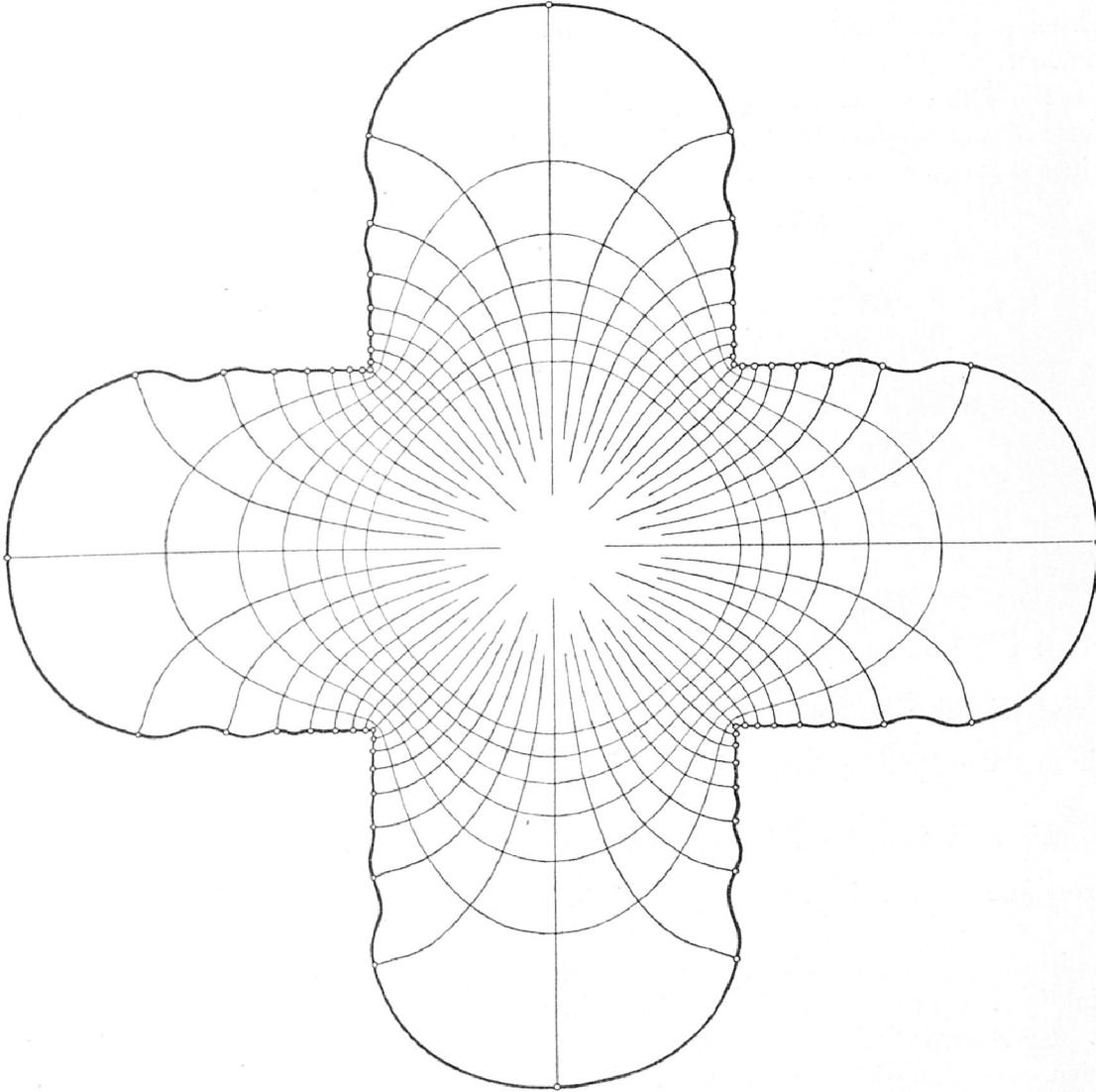


Abb. 7.

II. Rechnerische Verbesserung des Netzes.

(11) Wenn das genähert entworfene Netz der g - und h -Kurven in \mathfrak{B} in der vorstehend besprochenen Weise zeichnerisch verbessert worden ist, kann man daran gehen, es durch Rechnung weiter zu verbessern. Wie in Gött. Nachr. 1911 S. 438–440 gezeigt wird, kann man nämlich aus den auf dem Rande \mathfrak{R} angenommenen Mündungen der Quellstromlinien das zugehörige g, h -Netz im Bereich \mathfrak{B} berechnen. Bei unserm Bereich, der von lauter geraden Linien begrenzt wird, die zu den beiden Koordinatenachsen parallel laufen, empfiehlt es sich ein etwas abgeändertes Verfahren anzuwenden.

Die Mündungen der Quellstromlinien liefern auf \mathfrak{R} eine h -Skala. Mit Hilfe dieser Skala können wir z. B. die y -Koordinate jedes Randpunktes als Funktion seines h -Wertes in rechtwinkligen Koordinaten auftragen. Abb. 8a. (In derselben

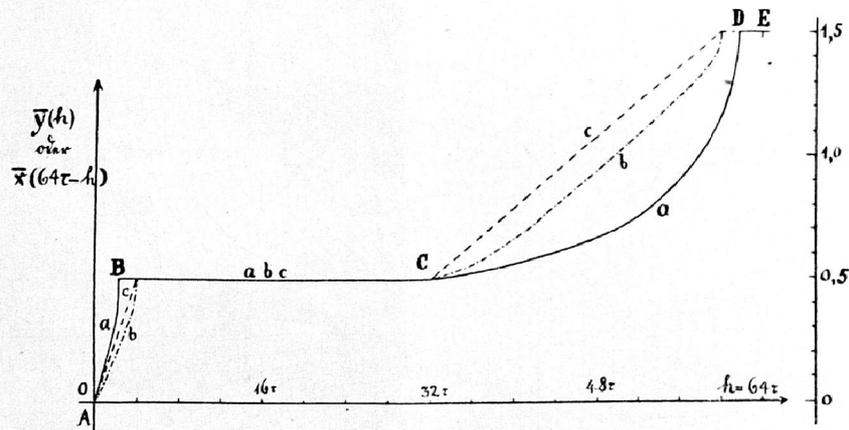


Abb. 8.

Weise wie hier die Kurve $\bar{y}(h)$ kann man natürlich auch $\bar{x}(h)$ gewinnen.) Bilden wir nun das Mittel $y(g, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{g, h} \bar{y}(h) dl^*$, so ist dieser Mittelwert das y desjenigen Netzpunktes, in dem sich die Quellstromlinie h und die Zirkulationsstromlinie g schneiden. Genau so finden wir $x(g, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{g, h} \bar{x}(h) dl^*$ und

damit den genauen Ort des betreffenden Netzpunktes ausgedrückt in rechtwinkligen Koordinaten. In mechanischer Deutung heißt das: Der Punkt g, h ist der Schwerpunkt der Mündungen aller von ihm ausgehenden Quellstromlinien. — Man sieht schon an der Gestalt der Kurven $\bar{y}(h)$ und $\bar{x}(h)$, warum sich dieses Verfahren bei unserm Kreuz empfiehlt; die Integration wird eben dadurch wesentlich erleichtert, daß die Kurven $\bar{y}(h)$ und $\bar{x}(h)$ lange Strecken parallel der h -Achse laufen. Sieh Abb. 8 u. 12.

(12) Diese Art der Berechnung der Netzpunkte stellt sich als ein besonderer Fall folgenden allgemeinen Verfahrens dar. Wir bedecken \mathfrak{B} in der z -Ebene mit dem Netz einer innerhalb und auf dem Rande von \mathfrak{B} regulären analytischen Funktion $w = u + vi$. Die Komponenten u und v dieser

Funktion haben auf dem Rande \mathfrak{R} von \mathfrak{B} bestimmte Werte \bar{u} und \bar{v} . Da u und v als Komponenten einer analytischen Funktion der Bedingung $\mathcal{A}f = 0$ genügen, so können die Werte $u(g, h)$ und $v(g, h)$, die zu einem Punkte g, h in \mathfrak{B} gehören, aus den Randwerten \bar{u} und \bar{v} durch die bekannte Mittelbildung berechnet werden,

$$u(g, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{g, h} \bar{u} dh^* \quad \text{und} \quad v(g, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{g, h} \bar{v} dh^*.$$

Umgekehrt kann man schließen, daß der Schnittpunkt der Zirkulationsstromlinie g mit der Quellstromlinie h an der Stelle des u, v -Netzes liegt, wo u und v die berechneten Werte $u(g, h)$ und $v(g, h)$ annehmen. Damit kann man die Lage jedes Netzpunktes g, h im u, v -Netz berechnen und das zu den angenommenen Mündungen gehörige Netz berechnen. In dem soeben (11) geschilderten Falle wählten wir einfach $w = z$, also $u = x$ und $v = y$. — Als Erweiterung kommt noch hinzu, daß die beiden Kurvenscharen u und v gar nicht einmal die Komponenten derselben analytischen Funktion zu sein brauchen, sondern auch die Komponenten von zwei verschiedenen derartigen Funktionen sein können, jede muß nur für sich der Differentialgleichung $\mathcal{A}f = 0$ genügen. Allerdings ist dann notwendig, daß das Netz dabei eindeutig ist, insofern als jede u -Kurve jede v -Kurve nur einmal schneidet.

(13) Besitzt man eins der oben angewandten Netze $k' = g' + h'i$, die sich dem gezeichneten Netz der Funktion $k = g + hi$ an der Quelle so anschmiegen, daß k und k' dort in derselben Weise unendlich werden, so bleibt $w = k' - k$ dort endlich und kann das w -Netz zur Berechnung der Netzpunkte gebraucht werden. $u(g, h)$ und $v(g, h)$ findet man wie oben aus den Randwerten \bar{u} und \bar{v} durch Integration und Division durch 2π , dann ist $g' = u + g$ und $h' = v + h$. Diese Berechnung empfiehlt sich deshalb, weil \bar{u} und \bar{v} als Differenzen sich anschmiegender Netze nur kleine Werte annehmen. Allerdings muß das k' -Netz genau gezeichnet vorliegen.

Wenn der vorgelegte Bereich \mathfrak{B} sich nicht weit von der Kreis-

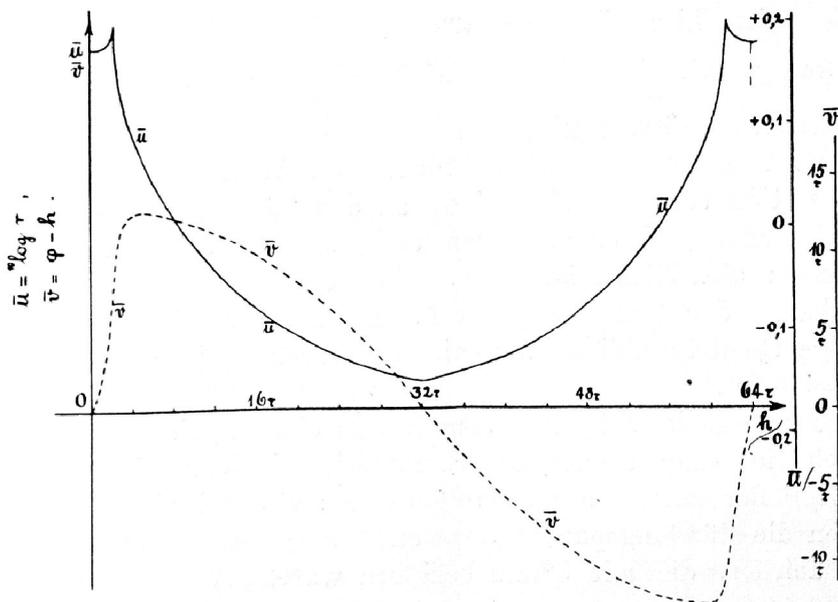


Abb. 9.

form entfernt, nimmt man einfach wie in Gött. Nachr. 1911 S. 431 ff. und (6) $k' = \ln \frac{z}{c_1} = \ln \frac{r}{r_1} + (\varphi - h_1) i$, wo $z = r \cdot e^{\varphi i}$ und $c_1 = e^{k_1} = e^{g_1 + h_1 i} = r_1 \cdot e^{h_1 i}$ ist. Durch Drehung kann man $h_1 = 0$ machen (und nötigenfalls durch Änderung des Maßstabes $\ln r_1 = 0$). Dann ist $u = \ln \frac{r}{r_1} - g$ und $v = \varphi - h$ und damit $\bar{u} = \ln \bar{r} - \ln r_1$, $\bar{v} = \bar{\varphi} - h$, wo \bar{r} und $\bar{\varphi}$ die Polarkoordinaten desjenigen Randpunktes sind, wo die Quellstromlinie h mündet. Abb. 9. Dann bekommt man durch die bekannte Mittelbildung aus diesen Randwerten $u(g, h)$ und $v(g, h)$ und daraus dann die Werte $r(g, h)$ und $\varphi(g, h)$ des Netzpunktes g, h , nämlich

$$\ln \frac{r}{r_1} = u(g, h) + g \quad \text{und} \quad \varphi = v(g, h) + h.$$

Anders ausgedrückt ist $r(g, h)$ gleich dem geometrischen Mittel aus den Entfernungen der zu dem Quellpunkt g, h gehörigen Mündungen vom Nullpunkt multipliziert mit e^g . Der Maßstab r_1 hebt sich links und rechts heraus. Ähnlich ist $\varphi(g, h)$ gleich dem arithmetischen Mittel aus den Werten $(\varphi - h)$ der zugehörigen Mündungen vermehrt um h .

(14) Um den Maßstab r_1 , der schon oben (3) als Halbmesser der ersten Näherung gebraucht wurde, zu bestimmen, überlegen wir Folgendes. Nach (7) ist mit größerer Annäherung $w = C \cdot z^4$, also wird $w = k' - k$ wie die vierte Potenz von z bei $z = 0$ unendlich klein. In der Umgebung dieses Punktes kann man also mit großer Annäherung $k = k'$ oder $g + hi = \ln \frac{r}{r_1} + (\varphi - h_1) i$ setzen. Demnach ist hier $r = r_1 \cdot e^g$. Andererseits war nach dem vorigen Abschnitt, wenn m das geometrische Mittel aus den Entfernungen: Nullpunkt — Mündungen der Quellstromlinien, die von der Quelle g, h ausgehen, bedeutet, $r = m \cdot e^g$. Also ist r_1 gleich diesem geometrischen Mittel für den Nullpunkt, bzw. dessen Umgebung, da sich m hier nur sehr wenig ändert.

(15) Es seien hier ein paar Worte über die Mittelbildungen $\frac{1}{2\pi} \int \bar{u} dh^*$ gesagt, wie sie praktisch bei der Berechnung der Netzpunkte ausgeführt werden (Gött. Nachr. 1911 S. 433—437). Diese Berechnungsweise läuft ja im Grunde genommen darauf hinaus, die Werte \bar{u} , die auf dem Kreisrande als Funktion von h gegeben sind, an den Mündungen der vom Punkte P ausgehenden Quellstromlinien abzulesen und zu einem arithmetischen Mittel zusammenzufassen; dies Mittel ist dann, wie man leicht in den Abb. 10 und 11 verifizieren kann, der Wert von u in P . In diesen Abbildungen sind nämlich zwei derartige Quellstrombilder auf die Kurvenschar einer Funktion u gelegt, für die $\Delta u = 0$ ist.

Errichtet man senkrecht über dem Kreise einen Zylinder, so schneidet er auf der durch die u -Kurven angedeuteten Fläche die Kurve $\bar{u}(h)$ aus. Schneidet man diesen Zylinder längs einer Mantelgeraden auf und breitet ihn in der Ebene aus, so bilden die Mündungspunkte der von P ausgehenden Quellstromlinien eine Skala von Punkten, die mit h^* zu beziffern wären, wobei, bis auf eine Verschiebung der Skala mit dem Nullpunkt nach einem Punkte $h = h_1$, $\tan\left(\frac{-g}{2}\right)$

$= \frac{\tan \frac{h}{2}}{\tan \frac{h^*}{2}}$ ist. Gött. Nachr. 1911 S. 436/437 und (22). In Abb. 12 ist die
ausgebreitete Kurve $\bar{u}(h)$ die in (11) gebrauchte Darstellung einer Koordi-

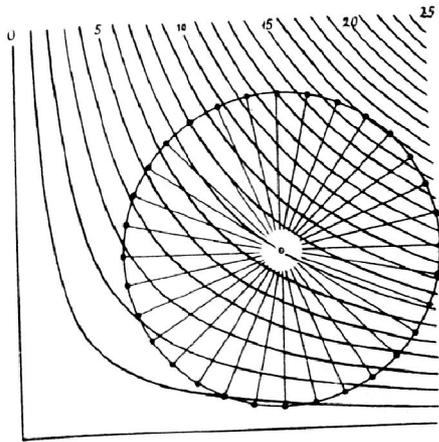


Abb. 10

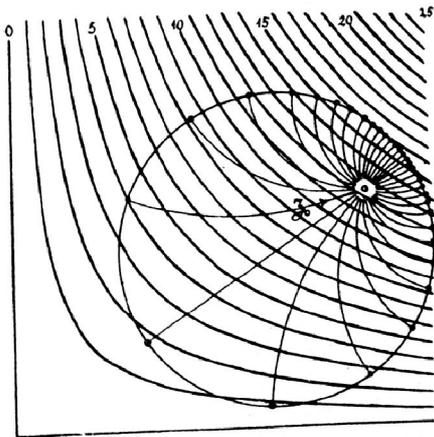


Abb. 11.

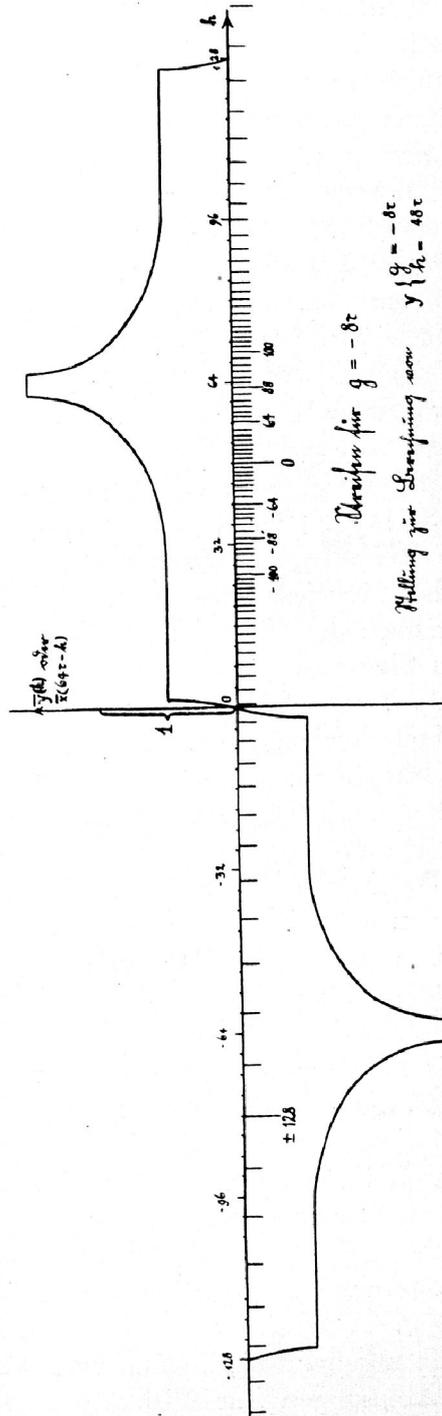


Abb. 12.

nate, z. B. $\bar{y}(h)$, der Randpunkte, abhängig vom Quellstromlinienparameter h . Die darunter liegende Skala ist für $g = -8\tau$ gezeichnet und liegt mit ihrem

Nullpunkt auf $h_1 = 48\tau$. Der mit ihrer Hilfe zu berechnende Mittelwert $\frac{1}{256} \int \bar{y}(h) dh^*$ würde also das y des Punktes $-8\tau)48\tau$ sein. (Hier sind h und h^* , wie immer bei der praktischen Anwendung, in Achtelstrich gemessen).

(16) Die Zeichnung der $u(h)$ -Kurve spannt man am besten auf ein längliches Reißbrett, das unten eine parallel dem unteren Rande verlaufende seichte Nut zur Aufnahme eines schmalen Papierstreifens besitzt, der die Skala der Mündungspunkte tragen soll. Die Länge für 1τ wählt man bequem, z. B. $\frac{1}{2}$ cm. Das Brett ist dann etwas über 64 cm lang; unsymmetrische Kurven müssen allerdings in zwei verschiedene Teile zerlegt werden. Die Streifen mit den h^* -Skalen braucht man wegen ihrer Symmetrie nur zur Hälfte zu zeichnen. Man kann sie dann der Länge nach in die beiden Teile zerschneiden.

Man befestigt den Streifen mit seinem Nullpunkt unter dem h derjenigen Quellstromlinie, auf welcher der Punkt g_1, h_1 liegt, für den man den Wert u berechnen will. Dann muß man die Ordinaten über den einzelnen Punkten der Skala ablesen und zusammenfügen. Dabei verwendet man nach dem Vorgange von v. Sanden¹⁾ zweckmäßigerweise ein Meßrädchen, wie es zum Messen von Strecken auf Karten und Plänen gebraucht wird. Dieses mißt die Ordinaten und zählt sie selbsttätig zusammen. Zur Führung dient eine kurze, an der unteren Seite des Brettes zu verschiebende Reißschiene. Das von mir dabei benutzte Rieflersche Instrument gab einen Fehler, der kleiner blieb als 1‰ . Es war also für diese Zwecke vorzüglich geeignet.

Je nach der Genauigkeit, die man erstrebt, kann man die Ordinaten entweder an den Skalenpunkten selber entnehmen oder, was besser ist, mitten zwischen zwei Punkten. Noch besser schätzt man mitten zwischen zwei Punkten entsprechend der Simpsonschen Regel, bei größerem Abstände der Skalenpunkte und merklicher Krümmung der Kurve, die Erhebung der Kurve über die Sehne oder ihre Senkung unter sie und geht bis auf ein Drittel dieser Strecke an die Kurve heran.

(17) Der Fehler des so bestimmten Mittels bewegt sich bei einem Wert von $u = \text{rd. } 100 \text{ mm}$ um $0,1 \text{ mm}$, wenn man sorgfältig arbeitet. Er ist größer am Rande, kleiner gegen die Mitte zu. Die Skalen für kleine $|g|$ sind nämlich bei $h^* = 128\tau = 180^\circ$ recht weit und geben dadurch zu Fehlern Anlaß; ebenso sind sie bei $h^* = 0$ sehr eng, sodaß man hier, um Zeit zu sparen, immer mehrere Schritte zusammenfassen wird, wodurch dann allerdings der Fehler der Einzelablesung entsprechend multipliziert wird, und nicht wie bei der gewöhnlichen Fehlerfortpflanzung mit der Quadratwurzel aus der Anzahl der Ablesungen wächst. Bei vielen Summanden gleichen sich die nach beiden Richtungen schwankenden Abweichungen in der Summe zum Teil aus, und daher hat das Mittel auch die verhältnismäßig hohe Genauigkeit, trotz der Größe der Fehler der Einzelablesung; so verhält es sich bei einem weit genug im Innern liegenden Punkte P . Von einem systematischen Fehler der Kurve $u(h)$ muß man dabei natürlich absehn. Ein Fehler von $0,1 \text{ mm}$ des Mittels entspricht dann bei $256 = 16^2$ Ablesungen einem 16 fachen Fehler der Einzelablesung, nämlich $1,6 \text{ mm}$,

1) v. Sanden: Über den Auftrieb im natürlichen Winde. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1912, Bd. 61, S. 231.

und das ist doch verhältnismäßig viel. Natürlich ist der Fehler für kleinere Werte u nicht in demselben Verhältnis kleiner, also etwa von 10 mm $1/100$ mm; denn an seinem Entstehen wirken nicht entsprechend verkleinerte u mit eben solchen Fehlern mit, sondern er entsteht als Unterschied zweier großer Werte mit entsprechender Fehlergröße.

(18) Neben den durch die Dicke der Linien und die Unsicherheit ihrer Lage bedingten Fehlern in der Ablesung der zu addierenden Werte kommen noch andere Fehlerquellen in Betracht. Beispielsweise dehnen und ziehen sich die auf Papierstreifen gezeichneten Skalen unter dem Einfluß der Luftfeuchtigkeit ganz merklich; ebenso wie die Zeichnung der Kurve $u(h)$. Der im trockenen Zustande 64 cm lange Halbstreifen bekommt bei starker Luftfeuchtigkeit leicht eine Verlängerung von 1—2 mm. Man kann den Zustand des Papiers ja leicht entsprechend ändern, doch ist das Verfahren umständlich und sind die Verzerrungen nicht im ganzen Papier proportional. Außerdem gehen die Verlängerungen durch Feuchtigkeit unter Umständen durch noch so scharfes Trocknen nicht zurück. Solang man also kein anderes Zeichenmaterial besitzt, wird man die Genauigkeit nicht leicht weiter steigern, seien die Auftragevorrichtungen auch noch so genau, z. B. beim Gebrauch eines Koordinatographen. Es empfiehlt sich, eine Zeichnung, die aus verschiedenen Teilen besteht, möglichst hintereinander bei denselben Papierzuständen zu machen.

Gegen den groben Fehler, der bei öfter notwendigen zeitweiligen Unterbrechungen der Integration leicht vorkommt, daß man einen Skalenpunkt überschlägt oder doppelt nimmt, schützt man sich am besten dadurch, daß man sich eine bestimmte Arbeitsweise angewöhnt.

(19) Nachdem man die Skalen berechnet und gezeichnet hat, kann man die mehrfach auftretenden gleichartigen Rechnungen durch Herstellung von Tafeln, Skalen und Nomogrammen vorweg erledigen. Wenn diese Vorbereitungen getroffen sind, kann man eine solche Mittelbildung in 10 bis 20 Minuten ausführen. Genaueres läßt sich über die Schnelligkeit der Arbeit nicht aussagen, denn sie ist, abgesehen von Übung und Geschick, noch durch mancherlei anderes bedingt. Zunächst hängt die Arbeitsgeschwindigkeit auch von der Form der vorgelegten Funktion $u(h)$ ab. Flachwellige Kurven lassen sich schneller bearbeiten als solche mit Spitzen und steilen Türmen. Ebenso sind die Punkte nahe am Rande schneller zu erledigen als die mehr in der Mitte gelegenen, da für kleines $|g|$ bei $h^* = 0$ eben mehrere Ordinaten zusammengenommen werden können. Allerdings muß man dann wegen der Multiplikation etwas genauer arbeiten als sonst. Überhaupt bestimmen die Anforderungen, welche an die Genauigkeit gestellt werden, die Arbeitsgeschwindigkeit naturgemäß recht stark.

(20) Wie man sieht, ist die Berechnung der Netzpunkte immerhin noch mit einem gewissen Aufwand an Zeit verbunden. Manchmal kommt man aber auf einem andern Wege etwas schneller zum Ziel, wenn man das ganze Netz berechnen muß. Dann berechnet man mit Hilfe der h^* -Skalen nur die Punkte einiger Zirkulationsstromlinien nah am Rande, welche die Ausbuchtungen und Ecken des Randes noch fühlbar mitmachen. Eine Zirkulationsstromlinie, welche sich der Kreisform schon mehr nähert, sehen wir dann als einen neuen Rand an und entwickeln $x(h)$ und $y(h)$ nach Fourier. Dadurch bekommen wir die Koeffizienten einer Reihe zur Berechnung der Punkte im Innern. Dabei

kann man mit Vorteil das von Herrn Prof. Runge in seinem Buche „Theorie und Praxis der Reihen“, § 17, dargestellte Verfahren anwenden. Neuerdings sind für dieses Verfahren ausführliche Rechnungsvordrucke erschienen¹⁾. Wir nehmen eine Reihe von Werten $x(h)$ bzw. $y(h)$, d. h. die Koordinaten von Netzpunkten, welche in regelmäßigen h -Schritten auf der Zirkulationsstromlinie aufeinander folgen. Es genügt nun schon eine kleine Zahl solcher Werte, um daraus die angenäherte Darstellung einer Kurve zu bekommen, welche durch diese Punkte geht und sich auch im übrigen gut anschmiegt. Für den Randsaum hätte man zu viel Glieder nehmen müssen, um die Punkte der ganzen Kurve einigermaßen genau zu bekommen. (Sieh z. B. die Entwicklung von $v^2(h)$ in Abschn. (47)). Für das Innere des neuen Bereichs werden die Koeffizienten der Fourierschen Reihe mit $e^{g\beta}$ multipliziert, wo β der Reihenindex ist. Wegen des großen Betrages der Exponenten $g\beta$ werden die Koeffizienten der Reihe für das Innere von \mathfrak{B} bald sehr klein und die hier liegenden Punkte lassen sich schnell berechnen. Es kommt dabei die Anschmiegung des Netzes $k' = \ln \frac{z}{c_1}$ zur Geltung, die sich beim Gebrauch der Integrationssskalen nicht eben erleichternd bemerkbar machte.

(21) Die der Arbeit beiliegenden Zeichnungen sind zwar noch alle mit Hilfe des im Vorigen beschriebenen Verfahrens hergestellt worden, doch soll hier noch der Grundgedanke zu einem Integrator angegeben werden, der letztthin nach meinen Angaben durch Herrn G. Bartels, Mechaniker in Göttingen, für das Göttinger Institut für angewandte Mathematik fertiggestellt worden ist. Mit Hilfe dieses Integrators kann man die Randwertaufgabe $\Delta u = 0$ für den Kreis auf mechanischem Wege lösen.

Zunächst soll die auch für den Integrator wichtige Beziehung

$$\mathfrak{Tan}\left(\frac{-g}{2}\right) = \frac{\tan \frac{h}{2}}{\tan \frac{h^*}{2}}$$

auf einem anschaulichen Wege hergeleitet werden. Wir bilden zu dem Zwecke den Einheitskreis der ξ -Ebene durch $z' = \frac{\xi-1}{\xi+1}$ auf die negativ-reelle halbe z' -Ebene ab. Sieh Abb. 13. Der Nullpunkt kommt dabei nach $z' = -1$ und der Kreis geht in die y' -Achse über. Setzt man nämlich $\xi = e^k$, so ist $z' = \frac{e^k-1}{e^k+1} = \mathfrak{Tan} \frac{k}{2}$; für $k = hi$ also $z' = i \tan \frac{h}{2}$. Anstatt die Randwertaufgabe am Kreise zu lösen, kann man sie durch Eintragung der Werte $\bar{u}(h)$ an die entsprechende Stelle der y' -Achse $y' = \tan \frac{h}{2}$ und Integration längs der y' -Achse mit Hilfe der zugehörigen einfachen $c \cdot \tan \frac{h}{2}$ -Skalen lösen. Hier sind die Integrationsgrenzen zwar $y' = \pm \infty$; trotzdem empfiehlt sich

1) C. Runge, Erläut. d. Rechnungsformulars z. Zerlegung einer empirisch-gegebenen periodischen Funktion in Sinuswellen. Braunschweig, 1913, Fr. Vieweg u. Sohn.

dieses Verfahren, wenn es sich darum handelt, $u(g, h)$ für die Umgebung eines Punktes nahe am Rande zu berechnen. Dann spielen die entfernteren u ja nur

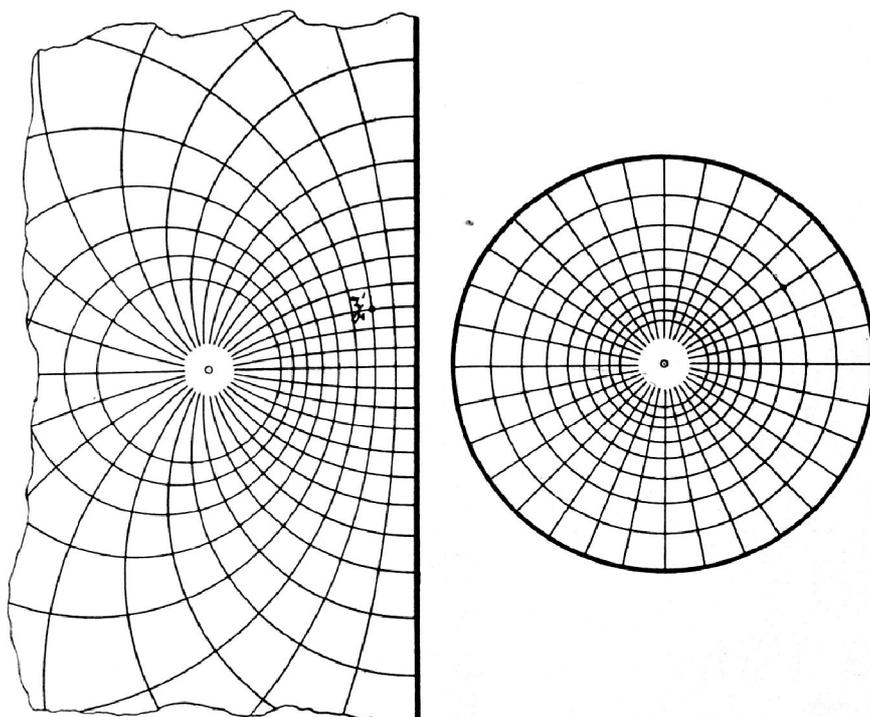


Abb. 13.

eine geringe, abschätzbare Rolle. Die hierbei notwendigen Skalen $h^*(h)$ sind alle geometrisch ähnlich, da eben für alle Quellpunkte der Halbebene die zugehörigen g, h -Netze einander ähnlich werden. Durch ein

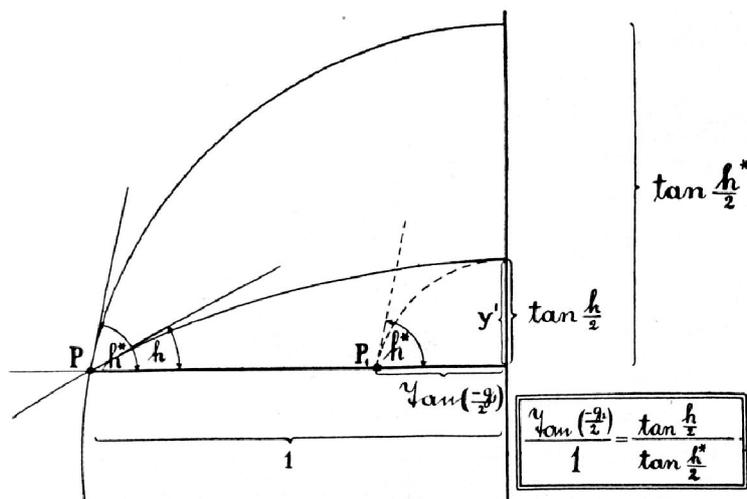


Abb. 14.

Büschel von Strahlen, die von dem betreffenden Punkte z' unter den Winkeln $\frac{h}{2}$ mit der Nullrichtung ausgehen, werden die zugehörigen Quellstrommündungen auf der y' -Achse ausgeschnitten.

(22) Wenn man in der Abb. 14 von der geometrischen Ähnlichkeit der Netze für die Quellen P und P_1 Gebrauch macht, so erhält man leicht die

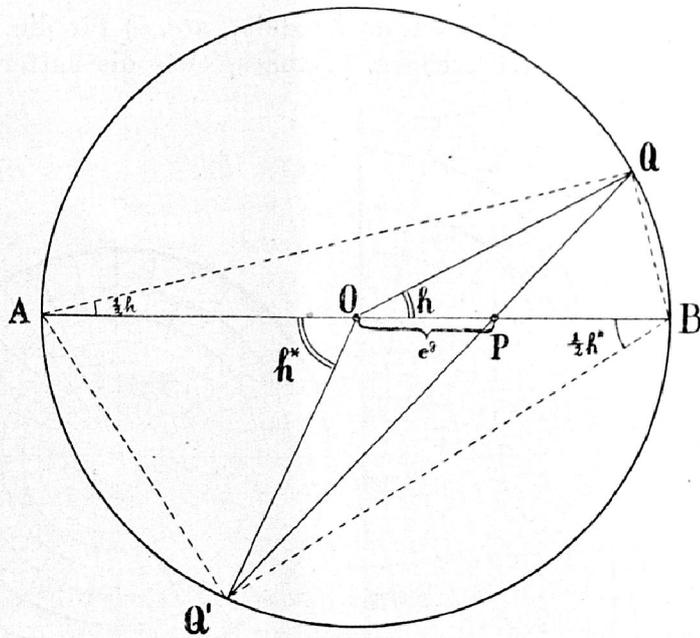


Abb. 15.

Formel $\text{Tan}\left(\frac{-g}{2}\right) = \frac{\tan \frac{h}{2}}{\tan \frac{h^*}{2}}$. Die geometrische Deutung dieser Formel

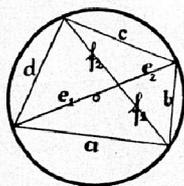


Abb. 16.

$$\frac{ab}{cd} = \frac{f_1}{f_2}$$

$$\frac{ad}{bc} = \frac{e_1}{e_2}$$

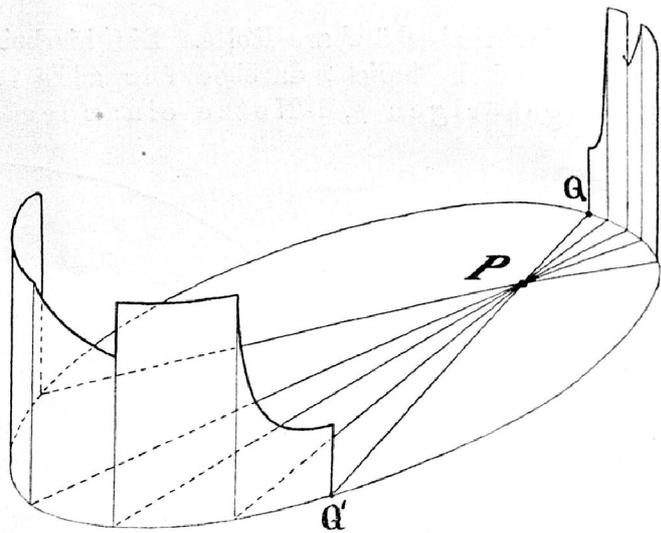


Abb. 17.

liefert dann den mechanisch verwertbaren Zusammenhang zwischen h und h^* . In Abb. 15 ist $OA = OB = 1$ und $OP = e^g$; dann ist das Teilverhältnis des Durchmessers AB in P $\frac{PB}{AP} = \frac{1 - e^g}{1 + e^g} = \text{Tan}\left(\frac{-g}{2}\right)$. Zieht man eine andere Sehne QQ' durch P und zeichnet das Sehnenviereck $AQBQ'$, so ist nach einem wenig bekannten elementaren Lehrsatz (siehe Abb. 16) dieses Teilverhältnis $\frac{PB}{AP} = \frac{QB \cdot Q'B}{QA \cdot Q'A}$ und dies weiter gleich $\frac{\tan QAB}{\tan Q'BA} = \frac{\tan \frac{1}{2} QOB}{\tan \frac{1}{2} Q'OA}$. Wenn also $QOB = h$ ist, so ist $Q'OA = h^*$.

Überträgt man demnach (wie in Abb. 17) die in Q vorhandene Ordinate u nach Q' und macht das für den ganzen Kreis, so ist damit die Kurve $u(h)$ zu der (allerdings um π verschobenen) Kurve $u(h^*)$ transformiert worden. $u(h^*)$ kann man dann mit irgend einem Planimeter integrieren. Wenn man nun durch 2π dividiert, so bekommt man die mittlere Höhe von $u(h^*)$ und damit den Wert von u in P .

(23) Diese Transformation ist leicht mechanisch zu verwirklichen. Die Kurve $u(h)$ wird auf eine h -Walze gezeichnet. Eine andere h^* -Walze gleicher Gestalt drehe sich um dieselbe Achse. Beide Walzen sind durch eine mit einer Nut versehene Schiene zwangsläufig mit einander verbunden. Diese Schiene hält die drei Punkte P , Q und Q' in gerader Linie; Q ist ein am Umfang der h -Walze einstellbarer Punkt, P ein in beliebiger Entfernung vom Mittelpunkt feststellbarer Zapfen und Q' ein am Umfang der h^* -Walze angebrachter fester Punkt.

Verfolgt man mit einem Fahrstift, der am Anfang einer parallel zur Walzenachse verschiebbaren konstanten Strecke angebracht ist, die Kurve $u(h)$ auf der sich darunter drehenden h -Walze, so beschreibt ein Schreibstift am Ende dieser Strecke auf der h^* -Walze die transformierte Kurve $u(h^*)$. Diese Kurve braucht dann nur noch planimetriert zu werden. An dem für das Göttinger Institut angefertigten Integrator ist aber gleich das Planimeter eingebaut worden. Da-

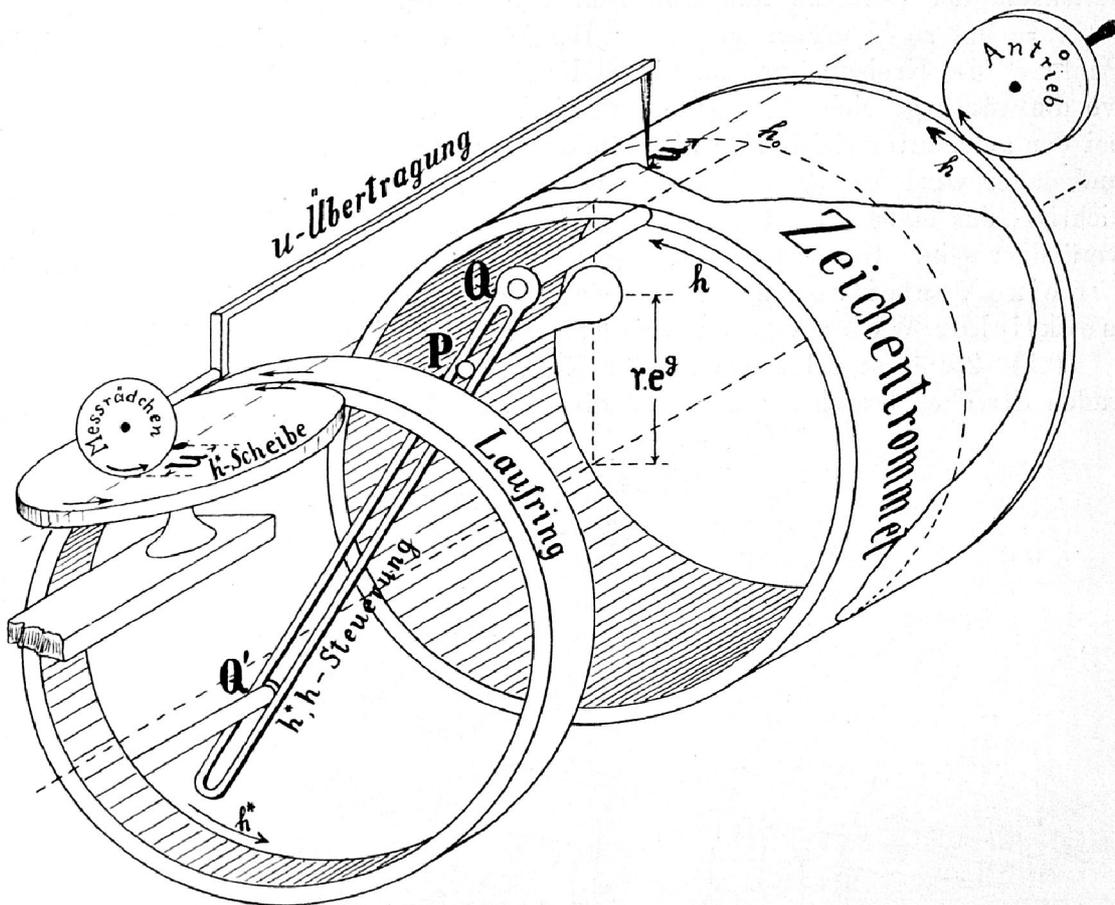


Abb. 18.

durch wurde die h^* -Walze überflüssig; statt dessen konnte ein Lauftring die h^* -Bewegung erzeugen und an die Planimeteereinrichtung weiter geben. Diese besteht im wesentlichen aus einer Scheibe, die mit h^* -Bewegung läuft, und einem, dem Coradischen Präzisionsplanimeter entnommenen Meßrädchen, das durch die erwähnte verschiebbare Strecke in der Entfernung u von dem Mittelpunkt der Scheibe gehalten wird, eben in derselben Entfernung wie der Fahrstift von der h -Achse. Dadurch wird die Abrollung des Meßrädchens proportional $\int u dh^*$. (Vergleiche die ähnliche Einrichtung des Wetli-Hansenschen Planimeters, beschrieben in Galle, math. Instrumente, Leipzig Teubner, 1912, Seite 81—82).

Der in Abb. 18 schematisch dargestellte Integrator liefert bei einem Walzenumfang von 128 cm und einer Walzenhöhe von 30 cm Werte u für Punkte P , die dem Rande des Bereiches \mathfrak{B} nicht zu nah liegen, mit einer Genauigkeit von $\pm \frac{1}{20}$ mm und mehr und das in erheblich kürzerer Zeit, als dies mit Hilfe der h^* -Skalen möglich war. Dabei genießt man den Vorteil, jeden beliebigen Punkt im Kreise, bis auf eine durch die Zapfendicke bedingte schmale Randzone, einstellen zu können. Von den h^* -Skalen hat man naturgemäß nur solche für bestimmte runde g vorrätig.

(24) Durch das oben beschriebene Verfahren kann man die Punkte des g, h -Netzes natürlich nur dann richtig erhalten, wenn die Verteilung der Mündungen auf dem Rande richtig war, wenn also durch eine konforme Abbildung der Einheitskreis der ζ -Ebene mit dem sein Inneres erfüllenden Netz der Funktion $g + hi = \ln \zeta$ so in unsern gegebenen Bereich \mathfrak{B} umgeformt wird, daß dabei jeder Punkt e^{hi} des Kreisumfangs an die Stelle $\bar{z}(h)$ auf dem gegebenen Rande \mathfrak{R} fällt, wo die für h gezeichnete Quellstromlinie mündet. Im allgemeinen werden aber bei der genäherten Zeichnung die Mündungen nicht genau an dieser Stelle liegen, und daher wird das Quellstrombild, das man hieraus berechnet, auch gegen das richtige, das einer solchen konformen Abbildung entspricht, in bestimmter Weise verändert sein. Um diese Änderungen zu erkennen, wollen wir das g, h -Netz für eine Verteilung der Mündungen berechnen, die in bestimmter, merklicher Weise von der richtigen Verteilung abweicht.

(25) Zunächst nehmen wir eine Kurve $\bar{x}(h)$ bzw. $\bar{y}(h)$, die aus lauter geraden Strecken besteht. (In Abb. 8 die gestrichelte Linie c). Von dem dazu ge-

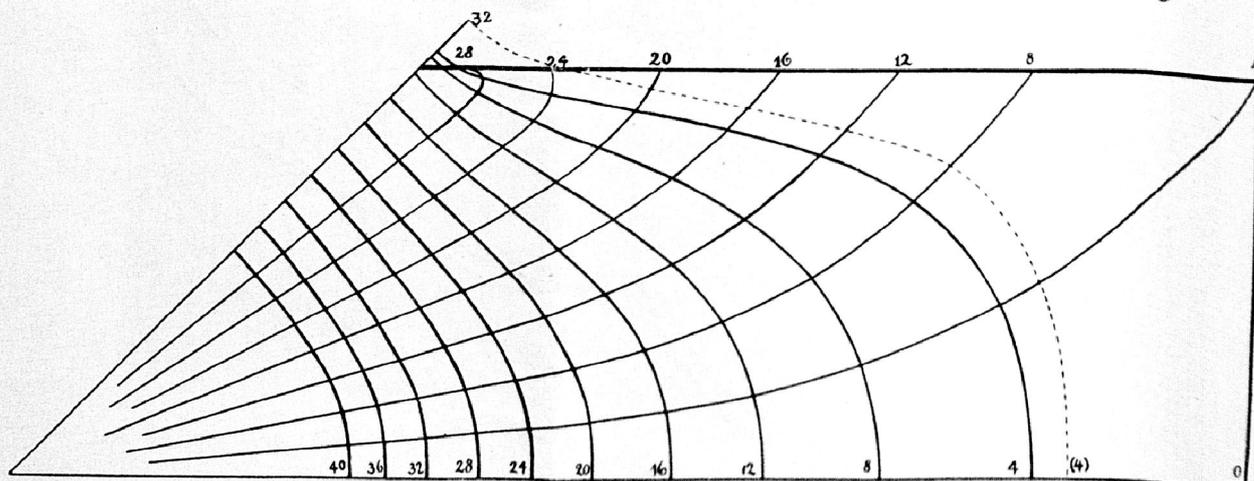


Abb. 19.

hörigen Netz der Zirkulations- und Quellstromlinien enthält die Abb. 19 nur die gestrichelt gezeichnete Zirkulationsstromlinie für $g = -4\tau$. r_1 ist hier 1,144.

Zum Vergleich diene, daß der erste zeichnerische Entwurf $r_1 = 0,912$ und die spätere Ausgleichung $r_1 = 0,898$ ergab. Man sieht, wie an der einspringenden Ecke die Zirkulationsstromlinie sogar beträchtlich aus \mathfrak{B} heraustritt. Um dies zu mildern, verändern wir $\bar{x}(h)$ bzw. $\bar{y}(h)$ ein wenig, indem wir die geneigten geraden Strecken ein wenig biegen. (Abb. 8 b). Hier ist $r_1 = 1,055$. Das zugehörige Netz zeigt Abb. 19. Auch hier geht die Linie $g = -4\tau$ noch ein wenig über den Bereich \mathfrak{B} hinaus. Dieser Fehler läßt sich also in der angewandten Weise nicht ganz beheben, dazu müssen auch die geradlinigen Stücke noch verändert werden. (Sieh Abb. 8 a).

An dem falschen Netz Abb. 19 erkennen wir nun leicht das Folgende: Die Maschen sind keineswegs Quadrate. Gegen die Mitte hin wird das allerdings besser. Die Winkel sind schiefe, das Verhältnis der Seiten ist mehr oder weniger von 1:1 verschieden. Am Rande münden die Quellstromlinien unter schiefen Winkeln. Besonders an der einspringenden Ecke kann man von einer eindeutigen Zuordnung der Punkte von \mathfrak{B} und vom Einheitskreise \mathfrak{R} nicht sprechen. Die Fläche des Kreises wird vielmehr so verzerrt, daß ein kleiner Doppelsaum entsteht, der allerdings von der Ecke aus schnell schmaler wird und bald verschwindet. Dieser Saum muß natürlich durch Änderung von $\bar{x}(h)$ und $\bar{y}(h)$ beseitigt werden.

(26) Man kann die Gestalt der Kurvenvierecke innerhalb \mathfrak{B} , welche den Quadraten der $g + hi = k$ -Ebene entsprechen, in folgender Weise berechnen.

Die Komponenten $dx = \frac{\partial x}{\partial h} dh$ und $dy = \frac{\partial y}{\partial h} dh$ des kleinen Vektors dz , der in der Richtung der Zirkulationsstromlinien zeigt, kann man mit Hilfe der $h(h^*)$ -Skalen berechnen. Es ist, abgesehen von einer Verschiebung der Kurve $\frac{d\bar{x}}{dh}$ längs der h -Achse oder der entsprechenden Verschiebung der $h(h^*)$ -Skale,

$$\frac{\partial x}{\partial h} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\bar{x}}{dh} dh^* \quad \text{und entsprechend} \quad \frac{\partial y}{\partial h} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\bar{y}}{dh} dh^*.$$

Um die Komponenten $dx = \frac{\partial x}{\partial g} dg$ und $dy = \frac{\partial y}{\partial g} dg$ des Vektors dz , der in der Richtung der Quellstromlinien zeigt, zu berechnen, ersetzen wir $(-g)$ durch den dazu gehörigen Gudermannschen Winkel γ . Wie man γ zeichnerisch bequem findet, zeigt Abb. 20. Es ist dann $\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \mathfrak{Tan}\left(\frac{-g}{2}\right)$,

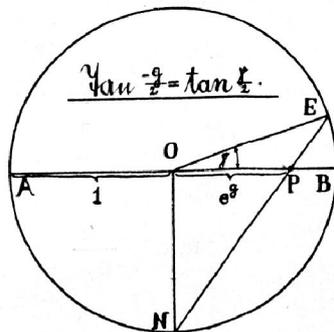


Abb. 20.

$$d\gamma = -\frac{dg}{\cos g}, dg = -\frac{d\gamma}{\cos \gamma}. \text{ Aus der Formel für } h(h^*): \tan\left(\frac{-g}{2}\right) = \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ = \frac{\tan\left(\frac{h}{2}\right)}{\tan\left(\frac{h^*}{2}\right)} \text{ bekommt man } \frac{dh^*}{dh} = \frac{\sin \gamma}{1 - \cos \gamma \cos h} \text{ und } \frac{d\left(\frac{dh^*}{dh}\right)}{d\gamma} = \frac{\cos \gamma - \cos h}{(1 - \cos \gamma \cos h)^2}.$$

Das Integral $x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \bar{x} \cdot \frac{dh^*}{dh} dh$ ändert sich, wenn γ um $d\gamma$ zunimmt, um $\frac{\partial x}{\partial \gamma} d\gamma$, wo

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \bar{x} \cdot \frac{\cos \gamma - \cos h}{(1 - \cos \gamma \cos h)^2} dh$$

ist. Entsprechend ist

$$\frac{\partial y}{\partial \gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \bar{y} \cdot \frac{\cos \gamma - \cos h}{(1 - \cos \gamma \cos h)^2} dh;$$

abgesehen von einer Verschiebung der Kurven $\bar{x}(h)$ bzw. $\bar{y}(h)$ längs der h -Achse. Durch partielle Integration findet man weiter, daß

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\bar{x}}{dh} \cdot \frac{\sin h}{1 - \cos \gamma \cos h} dh$$

ist. Braucht man den Wert $\frac{\partial x}{\partial \gamma}$ nur für einige Punkte zu berechnen, so kann man die Funktion $\frac{d\bar{x}}{dh} \cdot \sin h$ mit Hilfe der Skalen $h(h^*)$ zu integrieren, denn es ist

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} = \frac{1}{2\pi \sin \gamma} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{d\bar{x}}{dh} \sin h\right) \cdot \frac{\sin \gamma}{1 - \cos \gamma \cos h} dh \\ = \frac{1}{2\pi \sin \gamma} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{d\bar{x}}{dh} \sin h\right) \cdot dh^*.$$

Für die Berechnung des Wertes $\frac{\partial x}{\partial \gamma}$ für eine größere Anzahl von Punkten empfiehlt es sich aber, für die Umkehrung der Funktion

$$\int \frac{\sin h dh}{1 - \cos \gamma \cos h} = \frac{\ln(1 - \cos \gamma \cos h)}{\cos \gamma} = h', \quad h = \arccos \frac{1 - e^{\cos \gamma \cdot h'}}{\cos \gamma},$$

die Integrationsskalen zu zeichnen und mit ihrer Hilfe die Kurve $\frac{d\bar{x}}{dh}$ zu integrieren. Ähnlich wie oben für $\frac{\partial x}{\partial h}$ und $\frac{\partial y}{\partial h}$ bekommt man dann

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\bar{x}}{dh} dh' \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial \gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\bar{y}}{dh} dh'.$$

Wenn man die Kurve $\frac{d\bar{x}}{dh}$ auf durchsichtiges Papier zeichnet, die Zeichnung bei

dem betrachteten h senkrecht zur h -Achse knickt und so zusammenlegt, daß beide Teile der Zeichnung mit ihren h -Achsen zusammenfallen, so kann man die halbe Arbeit sparen, indem man einfach die zwischen den Kurven liegenden Ordinatenstücke (mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen) zusammenfügt.

(27) Bei der Anwendung dieses Verfahrens auf unser falsches Netz finden wir z. B. beim Punkte -4)20 folgende Verhältnisse. [Den Punkt $g = \alpha$, $h = \beta$ kann man zweckmäßig mit $\alpha)\beta$ bezeichnen. $g)$ steht innen an den Zirkulationsstromlinien angeschrieben, $h)$ außen an den Mündungen der Quellstromlinien]. Die Längeneinheit sei wieder die Quadratseite. Es empfiehlt sich bei den Rechnungen dieses Abschnitts h als Bogen zu messen, bei den Differentialquotienten werden die Überlegungen sonst umständlich. Es ergibt sich bei -4)20: $\frac{\partial x}{\partial g} = 0,39$; $\frac{\partial y}{\partial g} = 0,47$; $\frac{\partial x}{\partial h} = -1,18$; $\frac{\partial y}{\partial h} = 0,18$. Das Rechteck mit den Seiten dg und dh wird also durch die Integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \bar{x} dh^* \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \bar{y} dh^*$$

auf ein schiefwinkliges Parallelogramm abgebildet mit Winkeln von rd. 120° und 60° und einem Seitenverhältnis $0,61 dg : 1,2 dh$ oder rd. $\frac{1}{2} \frac{dg}{dh}$. Einem Quadrat der k -Ebene, wenn also $dg = dh$ ist, entspricht dann ein Parallelogramm mit dem Seitenverhältnis von rd. $1/2$. Dies stimmt, wie man sieht, mit den Verhältnissen der Zeichnung (Abb. 19) gut überein.

(28) In der Nähe des Randes werden die Punkte der h' -Skala bei $h = 0$ sehr eng. Daher empfiehlt es sich hier, das Integral $\int_{-\pi}^{+\pi}$ in die beiden Teile $\int_{-\delta}^{+\delta} + \int_{+\delta}^{2\pi-\delta}$ zu zerlegen, in dem kleinen Intervall $-\delta < h < +\delta$ die Kurve durch ihre Schmiegungsparabel zu ersetzen:

$$\frac{d\bar{x}}{dh} = \bar{x}'_0 + \bar{x}''_0 \cdot h + \bar{x}'''_0 \frac{h^2}{2!} + \bar{x}''''_0 \frac{h^3}{3!} + \dots$$

und gliedweise zu integrieren. Dabei sieht man, daß aus Symmetriegründen in dem so zerlegten Integral

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{d\bar{x}}{dh} \cdot \frac{\sin h dh}{1 - \cos \gamma \cos h} \quad \text{das erste Glied } \bar{x}'_0 \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{\sin h dh}{1 - \cos \gamma \cos h}$$

wie alle folgenden Glieder mit geraden Potenzen von h verschwinden. Das zweite Teilintegral $\bar{x}''_0 \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{h \sin h dh}{1 - \cos \gamma \cos h}$ ist bis auf Glieder zweiter Ordnung von γ und dritter Ordnung von δ gleich $4\bar{x}''_0 \cdot \delta$.

(29) Für den Rand selber ist daher bis auf Größen dritter Ordnung von δ (nämlich $+\frac{\delta^3}{9}(2\bar{x}''''_0 - \bar{x}''_0) + \dots$)

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{+\delta}^{2\pi-\delta} \frac{d\bar{x}}{dh} dh' + 4\bar{x}'' \cdot \delta \right).$$

Zur Integration gebraucht man hier die Skala $h = \arccos(1 - c'')$ oder bequemer $\log \sin \frac{h}{2} = \frac{h'}{2} \log c - \log \sqrt{2}$. Auf diese Weise findet man z. B. für den Punkt 0)12 $\frac{\partial y}{\partial \gamma} = -1,06$ und $\frac{\partial x}{\partial \gamma} = -0,89$, woraus sich für den Mündungswinkel rd. -130° ergibt. (Sieh auch hierzu Abb. 19). Dort, wo der Saum an der einspringenden Ecke beginnt, muß der Mündungswinkel 0° sein. Bei 0)28 ist $\frac{\partial y}{\partial \gamma} = -0,06$ und $\frac{\partial x}{\partial \gamma} = +0,63$, sodaß sich für den Mündungswinkel noch rd. -5° ergibt. Dazwischen (nah bei 0)23) ist der Mündungswinkel irgendwo -90° , wie er es überall sein sollte. Für 0)30 findet man $\frac{\partial y}{\partial \gamma} = +0,12$, $\frac{\partial x}{\partial \gamma} = +0,50$. Der Mündungswinkel ist also rd. $13^{1/2}^\circ$, die Quellstromlinie geht daher von dem Randpunkte aus zunächst nach außen. Der Saum beginnt also zwischen $h = 28\tau$ und $h = 30\tau$, ist also verhältnismäßig kurz.

(30) Am Rande, wo $\gamma = 0$ ist, ist $d\gamma = dg$. Sollen die dort entstehenden Kurvenvierecke, die zu gleichen dg und dh gehören, Quadrate sein, so muß $\frac{\partial x}{\partial \gamma} = \frac{d\bar{y}}{dh}$ und $\frac{\partial y}{\partial \gamma} = -\frac{d\bar{x}}{dh}$ sein. Dies ist ein interessantes Prüfungs- und Verbesserungsmittel für die angenommenen Funktionen $\bar{x}(h)$ und $\bar{y}(h)$. Man kann damit die eine aus der anderen berechnen. Man findet durch die in den vorigen Abschnitten gezeigte Integration aus $\bar{x}(h)$ $\frac{\partial x}{\partial \gamma}$. Da

dies gleich $\frac{d\bar{y}}{dh}$ sein muß, so findet man daraus $\bar{y}(h)$. Umgekehrt bekommt man aus $\bar{y}(h)$ $\frac{\partial y}{\partial \gamma} = -\frac{d\bar{x}}{dh}$ und daraus $\bar{x}(h)$. Auch die in (9) hergeleiteten Gleichungen zur Prüfung des Netzes sagen ja nichts anderes aus, als daß man aus der Entwicklung von $\bar{x}(h)$ nach Fourier die von $\bar{y}(h)$ ableiten kann, daß eben bei richtiger Verteilung der Mündungen \bar{y} und \bar{x} von einander abhängig sind.

(31) Solange allerdings das Netz so fühlbar falsch ist wie das der Abb. 19, kann man die notwendigsten Verbesserungen aus ihm selbst entnehmen. Dabei ist Folgendes zu beachten. Verschiebt man die Mündungsstelle einiger benachbarter Quellstromlinien h und ändert dementsprechend die ganze Umgebung der Stelle h in den Kurven $\bar{x}(h)$ und $\bar{y}(h)$, so wird dadurch das Bild in der Nähe der Quelle kaum verändert und in der Nähe des Randes an einer weit davon entfernten Stelle noch weniger. In der unmittelbaren Nähe der geänderten Stelle dagegen nehmen die anzubringenden Änderungen fast das Aussehn einer Parallelverschiebung längs des Randes an. Wenn man nämlich die Differenzen zwischen den zunächst angenommenen und den veränderten Koordinaten bildet und daraus mit Hilfe der h^* -Skalen die zugehörigen Änderungen im Innern von \mathfrak{B} berechnet, so sieht man, daß bei genügender Kleinheit der Verschiebungen auf dem Rande die Rich-

tung und der gegenseitige Abstand der Zirkulationsstromlinien nahe am Rande nur verhältnismäßig wenig geändert wird. Die unweit des Randes gelegenen Netzpunkte verschieben sich auf den hier dem Rande fast parallel laufenden Zirkulationsstromlinien. Bei größeren Änderungen bleibt dies Verhältnis im Großen und Ganzen auch bestehen. Daher bilden die Zirkulationsstromlinien einen guten Anhalt für die Art, wie das Netz später aussehen muß.

Der erste Schritt der Verbesserung ist daher der, daß man von der Quelle aus unter den alten Winkeln neue Quell-Stromlinien ausgehen läßt, welche die berechneten Zirkulationsstromlinien unter rechten Winkeln schneiden. Ein Entwurf derselben bei unserer Abb. 19 lieferte eine erheblich bessere Verteilung der Mündungen, die den zufällig recht genauen Wert $r_1 = 0,89$ ergab. Die Richtung, nach der die dem Rande nah gelegenen Stücke der Quellstromlinien verschoben werden müssen, erkennt man oft schon an den Winkeln, welche sie mit dem Rande bilden. Man muß sie i. a. nach der Seite hin verschieben, nach der sie sich zum Rande hin neigen. Die nah am Rande gelegenen Teile werden eben stärker von der Verschiebung beeinflusst als die entfernteren, sodaß der Winkel durch eine Verschiebung der Mündungen nach dieser Seite hin mehr einem rechten genähert wird.

(32) Wie vorhin angedeutet wurde, berechnet man das zu den neuen Mündungen gehörige Netz am besten durch die kleinen Änderungen die an den einzelnen Punkten anzubringen sind. Die Kurven $\Delta\bar{x}(h)$ und $\Delta\bar{y}(h)$ können dabei in größerem Maßstab gezeichnet werden. Dann braucht die Integration nicht so sorgfältig ausgeführt zu werden. Manchmal erkennt man schon überschlagend die sich ergebenden Änderungen und kann umgekehrt auf die notwendige Verschiebung der Quellstromlinien schließen, die notwendig ist, um eine gewisse Änderung des Netzes zu erzielen.

Auf diese Weise erhält man recht bald ein Netz, das in erster Annäherung genügt. Will man aber weiter verbessern, so stellt sich der Übelstand heraus, daß die Lage der Orthogonaltrajektorien unter Umständen recht unsicher sein kann, und zwar um so mehr, als man sich von der Quelle entfernt und je flacher die Zirkulationsstromlinien sind. Daher empfiehlt es sich, nun auf einem andern Wege weiter zu gehn. — Weil sich die nah am Rande verlaufenden Zirkulationsstromlinien nur noch wenig ändern, so kann man zwischen zweibenachbarten derartigen Linien nach dem Verfahren in Gött. Nachr. 1911, S. 446 unten, diejenigen Orthogonaltrajektorien zeichnen, die den Streifen in eine Kette von Quadraten zerlegen. Allerdings werden sich bei einer solchen langen Folge einzelner zeichnerischer Maßnahmen die Fehler häufen. Man kann aber meist etwas ausgleichen. Man geht von zwei Stellen aus, deren h -Wert man aus irgendwelchen Gründen, z. B. aus Gründen der Symmetrie, kennt, aufeinander zu und gleicht dann den Unterschied, der sich beim Zusammentreffen ergibt, nach beiden Seiten hin aus, proportional den abzuschätzenden Fehlerquellen; dazu gehören z. B. die verschiedene Länge der Wege, größere oder geringere Weite des Streifens und mehr oder weniger große Abweichung der den Streifen begrenzenden Zirkulationsstromlinien vom Gleichlauf.

(33) Dieses zeichnerische Verfahren läßt sich dann noch durch das in (28, 29) dargestellte rechnerische Verfahren verfeinern. — Um das

Einzeichnen der Orthogonaltrajektorien genauer machen zu können, zeichnet man irgend eine Darstellung der Richtung $\frac{dy}{dx}$ des Randes, z. B. als Funktion der Bogenlänge und sucht diejenigen Punkte auf, wo $\frac{dy}{dx}$ gleich dem berechneten Werte $-\frac{\partial x}{\partial \gamma} : \frac{\partial y}{\partial \gamma}$ ist. Das kann man natürlich auch für irgend eine Zirkulationsstromlinie machen. Die Genauigkeit dieses Verfahrens hängt aber, wie schon erwähnt wurde, sehr stark von der Krümmung des Randes oder der betreffenden Zirkulationsstromlinie ab und ist an den geraden Stellen wie bei unserm Rande unbrauchbar. Daher müssen wir hier das zweite Verfahren, das Einteilen eines Streifens am Rande in Quadrate, rechnerisch ausgestalten. Nach dem in (26) angegebenen Verfahren kann man an jeder Stelle in \mathfrak{B} das unendlich kleine Parallelogramm berechnen, auf das ein Quadrat der $g + hi$ -Ebene mit den Seiten $dg = dh$ abgebildet wird. Die Breite db des Streifens zwischen den beiden Zirkulationsstromlinien für g und $g + dg$ ist dann gleich der Höhe dieses Parallelogramms, nämlich

$$db = \frac{\frac{\partial \bar{x}}{\partial h} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial \gamma} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial h}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial h}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial h}\right)^2}} dg,$$

wo $dg = -\frac{dg}{\cos g}$ ist. Sind aber die Kurvenschnitte schon fast rechtwinklig, so kann man mit Annäherung db gleich der Seite des Parallelogramms setzen, die ein Stückchen einer Quellstromlinie ist; also $db = -\sqrt{\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \gamma}\right)^2} \cdot \frac{dg}{\cos g}$.

Wenn nun der Streifen in lauter kleine Quadrate eingeteilt werden soll, so muß db gleich dem Abstände ds zweier Quellstromlinien h und $h + dh$ sein, also

$$\frac{ds}{dh} = -\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \gamma}\right)^2}}{\cos g} \quad \text{und damit} \quad h = -\cos g \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \gamma}\right)^2}}. \quad \text{So be-}$$

kommt man h als Funktion der Bogenlänge auf der Zirkulationsstromlinie und kann die Punkte bestimmen, wo diese Linien von den Quellstromlinien geschnitten werden. Am Rande ist es ganz entsprechend; $\frac{\partial \bar{x}}{\partial \gamma}$ und $\frac{\partial \bar{y}}{\partial \gamma}$ kann man hier nach (28 und 29) berechnen, $\cos g = 1$. — Erstreckt man die Integration über die ganze Zirkulationsstromlinie, so muß das Integral $2\pi = 256\tau$ ergeben. Im allgemeinen wird sich im Integrationsergebnis davon eine kleine Abweichung zeigen. Diese Abweichung kann man dann über den ganzen Umlauf verteilen. Dadurch werden die Fehler etwas ausgeglichen. Bei unserm Kreuz braucht man nur über ein Achtel zu integrieren. Es muß sich dann $\frac{\pi}{4} = 32\tau$ ergeben.

(34) In dieser Weise kann man die Verbesserung so weit treiben, wie es die halb zeichnerische Natur des Verfahrens zuläßt. Wenn man aber, wie bei

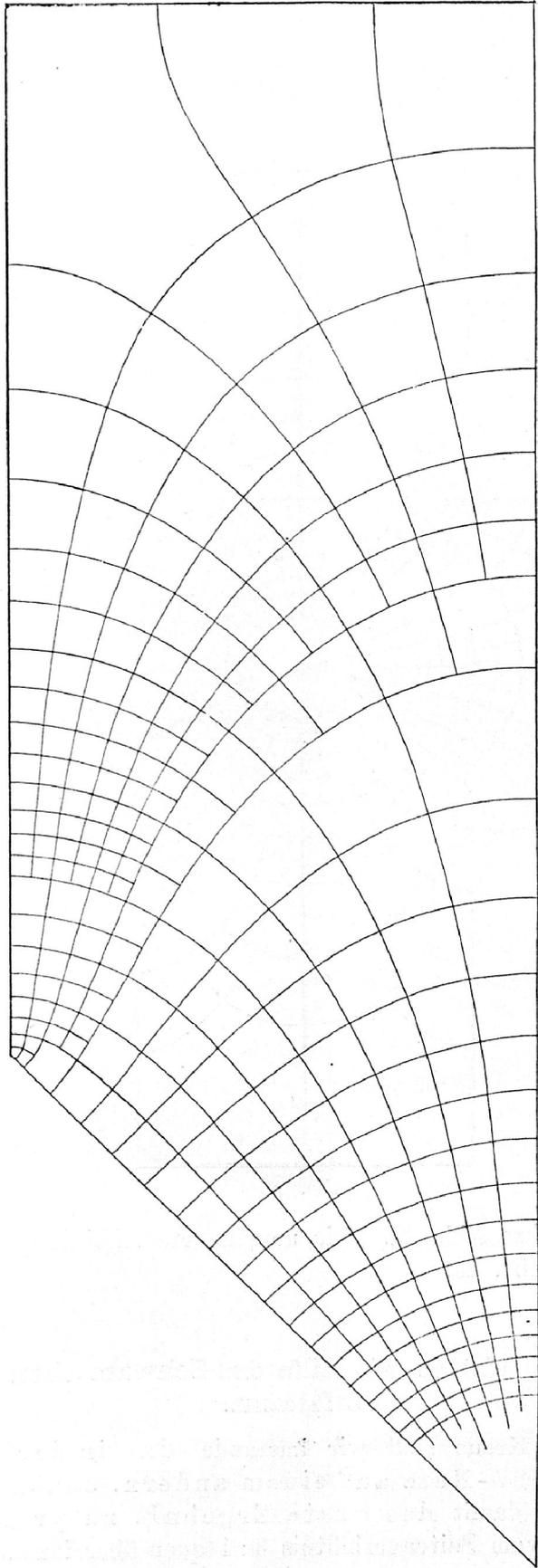


Abb. 21.

uns, eine Zeichnung des Netzes der ersten Berechnung zugrunde legt, die schon auf zeichnerischem Wege eine erhebliche Genauigkeit erhalten hatte, so hat man in wenigen Schritten diese Grenze erreicht. Das in Abb. 21 dargestellte Netz ist auf solchem Wege gewonnen worden ($r_1 = 0,898$). Einen Überblick über

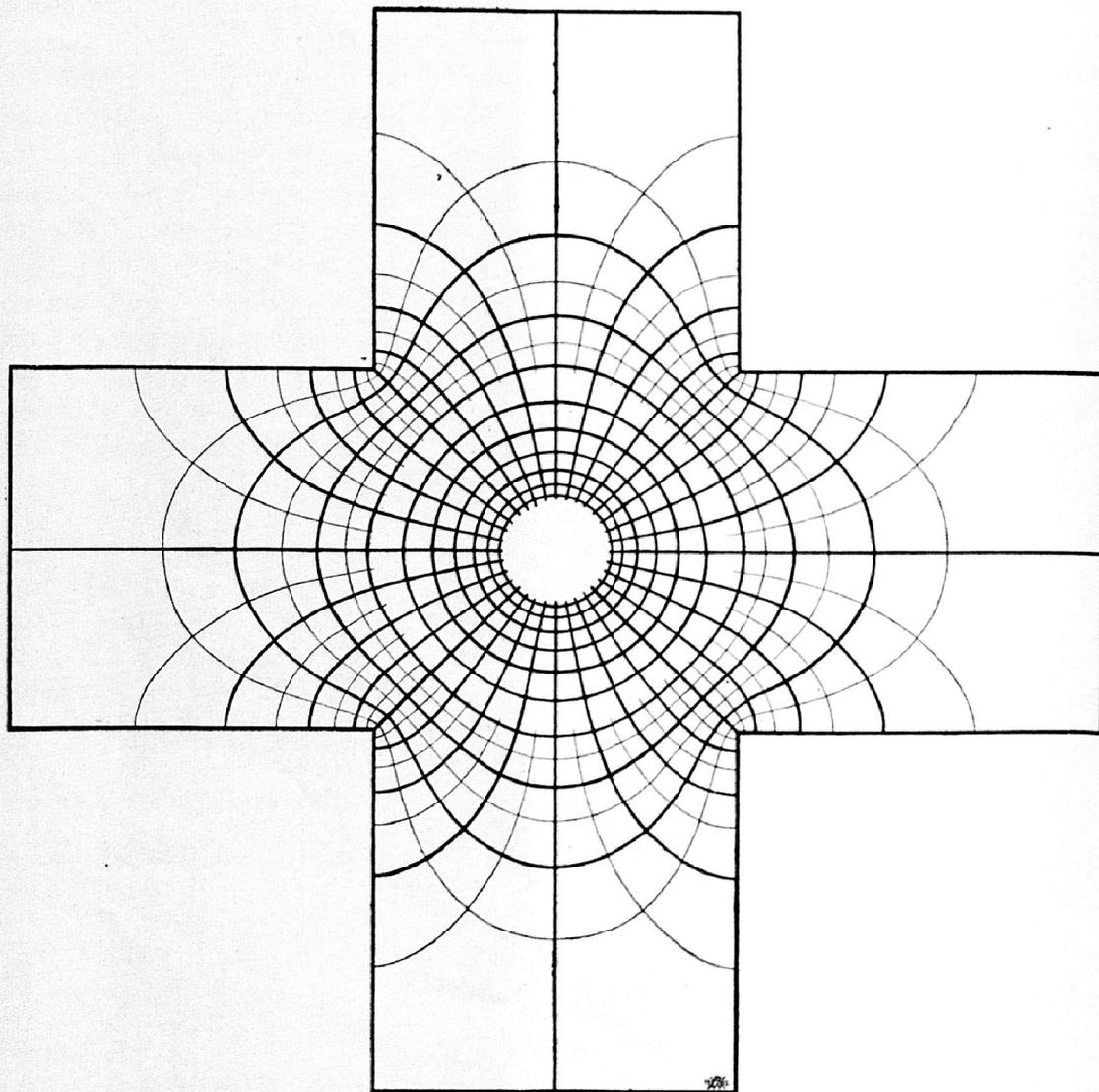


Abb. 22.

das ganze Netz gewährt Abb. 22. Die umgekehrte Abbildung, die des Kreuzes auf den Kreis zeigt Abb. 23.

III. Berechnung des Netzes mit Hilfe des Schwarzschen alternierenden Verfahrens.

(35) Bei unserm Kreuz sind wir imstande, das in der vorstehenden Weise gewonnene g, h -Netz auf einem andern, unabhängigen Wege zu berechnen und damit das erste Ergebnis zu prüfen. Wenn man nämlich 2 Rechtecke vom Seitenverhältnis 3:1 quer übereinanderlegt, sodaß die

Mittelpunkte aufeinander fallen, so erhält man das aus fünf Quadraten bestehende Kreuz. In diesen Rechtecken kann man mit Hilfe elliptischer Integrale die

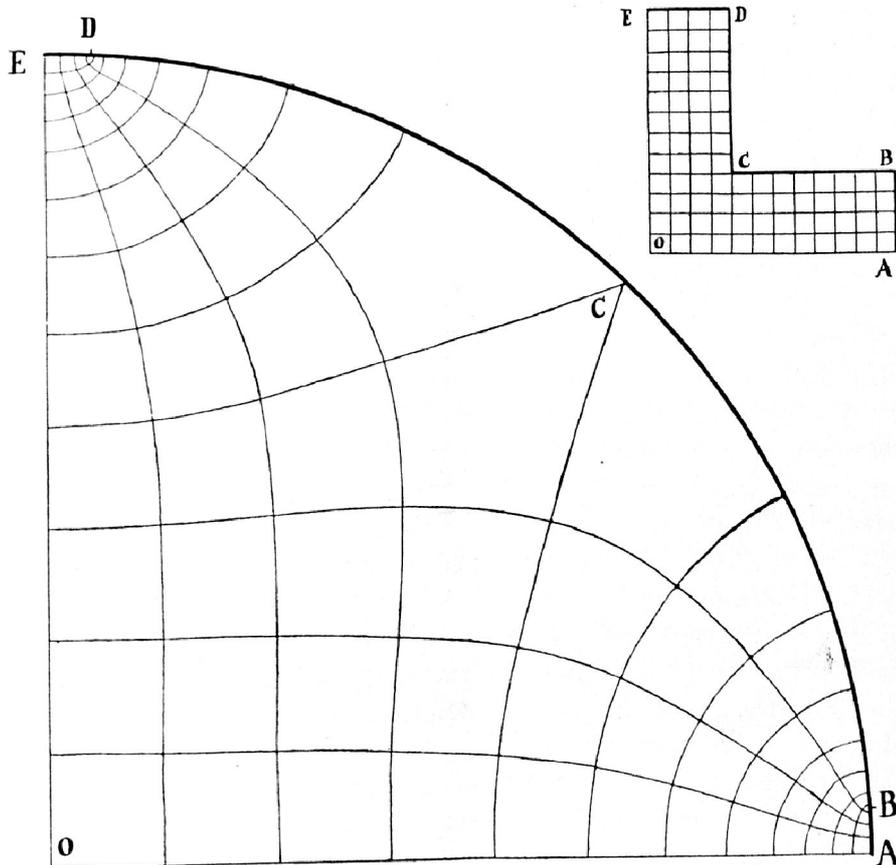


Abb. 23.

Greensche Funktion g mit ihrer konjugierten h berechnen und dann mit Hilfe des von Schwarz¹⁾ angegebenen abwechselnden [„alternierenden“] Verfahrens die zu beliebigen, auf dem Rande des Kreuzes gegebenen Werten \bar{u} gehörige u im Innern berechnen, sodaß $\Delta u = 0$ ist. Das Verfahren liefert natürlich nur endliche u . Doch kann man auf ähnlichem Wege auch die im Mittelpunkt unendlich werdende und auf dem Rande verschwindende Funktion g des Kreuzes berechnen, indem man ähnlich wie in (13) den Unterschied zwischen g und einer an dieser Stelle in derselben Weise unendlich werdenden Funktion der Berechnung unterwirft. Wenn man nämlich für verschiedene Belegungen des Randes die zugehörigen Werte im Innern des zusammengesetzten Bereiches zu bestimmen hat, empfiehlt es sich, gleich die Greensche Funktion des zusammengesetzten Bereiches mit Hilfe des Schwarzschen Verfahrens zu bestimmen, um nicht für jede neue Belegung das Schwarzsche Verfahren noch einmal von vorn anwenden zu müssen.

(36) Der Bereich \mathfrak{B} möge in allgemeiner Weise wie in Abb. 24 durch Übereinanderlagern zweier einfacher Bereiche \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 entstehen. \mathfrak{B} besteht dann aus einem doppelt bedeckten Gebiete \mathfrak{D} und den

1) H. A. Schwarz, Ges. math. Abhand., Berlin 1890, Bd. II, S. 133 ff.

Restgebieten $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{D}$. Die Ränder \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 sind mit ihren beiden äußeren Teilen \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 , an der Bildung des Randes \mathfrak{R} beteiligt, die andern Randteile \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 liegen im Innern von \mathfrak{B} und begrenzen das Doppelgebiet \mathfrak{D} .

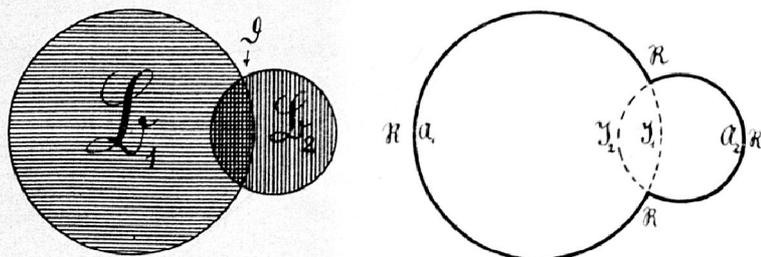


Abb. 24.

Dann verläuft das Schwarz'sche Verfahren bekanntlich so: Auf \mathfrak{R} seien die Randwerte $\bar{\varphi}$ einer in \mathfrak{B} harmonischen Funktion φ gegeben. Man kann nun φ in \mathfrak{B} angenähert z. B. durch Kurven $\varphi = \text{Const.}$ darstellen. Dann ist φ auf \mathfrak{R}_1 bekannt, und zwar auf \mathfrak{A}_1 genau und auf \mathfrak{S}_1 genähert. Aus diesen Randwerten berechnet man die zugehörigen Werte im Innern von \mathfrak{B}_1 , mit Hilfe des Netzes $g_1 + h_1 i$ in \mathfrak{B}_1 , und hiermit auch die Werte von φ auf \mathfrak{S}_2 . Mit diesen Werten und den genauen auf \mathfrak{A}_2 , kann man in derselben Weise φ in \mathfrak{B}_2 , also auch auf \mathfrak{S}_1 , in \mathfrak{B}_2 berechnen. Da auf diese neuen Werte von φ auf \mathfrak{S}_1 , alle auf \mathfrak{R} gegebenen Werte $\bar{\varphi}$ verbessernd gewirkt haben, so sind sie den wahren Werten schon näher als die zuerst angenommenen, genäherten Werte. Führen wir diese abwechselnde Berechnung von φ auf \mathfrak{S}_2 und \mathfrak{S}_1 weiter aus, so verliert sich der Einfluß der Fehler der ersten Annäherung immer mehr, und zwar um so schneller, je weiter \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 von einander entfernt sind. Das wird besonders anschaulich, wenn man das Verhalten des Unterschiedes Φ zwischen den jeweilig berechneten fehlerhaften φ und den genauen φ bei diesem Verfahren ins Auge faßt und Φ als dritte Koordinate über der Ebene von \mathfrak{B} deutet. Dieser Unterschied Φ ist längs des ganzen Randes \mathfrak{O} und längs \mathfrak{S}_1 gleich den dort bei der Annahme der genäherten Werte gemachten Fehlern. In die dadurch bestimmte, sich über \mathfrak{S}_1 erhebende Raumkurve und \mathfrak{A}_1 ist dann die Φ darstellende Fläche einzuhängen, sodaß $\Delta\Phi = 0$ ist. Diese Fläche bestimmt senkrecht über \mathfrak{S}_2 eine flachere Raumkurve; in sie und \mathfrak{A}_2 ist eine neue Φ -Fläche einzuhängen, die senkrecht über \mathfrak{S}_1 eine neue, noch flachere Raumkurve bestimmt, u. s. w. Man sieht dann, daß die abwechselnd eingehängten Flächen sich immer mehr der Ebene nähern müssen.

(37) Um nun die in $z = 0$ logarithmisch unendlich werdende und auf \mathfrak{R} verschwindende harmonische Funktion g in \mathfrak{B} mit Hilfe des Schwarz'schen Verfahrens zu berechnen, könnte man $\varphi = g - \ln \frac{r}{c}$ nehmen. Es ist jedoch zweckmäßiger, die Funktion $\ln \frac{z}{c}$ den Bereichen \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 , dadurch anzupassen, daß man den von dieser Funktion ausgefüllten Einheitskreis auf \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 abbildet. Dann erhält man ja das Netz der g - und h -Kurven in \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 , die wir als bekannt voraussetzten. Die gemeinsame Quelle soll dabei an der Stelle $z = 0$ in dem Doppelgebiet \mathfrak{D} liegen. In \mathfrak{B}_1 stellen die Kurven die Funktion

$k_1 = g_1 + h_1 i$ und in \mathfrak{B}_2 $k_2 = g_2 + h_2 i$ dar. Das in \mathfrak{B} gesuchte Netz stellt entsprechend die Funktion $k = g + hi$ dar. Die Unterschiede $w_1 = k_1 - k$ und $w_2 = k_2 - k$ sind analytische Funktionen, die in \mathfrak{B}_1 bzw. \mathfrak{B}_2 endlich bleiben. Ihre reellen Komponenten $u_1 = g_1 - g$ und $u_2 = g_2 - g$ genügen der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ und können daher aus den Randwerten in \mathfrak{B}_1 bzw. \mathfrak{B}_2 berechnet werden. Da g_1 auf \mathfrak{R}_1 , also \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{S}_1 , und g auf \mathfrak{A}_1 verschwindet, so verschwindet u_1 auf \mathfrak{A}_1 und nimmt auf \mathfrak{S}_1 die negativen dort vorhandenen Werte g an; ebenfalls verschwindet u_2 auf \mathfrak{A}_2 und wird auf \mathfrak{S}_2 gleich $-g$. Man sieht, wie auf diese Weise die u -Kurven eine lange Strecke mit der Abszissenachse zusammenfallen; die Integration wird dadurch wesentlich abgekürzt. Wenn wir $\ln\left(\frac{r}{c}\right)$ als Hilfsfunktion genommen hätten, wäre das nicht der Fall gewesen.

(38) Aus einem zeichnerischen Entwurf der g - und h -Kurven in \mathfrak{B} entnimmt man die genäherten Werte g auf \mathfrak{S}_1 . Aus diesen und den Werten $u_1 = 0$ auf \mathfrak{A}_1 kann man dann in \mathfrak{B}_1 die zugehörigen Werte u_1 und hieraus $g = g_1 - u_1$ mit Hilfe des g_1, h_1 -Netzes berechnen. Die sich auf diese Weise ergebenden Werte g auf \mathfrak{S}_2 benutzt man mit den Werten $u_2 = 0$ auf \mathfrak{A}_2 zur Berechnung von u_2 und hieraus $g = g_2 - u_2$ in \mathfrak{B}_2 und damit auch auf \mathfrak{S}_1 . Diese neuen Werte g auf \mathfrak{S}_1 benutzt man dann als Ausgang für eine Wiederholung dieser Rechnung, die man so oft vornimmt, bis sich keine merklichen Änderungen der Werte mehr ergeben. Dies stellt sich in unserem Fall sehr schnell ein. In der Abb. 25 sind die zuerst angenommenen Werte g durch die gestrichelte

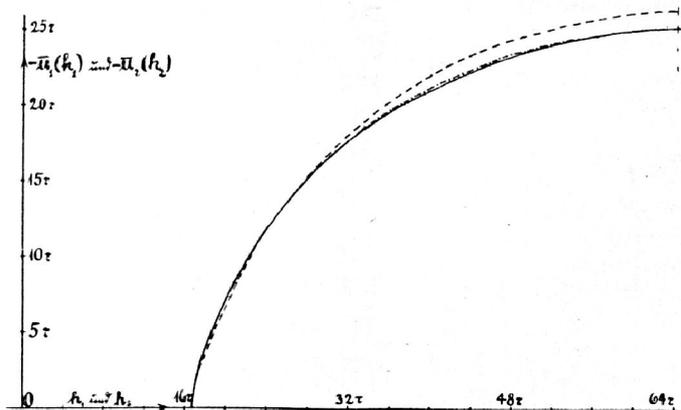


Abb. 25.

Linie, die durch die erste Berechnung gefundenen durch die strichpunktierte Linie und die sich schließlich ergebenden Werte durch die ausgezogene Linie dargestellt. Man erkennt, wie nah die erste berechnete Kurve schon an der schließlich berechneten liegt; die zweite würde in der Zeichnung schon kaum mehr von der letzten zu unterscheiden sein. Mit der dritten konnten wir in unserem Fall aufhören, da die weiteren Berechnungen ganz unregelmäßig verteilte kleine Abweichungen ergaben, die sich aus den Fehlerquellen des Verfahrens erklären ließen. Mit diesen Endwerten von u_1 auf \mathfrak{S}_1 und denen für u_2 auf \mathfrak{S}_2 kann man die zugehörigen Werte u_1 in \mathfrak{B}_1 und u_2 in \mathfrak{B}_2 berechnen und daraus $g = g_1 - u_1$ und $g = g_2 - u_2$ finden. Die im Doppelgebiet \mathfrak{D} auf zweifache Weise berechenbaren Werte können als Prüfmittel für die Richtigkeit der Rechnung dienen.



Bei der Integration müssen die Werte \bar{u}_1 natürlich als Funktion von h_1 gegeben sein. Um die u_1 -Werte auf \mathfrak{F}_2 zu berechnen, müssen wir die g_1, h_1 -Koordinaten der Punkte auf \mathfrak{F}_2 kennen, und da wir nur für bestimmte Werte g_1 Integrationsstufen vorrätig haben, so muß man die Funktion $h_1(g_1)$ auf \mathfrak{F}_2 kennen, um zu ersehen, auf welches h_1 die betreffende g_1 -Skala einzustellen ist. Die so erhaltenen Werte u_1 bzw. g müssen dann als Funktion von h_2 aufgetragen werden; dazu muß man die Funktion $h_2(h_1)$ auf \mathfrak{F}_2 benutzen. Entsprechend gebraucht man auf dem Rückweg $h_2(g_2)$ auf \mathfrak{F}_1 und $h_1(h_2)$ für \mathfrak{F}_1 . Wegen der Symmetrie unseres Kreuzes zur Geraden $x = y$ fallen hier $h_1(g_1)$ auf \mathfrak{F}_2 mit $h_2(g_2)$ auf \mathfrak{F}_1 und $h_2(h_1)$ auf \mathfrak{F}_2 mit $h_1(h_2)$ auf \mathfrak{F}_1 zusammen.

Für die Berechnung der g -Werte in den äußeren Quadranten unseres Kreuzes ist es bequemer, das Netz der g - und h -Kurven des Quadrates zur Hilfe zu nehmen, sieh Abb. 26, da das g des Kreuzes nur auf dem

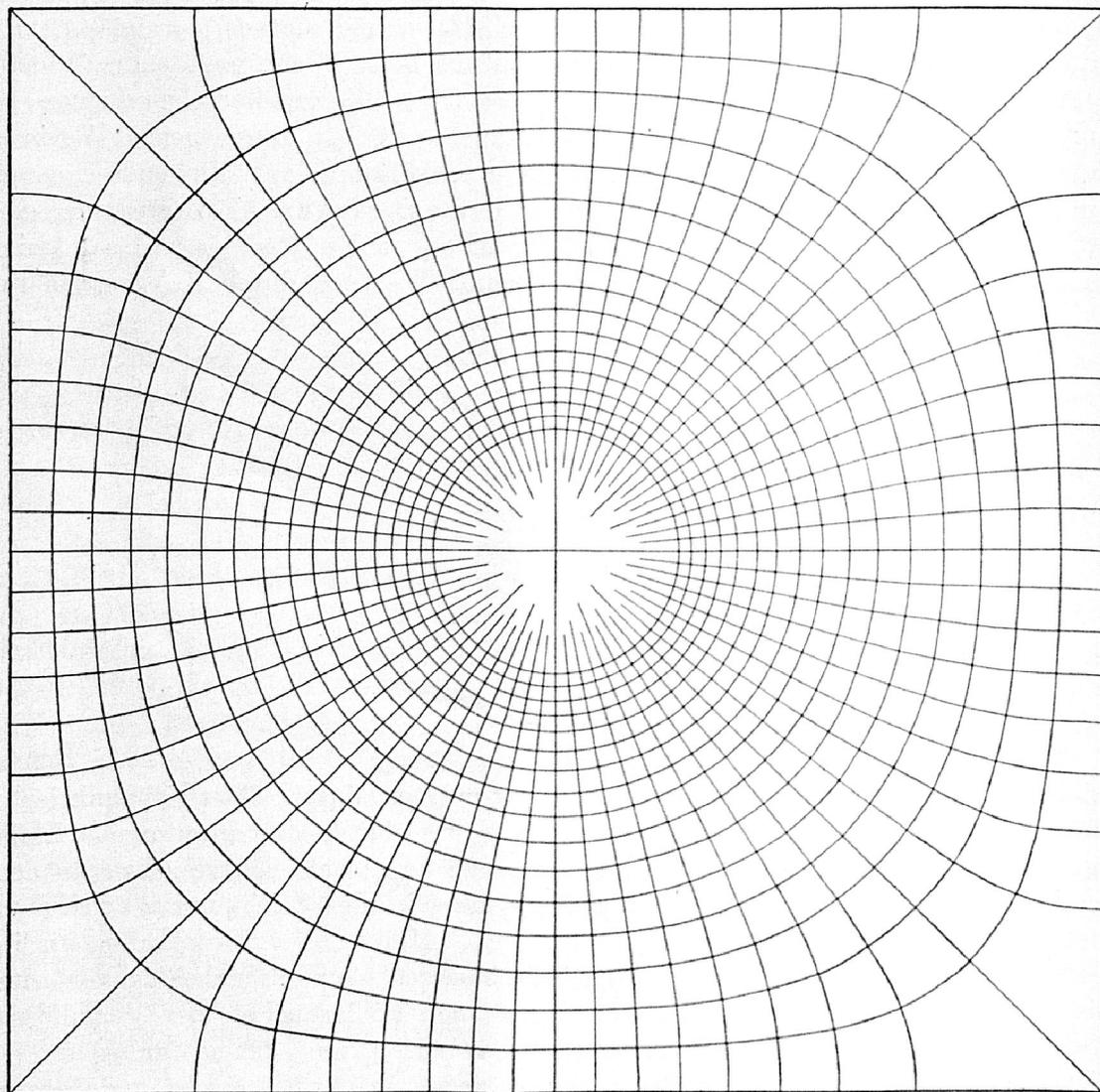


Abb. 26.

vierten Teil des Randes bei einem solchen Quadrat von Null verschieden ist, die Kurve $u(h)$ sich also nur eine verhältnismäßig kurze Strecke über die h -Achse

erhebt. Dadurch wird die Integration bedeutend abgekürzt; außerdem braucht man dann das g, h -Netz des Rechtecks in dieser Gegend nicht zu berechnen. Das ist nämlich bei schmalen Rechtecken nur mit verhältnismäßig großem Aufwand von Rechnung möglich.

In die so berechneten Werte g für die Punkte des Bereichs \mathfrak{B} müssen dann noch nach bekanntem Verfahren (mit Hilfe von Profilen) die Zirkulationsstromlinien für runde Werte von g eingeschaltet werden. Die Quellstromlinien findet man dann wie oben (31) als die Orthogonaltrajektorien der Zirkulationsstromlinien. Um die Mündungen auf dem Rande dabei etwas genauer zu erhalten, muß man ebenfalls wie in (32) das Verfahren Gött. Nachr. 1911 S. 446 anwenden, um zwischen zwei Zirkulationsstromlinien nahe am Rande eine Einteilung in lauter Quadrate zu erhalten. Zur weiteren Verbesserung kann man dann noch das Verfahren in (6) anwenden. Hier hat man die wichtige Stütze, daß die u -Kurven festliegen. Die v -Kurven müssen damit quadratische Maschen bilden; zu ihrer Zeichnung kann wieder das soeben erwähnte Verfahren (Gött. Nachr. S. 446) dienen. Wenn wir danach die h -Kurven legen, so wissen wir, daß die Fehler dieser Linien dann i. a. kleiner sind als die der v -Kurven. Genügt einem diese Genauigkeit noch nicht, so kann man zu der erhaltenen Mündungsverteilung die Kurven $\bar{x}(h)$ und $\bar{y}(h)$ bilden, hierzu wie in (29) $\frac{\partial x}{\partial \gamma}$ und $\frac{\partial y}{\partial \gamma}$ berechnen und daraus wie in (33) $\frac{dh}{ds}$ für den Rand finden. Die Integration liefert dann eine genauere Abhängigkeit $h(s)$.

Das Netz, das wir auf diese Weise erhielten, stimmte hinreichend mit dem ersten Netz überein, wie zu erwarten war. Die gute Übereinstimmung in der Mitte zeigt sich auch darin, daß der Halbmesser der ersten Näherung sich als $r_1 = 0,899$ ergab, d. h. daß in der Mitte das Netz in erster Annäherung durch $g + hi = \ln \frac{z}{0,899}$ dargestellt wird. Das erste Netz hatte $r_1 = 0,898$. Naturgemäß zeigten sich nahe am Rande in den äußersten Teilen der Arme des Kreuzes geringfügige Abweichungen ohne regelmäßigen Gang. Doch spielen diese Fehler, die überdies in die Größenordnung der Zeichenfehler hineingehörten, nachher bei der Anwendung kaum eine Rolle, da sie für die wichtigeren mittleren Gebiete gar nicht mehr in Betracht kommen.

(39) Um die Tragweite des Schwarzschen Gedankens darzutun, sollen kurz noch eine Anwendung und eine Erweiterung angedeutet werden.

Es ist leicht möglich, daß der gegebene Bereich \mathfrak{B} so gestaltet ist, daß man ihn zwar nicht durch Übereinanderlagern von Hilfsbereichen mit bekanntem g, h -Netz entstehen lassen kann, daß man aber doch zwei solche Hilfsbereiche \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 in den Bereich \mathfrak{B} so hineinlegen kann, daß sich die Ränder \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 dem Rande \mathfrak{R} von \mathfrak{B} einigermaßen anschmiegen und im Innern ein gemeinsames Doppelgebiet haben. Dort, wo die Hilfsränder \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 dem Rande \mathfrak{R} nahe liegen, werden die angenähert gezeichneten u -Kurven noch verhältnismäßig kleine Fehler aufweisen. Nimmt man diese kleinen Fehler zunächst in Kauf, so kann man die zugehörigen Werte im Innern von \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 mit Hilfe des Schwarzschen Verfahrens so weit ausgleichen, daß sie innerhalb des zusammengesetzten Hilfsbereichs wenigstens der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ gehorchen. Rückwärts wird man dann aus dem Verlauf der u -Kurven in den Hilfsbereichen

schließen können, wie die genäherten Randwerte auf den Hilfsrändern zu verändern sind, damit die zu ihnen gehörigen u -Kurven in die richtigen Randpunkte auf \mathfrak{R} münden. Es ist dann vorteilhaft, zunächst mit Hilfe des vorhin in (37 u. 38) entwickelten Verfahrens das g, h -Netz im zusammengesetzten Hilfsbereich zu berechnen, da man das Berechnungsverfahren im Hilfsbereich doch meist mehrere Male ausführen muß.

Ferner vermag man mit Anwendung des abwechselnden Verfahrens die Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$ in doppelt oder mehrfach zusammenhängenden Gebieten zu lösen. Zerschneidet man z. B. den ringförmigen Bereich \mathfrak{B} der Abb. 27 längs einer Kurve C' , sodaß er zu einem einfach zusammenhängenden Bereich \mathfrak{B}' wird, so sind die Werte \bar{u} auf dem Rande des unzerschnittenen Bereichs, auf \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 , genau vorgeschrieben, auf C' kann man sie genähert angeben; damit ist u auf dem Rande von \mathfrak{B}' gegeben. Dann kann man die zugehörigen Werte im Innern von \mathfrak{B}' nach dem geschilderten Verfahren berechnen, also auch auf einer andern Kurve C'' , welche \mathfrak{B} in einen

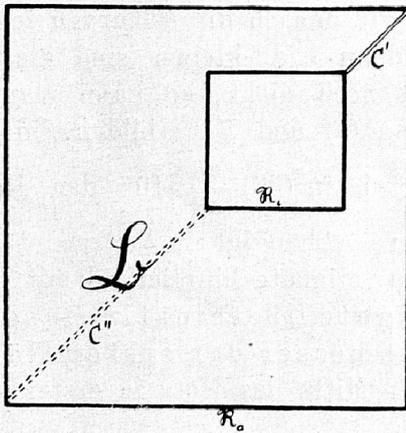


Abb. 27.

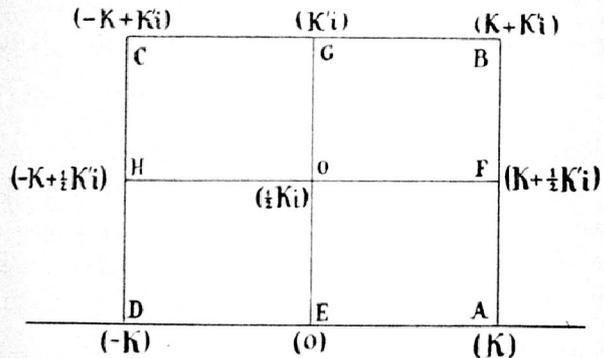


Abb. 28.

andern einfach zusammenhängenden Bereich \mathfrak{B}'' verwandelt. Die Werte auf C'' werden, wenn C'' wie hier weit von C' entfernt liegt, nur wenig von den Fehlern auf C' beeinflusst. Weiter kann man dann rückwärts mit diesen berechneten Werten auf C'' die zugehörigen Werte in \mathfrak{B}'' also auch die auf C' berechnen. Diese neuen Werte sind der Ausgang zu einer Wiederholung des Verfahrens, das man i. a. nur wenige Male anzuwenden braucht, um in den Werten auf den Kurven C keine Änderungen mehr zu bekommen. Damit kann man die Werte im ganzen Bereich bestimmen.

Bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen sind die beiden Schnitte C' und C'' so zu führen, daß zwei verschiedene einfach zusammenhängende Bereiche entstehen. Dann kann man wie soeben verfahren.

IV. Berechnung des Netzes im Rechteck.

(40) Wir wollen jetzt noch das g, h -Netz des oben (35 ff.) gebrauchten Rechtecks mit dem Seitenverhältnis 1:3 berechnen und zeichnen.

Durch die Umkehrung des elliptischen Integrals $z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{1-w^2} \cdot \sqrt{1-w^2 \sin^2 \alpha}}$,

$w = snz$, wird das halbe, positiv imaginäre Periodenrechteck, in Abb. 28 $ABCD$,

mit den Ecken $z = \pm K, \pm K + K' \cdot i$ auf die halbe, positiv-imaginäre w -Ebene abgebildet. Dabei kommt der Mittelpunkt $z = \frac{1}{2} K' i$ nach dem Punkte $w = \frac{i}{\sqrt{\sin \alpha}} = \mu i$; der Teil $EABG$ der Umrandung geht in die positiv-reelle Achse über und der Teil $EDCG$ in die negativ-reelle Achse. Durch $\xi = \frac{\mu i - w}{\mu i + w}$ wird die Halbebene dann weiter auf den Einheitskreis der ξ -Ebene abgebildet. Der Punkt $w = \mu i$ kommt dabei nach $\xi = 0$, die reelle w -Achse geht in den Umfang des Einheitskreises $\xi = e^{hi}$ über. — Umgekehrt ist $w = \mu i \cdot \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$, und wenn man $\xi = e^{g+hi} = e^k$ setzt, $w = \frac{\mu}{i} \operatorname{Tan} \frac{k}{2}$.

Da das Rechteck das Seitenverhältnis 3:1 haben soll, so muß sich $K:K'$ wie 3:2 verhalten. Aus der bekannten Formel $\ln q = -\pi \frac{K'}{K}$ ergibt sich dann z. B. in Jahnke-Emdes Funktionentafeln $q = 0,1231$; $\alpha = 68^\circ 32'$, $\sin \alpha = 0,9306$, $K = 2,4416$ und $K' = 1,6277$. Um die Punkte in den vom Mittelpunkt weiter abliegenden Teilen einigermaßen richtig zu bekommen, gebraucht man α und K genauer. Mit Benutzung der Wittschen Hilfstafeln zur Berechnung von K und E (Astron. Nachr. 165, 33—50) findet man durch schrittweise Näherung $\alpha = 68^\circ 32' 9'', 8$, $\sin \alpha = 0,9306181$, $\cos \alpha = 0,3659154$, $K = 2,441621$, $K' = 1,627747 = \frac{2}{3} K$.

(41) Zerlegt man mit Hilfe des Additionssatzes der elliptischen Funktionen $w = u + vi = snz = sn(x + yi)$ in die beiden Komponenten, so erhält man

$$u = \frac{sn(x, \sin \alpha) dn(y, \cos \alpha)}{1 - sn^2(y, \cos \alpha) dn^2(x, \sin \alpha)}, \quad v = \frac{sn(y, \cos \alpha) dn(x, \sin \alpha) cn(x, \sin \alpha) cn(y, \cos \alpha)}{1 - sn^2(y, \cos \alpha) dn^2(x, \sin \alpha)}$$

Weiter ist $\xi = \frac{\mu i - w}{\mu i + w} = \frac{\mu^2 - (u^2 + v^2) + 2u\mu i}{\mu^2 + (u^2 + v^2) + 2v\mu} = e^{g+hi}$, oder wenn man $\mu^2 + (u^2 + v^2) = c_1$ und $\mu^2 - (u^2 + v^2) = c_2$ setzt, $\xi = \xi + \eta i = \frac{c_2}{c_1 + 2v\mu} + \frac{2u\mu}{c_1 + 2v\mu} i$ und $\tan h = \frac{\eta}{\xi} = \frac{2u\mu}{c_2}$, $g = \frac{1}{2} \ln(\xi^2 + \eta^2) = \frac{1}{2} \ln(c_2^2 + 4u^2\mu^2) - \ln(c_1 + 2v\mu)$. — Wenn man so g und h für eine Reihe von Punkten im Rechteck berechnet hat, kann man durch Profile die Lage der Linien für runde Werte von g und h , der Stromlinien, feststellen. Auf diese Weise ist das Netz der Abb. 29 entstanden.

(42) Wenn man im Besitz des oben, (21)—(23), beschriebenen Integrators ist, empfiehlt es sich, die Netzpunkte wie in (11) aus den Mündungen der Quellstromlinien am Rande zu berechnen. Die Lage der Mündungen ist verhältnismäßig einfach zu bestimmen:

Auf dem Teil EA des Rechtecksrandes, der mit der x -Achse zusammenfällt, ist $0 \leq h \leq 62,536 \tau$. Da $\xi = e^{hi}$ ist, so ergibt sich für $w = \frac{1}{i} \mu \operatorname{Tan} \frac{hi}{2} = \mu \tan \frac{h}{2}$. Setzen wir dies gleich $sn\varphi$, so können wir aus der Tafel der Werte $F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha}}$ den zugehörigen Wert $F = x$ bestimmen. Da für

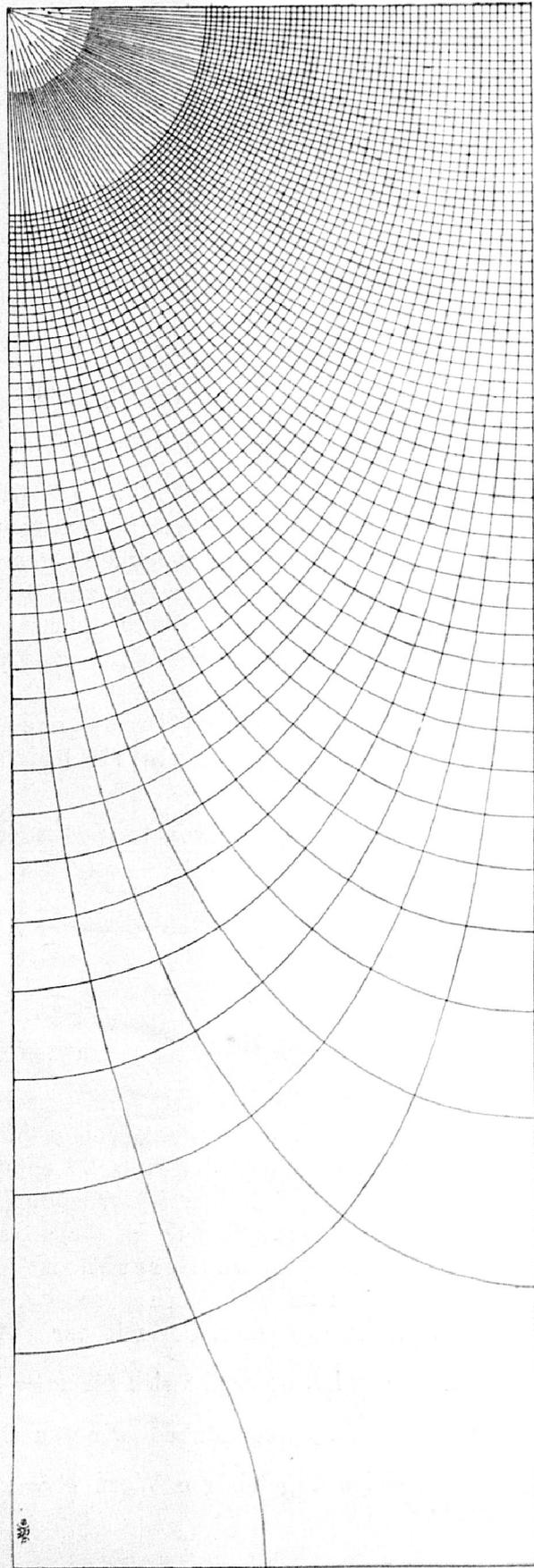


Abb. 29.

1924

die Ecke E $x = K$ und $\varphi = \pi/2$ ist, so gilt für das zugehörige h $\tan \frac{h}{2} = \frac{1}{\mu} = \sqrt{\sin \alpha}$. Für unser α findet man den eben angegebenen Wert $h = 62,536\tau$.

Auf dem zweiten Randteil AF , wo $x = K$ ist, ist $62,536\tau \leq h \leq 64\tau$. Hier ist auch $w = \mu \tan \frac{h}{2}$. Andererseits ist $w = sn(K + yi) = sn(y, \cos \alpha) = \sin \varphi'$. Daraus bekommt man $\varphi'(h)$ und $y = F(\varphi', \cos \alpha)$.

Die Schnittpunkte der Zirkulationsstromlinien mit den Mittellinien des Rechtecks kann man auch auf einfache Weise mit Hilfe der F -Tafel bestimmen. Die Schnitte auf der langen Mittellinie OF findet man am einfachsten durch Einführung eines Hilfswinkels ψ ¹⁾. Es sei $\sqrt{\sin \alpha} = \tan \frac{\beta}{2}$ und $\sin \psi = \frac{\sin \beta}{\cos \gamma}$,

dann ist $\sin \varphi = \frac{\tan \frac{\psi}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}}$. Daraus findet man φ und $x = F(\varphi)$.

Auf der kurzen Mittellinie OE , wo $x = 0$ ist, bekommt man φ' aus $\tan \varphi$

$= \frac{\tan \frac{\psi}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}}$ und dazu $y = F(\varphi', \cos \alpha)$.

(43) Noch einfacher wird die Berechnung, wenn man die große Übereinstimmung unseres Netzes mit dem des Parallelstreifens benutzt. Die in Abb. 30 zusammengestellten Netze stimmen in den gezeichneten Teilen fast bis auf Größen überein, die man als Zeichenfehler ansehen könnte. Wir überdecken daher das Rechteck mit dem gleichbreiten Parallelstreifen und lassen von der gemeinsamen Quelle die Quellstromlinien zum Rande gehn. Sind die Koordinaten der Mündungen beim Rechteck $\bar{x}(h)$ und $\bar{y}(h)$, die beim Parallelstreifen $\bar{x}'(h)$ und $\bar{y}'(h)$, so kann man mit Hilfe der h^* -Skalen oder des Integrators aus den Unterschieden $\bar{x} - \bar{x}'$ und $\bar{y} - \bar{y}'$ die Verschiebungen $x - x'$ und $y - y'$ berechnen, die notwendig sind, um von einer Stelle x', y' im Netz des Parallelstreifens zu der entsprechenden im Netz des Rechtecks zu kommen. Da diese Unterschiede fast durchweg sehr klein sind, so kann man die Kurven der Randwerte $\bar{x} - \bar{x}'$ und $\bar{y} - \bar{y}'$ in großem Maßstab zeichnen und braucht nicht so behutsam zu integrieren.

Das Netz im Parallelstreifen erhält man auf geometrischem Wege am bequemsten. Man kann den Parallelstreifen als das konforme Abbild der Halbkugel auffassen; die Breiten- und die Längskreise bilden sich dabei nach der bekannten Merkatorschen Projektion als zwei Scharen paralleler Geraden ab, die man leicht einzeichnen kann. Andererseits kann man ebenfalls den Einheitskreis als konformes Abbild der Halbkugel auffassen, wo sich die Breiten- und Längskreise nach der bekannten stereographischen Projektion als zwei Kreisscharen abbilden, die man ebenfalls leicht zeichnen kann. In denselben Einheitskreis kann man nun das Bild der Funktion $k = g + hi = \ln \zeta$ mit den bekannten h -Strahlen und g -Kreisen einzeichnen und dann diese Figur punktweise

1) Nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn E. Lipken, Göttingen.

mit Hilfe der geographischen Koordinaten an die entsprechenden Stellen des Streifens übertragen. (Abb. 30 b.)

Um die Mündungen der Quellstromlinien genau zu bekommen, überlegen wir uns, wie die Abbildung analytisch zustande kommt.

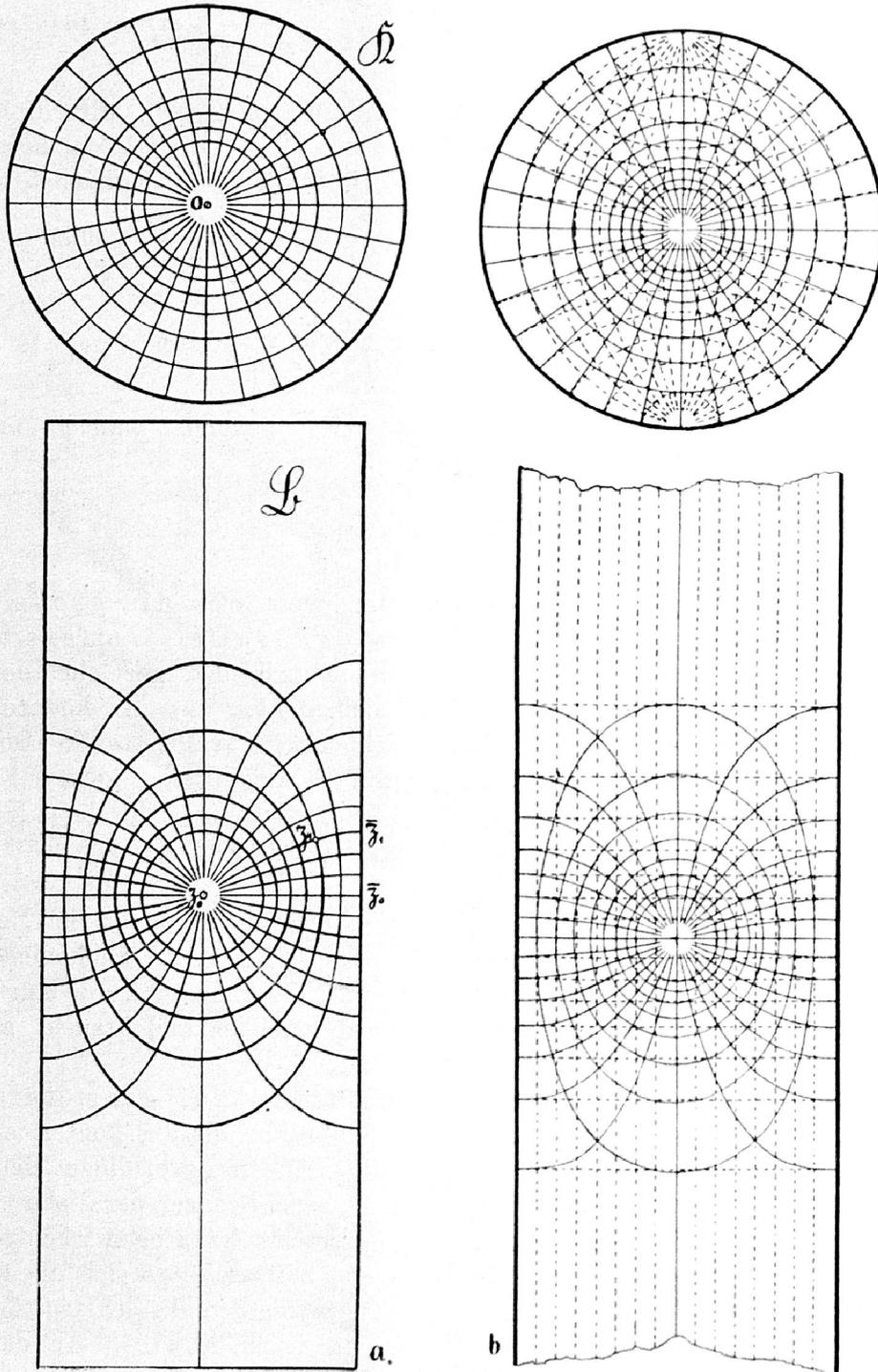


Abb. 30 a.

Abb. 30 b.

Bei unserm elliptischen Integral (40) wird das abgebildete Rechteck mit zunehmendem α immer länger und geht für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in den oben an der

x -Achse gelegenen Parallelstreifen von der Breite $\frac{\pi}{2}$ über; für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird das Integral zu $z' = \int_0^{w'} \frac{dw}{1-w^2} = \text{ArTan } w'$, also $w' = \text{Tan } z' = \frac{e^{2z'} - 1}{e^{2z'} + 1}$;

$(z' = \frac{1}{2} \ln \frac{1+w'}{1-w'})$. Da hier $z' = \frac{\pi}{4i}$ nach $w' = i$ kommt, so muß die positiv-imaginäre halbe w' -Ebene durch $\xi = \frac{i-w'}{i+w'}$ auf das Innere des Einheitskreises der ξ -Ebene abgebildet werden. Umgekehrt ist $w' = i \frac{1-\xi}{1+\xi}$ und

$$\text{für } \xi = e^{hi} \quad w' = i \frac{1 - e^{hi}}{1 + e^{hi}} = \tan \frac{h}{2} \quad \text{und} \quad z' = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tan \frac{h}{2}}{1 - \tan \frac{h}{2}} = \frac{1}{2} \ln \tan \left(\frac{h}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

= x' . Das ist ja die von der Merkatorschen Projektion her bekannte Darstellung.

(44) Um aber die Verhältnisse in der Nähe der kurzen Seite unseres Rechtecks zu bekommen, müssen wir ein anderes Verfahren einschlagen. Wenn wir nämlich das Rechteck auf die schmale Seite stellen, so bekommen wir zur Bestimmung von $\alpha \ln q = -\pi \cdot \frac{K'}{K} = -6\pi$, also ein sehr kleines

q , sodaß wir mit großer Annäherung $\sin \alpha = 4e^{-\frac{\pi}{2} \frac{K'}{K}} = 4e^{-3\pi}$ setzen können. Dann wird $\sin \alpha = 0,000321$ auch noch sehr klein. Bei der konformen Abbildung durch das elliptische Integral mit diesem kleinen $\sin \alpha$ werden sich daher die Verhältnisse im Rechteck nicht wesentlich von dem Falle unterscheiden, wo $\alpha = 0$ ist, das Integral also zu $z'' = \int_0^{w''} \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} = \arcsin w''$ wird. Durch die

Umkehrung $w'' = \sin z''$ wird das unendlich hohe Rechteck von der Breite π oder der Halbstreifen auf die positiv-imaginäre w'' -Ebene abgebildet. Der Quellpunkt $z'' = y''_0 \cdot i$ kommt dabei nach $w'' = \text{Sin } y''_0 \cdot i = \mu i$. Die Eckpunkte $z'' = \pm \pi/2$ kommen nach $u'' = \pm 1$, die beiden Senkrechten $x'' = \pm \pi/2$ werden nach rechts und links auf die reelle u'' -Achse herunter geklappt; dabei gehen die senkrechten Geraden in die Hyperbeln $\left(\frac{u''}{\sin x''}\right)^2 - \left(\frac{v''}{\cos x''}\right)^2 = 1$ und die waagrechten Strecken innerhalb des Streifens in die Ellipsen $\left(\frac{u''}{\text{Cos } y''}\right)^2 + \left(\frac{v''}{\text{Sin } y''}\right)^2 = 1$ mit denselben Brennpunkten ± 1 über. Diese Kurven sind leicht zu zeichnen oder punktweise zu berechnen aus $u'' = \sin x'' \cdot \text{Cos } y''$ und $v'' = \cos x'' \cdot \text{Sin } y''$.

In dieses Netz übertragen wir die Figur $k = \ln \xi$ im Einheitskreis durch $w'' = \mu i \frac{1-\xi}{1+\xi} = \mu i \cdot \text{Tan } \frac{k}{2}$. Wir erhalten dann das auch in Abb. 13 dargestellte Netz von Kreisen, deren Mittelpunkte und Halbmesser sich zeichnerisch und rechnerisch leicht bestimmen lassen. Es ist $r_g = \mu \cdot \text{Cos } (-g)$, für M_g $x'' = 0$, $y'' = \mu \text{ Cot } (-g)$ und $r_h = \mu \cdot \text{cosech } h$, für M_h $x'' = -\mu \cot h$, $y'' = 0$.

Dieses Netz kann dann mit Hilfe des x'' , y'' -Netzes in den Halbstreifen übertragen werden.

Die Mündungen der Quellkurven lassen sich auch hier leicht berechnen. Auf dem wagerechten Randstück ist $\bar{x}'' = \arcsin u'' = \arcsin\left(\mu \cdot \tan \frac{h}{2}\right)$ und auf dem senkrechten Rande $\bar{y}'' = \operatorname{ArCof}\left(\mu \cdot \tan \frac{h}{2}\right)$. Um das h der nach der Ecke gehenden Quellkurve zu finden, setzen wir $\tan \frac{h}{2} = \frac{1}{\mu}$.

Nun können wir wie in (43) durch Integration leicht die Verschiebungen berechnen, die man notwendig hat, um aus dem Netz für den Halbstreifen dasjenige für das Rechteck zu bekommen. Wir bilden wieder die Unterschiede $\bar{x} - \bar{x}''$ und $\bar{y} - \bar{y}''$ und berechnen die dazu im Innern gehörigen Werte $x - x''$ und $y - y''$. Wenn wir das wirklich bei unserm Rechteck ausführen, sehen wir, daß die Unterschiede im rechten unteren Viertel des auf der kleinen Seite stehenden Rechtecks derartig klein sind, daß wir das gewonnene Netz für den Halbstreifen in diesem Teil der Fläche ruhig dem für das Rechteck gleichsetzen können. Schon im ungünstigsten Falle, in dem des Quadrates, betragen die größten Abweichungen beider Figuren am senkrechten Rande (bis zur Höhe y''_0 der Quelle) nur rund $2\frac{1}{2}\%$ von der Quadratseite (π). Bei dem Seitenverhältnis 2:1 sind die größten Abweichungen nur noch rund 1% ; beide Figuren zeigen also eine Übereinstimmung in dem gekennzeichneten Viertelrechteck, die in vielen Fällen schon ausreicht. Bei unserm Rechteck 1:3 sind die Abweichungen gar nur $\frac{1}{200}\%$, also ganz belanglos. Wir können also in dem Viertelrechteck, das g , h -Netz durch dasjenige des Halbstreifens ersetzen.

Es sei nur noch gesagt, wo die Zirkulationsstromlinien die y'' -Achse schneiden.

Man bekommt für $h = 0$ und $\xi = e^g$, $v'' = \mu \operatorname{Tan}\left(\frac{-g}{2}\right)$, $\operatorname{Sin} y'' = \operatorname{Sin} y''_0 \cdot \operatorname{Tan}\left(\frac{-g}{2}\right)$ und daraus y'' .

(45) Für das in (38) gebrauchte und in Abb. 26 dargestellte g , h -Netz des Quadrates bestimmt man $\sin \alpha$ leicht dadurch, daß man für das h der nach der Ecke gehenden Quellstromlinie aus Symmetriegründen $h = \pi/4$ setzt. Nach (42) ist ja $\tan \frac{h}{2} = \sqrt{\sin \alpha}$, also $\sin \alpha = \tan^2 \frac{h}{2} = 3 - \sqrt{2} = 0,171573$, $\alpha = 9^\circ 52' 45'',4$. Nach Witt (angeführt in Abschnitt (40)) ist bis $\alpha = 24^\circ$ bis auf 7 Stellen genau $K = \frac{\pi}{2} \cdot \sec \frac{\alpha}{2} \sqrt[4]{\sec \alpha}$, daher $K = 1,5825385$ und $K' = 2K = 3,165077$. Das Netz der g , h -Linien berechnet man dann nach einem der vorhin entwickelten Verfahren; das in Abb. 26 dargestellte wurde nach dem Verfahren von (11) berechnet.

V. Anwendung des erhaltenen Netzes zur Lösung einer Aufgabe aus der Mechanik.

(46) Das gewonnene g , h -Netz im Kreuz soll nun auch noch zur Lösung einer Aufgabe aus der Mechanik und zwar aus der Elastizitätslehre benutzt werden. Die zu lösende Differentialgleichung wird allerdings

$\Delta u = C$ heißen. Ihre Lösung läßt sich bekanntlich durch einen einfachen Kunstgriff auf die Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ zurückführen.

Der gegebene Bereich \mathfrak{B} sei der Querschnitt eines gewalzten Stabes, der aus einem gleichartigen, elastischen Stoffe besteht. Durch Momente, die an dem Ende des Stabes angreifen, werde eine Verwindung um die Längsachse hervorgerufen. Die dadurch in den Querschnitten hervorgerufenen Spannungen kann man sich in der mannigfaltigsten Weise anschaulich machen. (Siehe z. B. die betreffenden Abschnitte in Föppls technischer Mechanik Bd. III und V, sowie Prandtls Aufsatz in dem Jahresbericht der dt. Math.-Ver. 1904 S. 31/36). Wir beschränken uns auf die folgende Veranschaulichung: Die Spannungslinien in \mathfrak{B} , d. h. diejenigen Kurven, welche in jedem Punkte die Richtung der resultierenden Schubspannung $\tau = \tau_{xx} + \tau_{zy} \cdot i = \tau_x + \tau_y \cdot i$ haben, kann man auch als Höhenlinien eines sich über \mathfrak{B} erhebenden Hügels ansehen.

Für die Komponenten der Schubspannung gelten bekanntlich die beiden Differentialgleichungen (1) $\operatorname{div} \tau = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0$ und (2) $\operatorname{rot} \tau = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = 2G\vartheta$, wo G der Schubelastizitätsmodul und ϑ die Verwindung der Längeneinheit ist. Wegen (1) können wir $\tau_y = \frac{\partial u}{\partial x}$ und $\tau_x = -\frac{\partial u}{\partial y}$ setzen, wo u nach (2) der Diff.-Gl. (3) $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2G\vartheta = C$ genügt. Hat man u derartig bestimmt, daß (3) befriedigt wird, dann ist $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot i$ das Gefäll der u -Fläche, und der um 90° im positiven Sinn gedrehte Gradient, der dann in der Richtung der Linie $u = \text{Const.}$ zeigt, $-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} i = \tau_x + \tau_y i = \tau$, gerade die resultierende Schubspannung.

(47) Es handelt sich also darum, für unser Kreuz die Differentialgleichung $\Delta u = C$ zu lösen. Da die Schubspannungen am Rande \mathfrak{R} tangential verlaufen müssen, so muß auf \mathfrak{R} $u = \text{Const.}$ z. B. 0 sein; u muß danach auf \mathfrak{R} verschwinden. Nehmen wir die Funktion $U = C \cdot \frac{x^2 + y^2}{4} = C \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2$, so ist $\Delta U = C$ für die ganze Ebene, aber auf dem Rande \mathfrak{R} ist U i. a. von Null verschieden, da es eben gleich dem C -fachen Quadrat der halben Entfernung der betreffenden Randpunkte vom Nullpunkt sein muß. Berechnet man aber eine Funktion f , die auf \mathfrak{R} diese Werte der Funktion U annimmt und in \mathfrak{B} der Differentialgleichung $\Delta f = 0$ genügt, so verschwindet $U - f$ auf \mathfrak{R} und in \mathfrak{B} ist $\Delta(U - f) = \Delta U - \Delta f = C$. $U - f$ ist also die gesuchte Funktion u . Man paßt sozusagen die allgemeine Funktion U , die der gegebenen Differentialgleichung $\Delta U = C$ genügt, den gegebenen Randwerten auf \mathfrak{R} an, indem man von U eine Hilfsfunktion f subtrahiert, die auf \mathfrak{R} die Abweichung der U -Randwerte von den geforderten annimmt und in \mathfrak{B} eine verschwindende Δ -Ableitung hat.

Wir entwickeln zur Bestimmung von f in \mathfrak{B} f auf dem Rande oder $\bar{U} = \bar{r}^2(h) \cdot \frac{C}{4}$ nach Fourier und gewinnen daraus leicht die Darstellung für

das Innere von \mathfrak{B} . Allerdings muß man dabei wegen der nahe am Rande liegenden Punkte sehr weit gehen. Wir finden

$$\begin{aligned}
 f(h) = \bar{r}^2(h) = & 0,915 + 0,596 \cos(4h) + 0,317 \cos(8h) + 0,213 \cos(12h) \\
 & + 0,140 \cos(16h) + 0,094 \cos(20h) + 0,061 \cos(24h) \\
 & + 0,039 \cos(28h) + 0,019 \cos(32h) + 0,007 \cos(36h) \\
 & - 0,004 \cos(40h) - 0,012 \cos(44h) - 0,019 \cos(48h) \\
 & - 0,024 \cos(52h) - 0,027 \cos(56h) - 0,026 \cos(60h) \\
 & - 0,023 \cos(64h) - 0,017 \cos(68h) - 0,011 \cos(72h) \\
 & - 0,006 \cos(76h) - 0,001 \cos(80h) + 0,003 \cos(84h) \\
 & + 0,005 \cos(88h) + 0,005 \cos(92h) + 0,004 \cos(96h) \\
 & + 0,003 \cos(100h) + 0,001 \cos(104h) - 0,001 \cos(108h) \\
 & - 0,002 \cos(112h) - 0,001 \cos(116h) + 0,000 \cos(120h) \\
 & + 0,001 \cos(124h) + 0,001 \cos(128h) \text{ u. s. f.}
 \end{aligned}$$

Dann findet man $u(g, h) = \frac{C}{4} [r^2(g, h) - 0,915 - 0,596 e^{+4g} \cos(4h) - 0,317 e^{+8g} \cos(8h) - \dots]$. Schon für Teile des Bereichs, die dem Rande des Bereichs noch nicht fern liegen, kommen wegen des großen negativen Faktors im Exponenten die

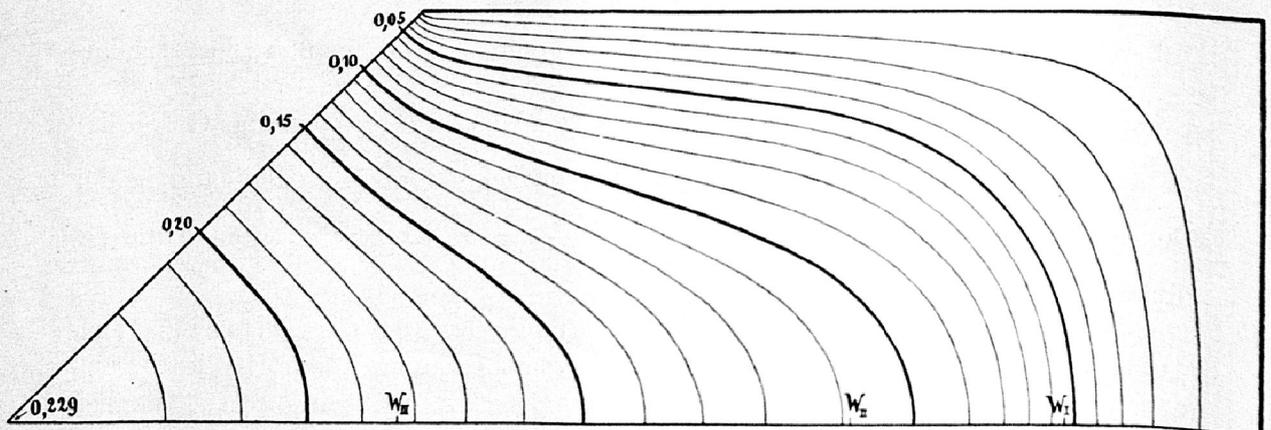


Abb. 31.

letzten Glieder nicht mehr in Betracht. — Man bekommt auf diese Weise u als Funktion von g und h . Zeichnet man die Profile $u(g)$ für die verschiedenen Quellstromlinien, so kann man die Stellen auf diesen Linien bestimmen, die zu gewissen Werten u gehören. Durch diese Punkte zieht man dann die u -Kurven. Siehe Abb. 31. Als Einheit ist wieder die Quadratseite gewählt worden. Die u -Kurven folgen hier in Abständen von je 0,01 bei einem $C = -1$.

(48) Für unsern Bereich hat Herr Prof. Runge 1908 in der Zeitschrift f. Math. und Phys. S. 225—232 dieselbe Aufgabe schon einmal gelöst, indem er den Bereich in 320 kleine Quadrate auflöste und dann die Differentialgleichung durch eine Differenzgleichung ersetzte. Beim Vergleich der damals erhaltenen Figur (S. 229) mit der unsrigen erkennt man die Übereinstimmung der beiden Ergebnisse in den wesentlichen Zügen. (Zur genaueren Vergleichung diene die Angabe, daß die Einheit für u dort $\frac{1}{64}$ der unsrigen ist.)

Naturgemäß muß unser jetziges Verfahren in den Feinheiten besser arbeiten, da wir hier eine stetige Fläche in den Rand \mathfrak{R} einhängen, während dort sozusagen ein Netz von im Grundriß quadratischen Maschen mit geraden Kanten eingehängt wurde. Dieses aus lauter mehr oder weniger windschiefen vierseitigen Rähmchen zusammengesetzte Gerüst wird sich der stetigen Fläche um so mehr annähern, je kleiner die Felder sind. Der erste Wendepunkt (in der Abbildung bei W_I) in jeder Hauptachse des Kreuzes kommt bei 320 Feldern noch nicht zur Geltung. Bei beiden Figuren sieht man aber deutlich, wie die u -Fläche an den ausspringenden Ecken wagerecht ansetzt, an den Enden der Hauptachsen ($h = n \cdot \frac{\pi}{2}$) dagegen mit einem bestimmten Winkel ansteigt ($\tan \alpha = 0,163$; $\alpha = 9\frac{1}{4}^\circ$) und an den einspringenden Ecken, den Enden der Nebenachsen ($h = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{4}$), eine senkrechte Tangente besitzt. Hier kann man nämlich u über der Nebenachse als Funktion von ϱ , des Abstandes von der Ecke, darstellen durch $u = 0,52\varrho^{\frac{2}{3}}$, also ist $\frac{du}{d\varrho} = \frac{0,35}{\sqrt[3]{\varrho}}$. In der Mitte des Querschnitts dagegen haben wir eine flache Kuppe von der Höhe $u = 0,229$. Die Schubspannungen werden also in der Mitte und an den ausspringenden Ecken verschwinden, an den Enden der Hauptachsen den Betrag rd. $\frac{1}{6}$ haben und an den einspringenden Ecken unendlich werden. In Wahrheit werden technisch hergestellte, gewalzte oder gegossene Profile dieser Art nicht solche haarscharfe Ecken, sondern kleine Abrundungen besitzen. Je kleiner der Halbmesser dieser

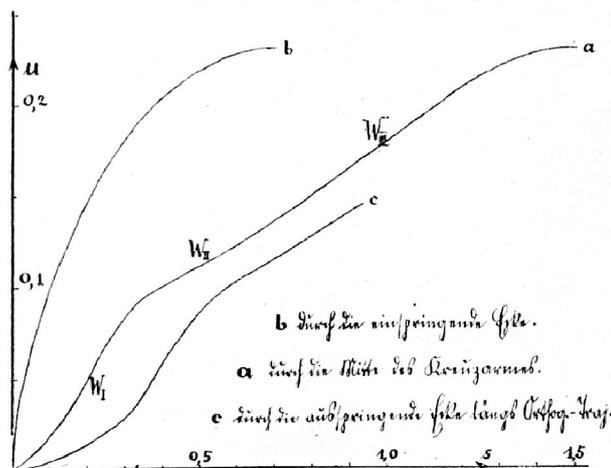


Abb. 32.

Abrundungen aber ist, desto größer werden die Spannungen an dieser Stelle sein. (Vgl. z. B. die Versuche von E. Preuß in Darmstadt über die Spannungsverminderung durch die Abrundung scharfer Ecken, Ing.-Zeitschr. Bd. 56 S. 1349 ff., wo Preuß allerdings keine Verwindungen vornimmt, sondern einen Eisenwinkel auseinander biegt.) Ein Bruch wird daher am ersten an den einspringenden Ecken zu befürchten sein. Die Wendepunkte (siehe auch Abb. 32) auf den Hauptachsen stellen die Punkte stärkster und geringster Spannung auf diesen Linien dar. In W_I und W_{III} haben wir Höchstwerte und in W_{II} einen (positiven) Mindestwert der Spannung. Von W_I geht eine Linie höchster Spannung nach der einspringenden Ecke, die zunächst fast parallel mit den Span-

nungslinien läuft, kurz vor der Ecke aber in die Richtung der Nebenachse einbiegt. Die von W_{III} ausgehende Linie höchster Spannung enthält natürlich keine solch hohen Spannungen wie die von W_I ausgehende.

(49) Durch die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf die Spannungsfigur erhalten nach Herrn Prof. Runge auch die Höhengrößen der u -Fläche,

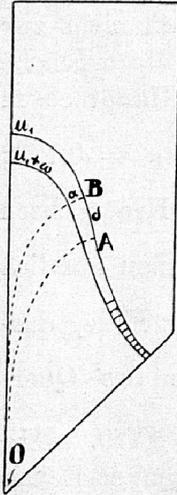


Abb. 33.

die Orthogonaltrajektorien der u -Linien, ihre Bedeutung. Das Doppelintegral $\iint \mathcal{L} u d\mathfrak{B}$ erstreckt über einen beliebigen Teil der Fläche \mathfrak{B} ergibt, da $\mathcal{L} u = C$ ist, C mal diesen Flächenteil. Wir nehmen ein Dreieck OAB (Abb. 33), dessen Seiten OA und OB Orthogonaltrajektorien der u -Kurven sind und dessen dritte Seite AB ein Teil der Kurve $u = u_1$ ist. Da nach Gauß $\iint \mathcal{L} u dO = \int \frac{\partial u}{\partial n} ds$ ist, so ist die C -fache Fläche des krummlinigen Dreiecks OAB gleich dem um dieses Dreieck erstreckten Integral $\int \frac{\partial u}{\partial n} ds$. Wenn $AB = \delta$ klein ist, so heben sich die Teilintegrale längs OA und BO gegeneinander auf und längs AB wird das Integral bis auf Größen höherer Ordnung gleich $\int_A^B \frac{\partial u}{\partial n} \cdot ds$

$= \frac{\omega}{\alpha} \cdot \delta$, wenn α der Abstand der beiden für u_1 und $u_1 + \omega$ gezeichneten u -Kurven ist. Daher ist $\Delta OAB = \frac{\delta}{\alpha} \cdot \frac{\omega}{C}$. Teilen wir nun den Streifen zwischen den beiden u -Kurven, nach Gött. Nachr. 1911 S. 446 unten, in lauter Quadrate, machen also $\delta = \alpha$, dann ist $\Delta OAB = \frac{\omega}{C}$. Durch die Einteilung in Quadrate hat man also auf der u -Kurve eine Skala erhalten, durch welche die zugehörigen Dreiecke zwischen zwei Orthogonaltrajektorien und einem beliebigen Stück der u -Kurve gemessen werden können; ω und C sind hier ja feste Werte. Auf jeder andern u -Kurve erhält man natürlich eine andere Skala.

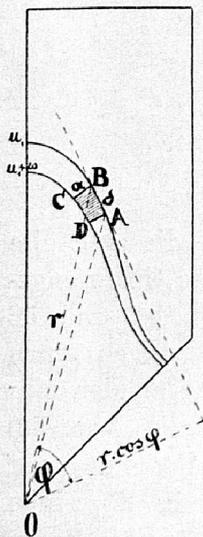


Abb. 34.

(50) Das Volumen, das von der u -Fläche und der Grundebene begrenzt wird, hat bekanntlich eine nahe Beziehung zum Drehmoment, siehe Prandtl a. a. O. Aber schon die von den u -Kurven umgrenzten einzelnen Schichten und Ausschnitte aus diesen Schichten zeigen nach Herrn Prof. Runge diese Beziehung. In der Abb. 34 kann das Flächenstückchen $ABCD$ als Rechteckchen mit dem Flächeninhalt $\alpha\delta$ betrachtet werden. Die Kraft, die von diesem Flächenstück in Richtung der Spannungslinie ausgeht, ist $\frac{\partial u}{\partial n} \cdot \alpha\delta$ oder, da $\frac{\omega}{\alpha}$ sich $\frac{\partial u}{\partial n}$ nähert, $\omega \cdot \delta$ und das Drehmoment bezogen auf den Mittelpunkt $\omega \cdot \delta \cdot r \cdot \cos \varphi = 2\omega \cdot \Delta OAB$. Daher ist der Anteil am Drehmoment, den ein beliebiges Stück zwischen zwei nahen u -Linien liefert, proportional dem zugehörigen Ausschnitt aus der von der u -Linie umgrenzten Fläche und gleich dem doppelten Volumen der sich über diesen Ausschnitt erhebenden

Schicht von der Höhe ω . Der ganze ringförmige Flächenstreifen liefert zum Moment einen Beitrag gleich dem doppelten Volumen der von der u -Linie umgrenzten Scheibe. Das ganze Moment wird also gleich dem doppelten Volumen des Raumes zwischen der u -Fläche und der Grundebene.

(51) Nennen wir das Drehmoment M und das Volumen v_1 , das durch die u -Fläche für $C = \pm 1$ bestimmt wird, so ist $M = 2v = 4G\vartheta v_1$. Für einen walzigen Stab, wenn also \mathfrak{B} ein Kreis vom Halbmesser R ist, bekommt man bekanntlich $\frac{u}{C} = \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$ und $v_1 = \frac{1}{8}\pi R^4$, also $M = \frac{\pi}{2} G\vartheta R^4 = G\vartheta J$, wenn

J das polare Trägheitsmoment $\frac{\pi}{2} R^4$ des Kreises für den Mittelpunkt bedeutet.

Hat man für einen anderen Querschnitt v_1 bestimmt, so ist $M = 4G\vartheta v_1$. Dasselbe Moment gegen Verwinden hat ein walziger Stab vom Halbmesser R_d , wenn $\frac{\pi}{2} G\vartheta R_d^4 = 4G\vartheta v_1$ ist, also $R_d = \sqrt[4]{\frac{8}{\pi} v_1} = 1,263 \sqrt[4]{v_1}$. R_d kann man als den Verwindungshalbmesser des Querschnitts bezeichnen, insofern als er den Halbmesser desjenigen Stabes mit kreisförmigem Querschnitt darstellt, der dem Verwinden denselben Widerstand entgegensetzt.

(52) Bei unserm Kreuz ergibt sich $v_1 = 0,441$. Das gesamte Moment der Schubspannungen ist daher $M = 1,76 G\vartheta$ oder $\vartheta = 0,57 \frac{M}{G}$. Ist die Seite des Quadrates a , so werden die Werte u a^2 mal so groß, desgleichen die Fläche, über welcher sich die u -Fläche erhebt; mithin ist für ein solches Kreuz $M = 1,76 a^4 G\vartheta$. Der Verwindungshalbmesser ist für unsern Querschnitt $R_d = 1,029$ und allgemein $R_d = 1,03 \cdot a$. — Die vielfach auf kreisähnliche Stabquerschnitte vom Kreise aus übertragene Formel $M = JG\vartheta$ würde für unser Kreuz $M = 4\frac{5}{8} a^4 \cdot G\vartheta$ liefern anstatt rd. $1\frac{3}{4} a^4 G\vartheta$. Man sieht, wie stark die Einschnitte die Verwindungsfestigkeit herabsetzen.

Lebenslauf.

Am 29. April 1879 wurde ich, Paul Walther Rottsieper, zu Ronsdorf im ehemaligen Herzogtum Berg geboren. Meine Eltern sind der Ingenieur Hugo Rottsieper und seine Ehefrau Maria, geb. Carnap. Ich bin wie meine Eltern Protestant und preußischer Staatsangehöriger.

Ich besuchte die Volksschule zu Ronsdorf, Thale am Harz, Berlin; dann kam ich auf die III. Realschule zu Berlin, von dort 1894 auf die Präparandenanstalt zu Orsoy am Niederrhein und 1896 auf das Volksschullehrer-Seminar im benachbarten Moers. Nach fast zweijähriger Tätigkeit als Volksschullehrer in Velbert und in Dümpten bei Mülheim-Ruhr besuchte ich ein Jahr lang die Oberrealschule zu Elberfeld und bestand dort Ostern 1902 die Reifeprüfung. Danach studierte ich in Marburg S. S. 1902 bis W. S. 1903/04, in München S. S. 1904 und in Göttingen W. S. 1904/05 bis S. S. 1907 und zwar Mathematik und Naturwissenschaften. Aus dem Gebiete der Mathematik und Physik hörte ich während meiner Studienzeit die Vorlesungen der Herren v. Dalwigk, Heß, Richarz, Schaum, Jung, Hensel, Feußner, Doehlemann, Roentgen, Graetz, v. Weber, Klein, Voigt, Herglotz, Runge, Wiechert, Bose und Prandtl. Allen Herren bin ich zu herzlichem Dank verpflichtet, ganz besonders aber Herrn Geheimrat Runge. Er stellte mir die in der vorliegenden Arbeit behandelte Aufgabe und förderte sie durch mannigfache Anregung.

Meine Staatsprüfung für das höhere Lehrfach bestand ich am 17. Mai 1907 und erlangte die Lehrbefähigung in reiner und angewandter Mathematik und Physik. Mein Seminarjahr erledigte ich zu Leer in Ostfriesland; während des Probejahrs in Goslar a. Harz war ich Inspektor des dortigen Schülerheims. Nach Erlangung der Anstellungsfähigkeit im Herbst 1909 war ich wissenschaftlicher Hilfslehrer in Göttingen an der Oberrealschule bis Ostern 1912, in Hannover am Kaiser Wilhelms-Gymnasium bis Ostern 1913 und in Northeim (Hann.) am Gymnasium Corvinianum. Vom 1. April 1914 ab bin ich Oberlehrer am Kgl. Realgymnasium zu Osnabrück.

385