Zur Theorie

des

Maxwell'schen Kreisels.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Max Winkelmann
aus Friedenau.

Göttingen 1904.
Druck der Dieterich'schen Universitäts-Buchdruckerei.
(W. Fr. Kaestner).

Referent: Herr Geh. Regierungsrat Prof. Dr. F. Klein.

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Februar 1904.

Inhaltsübersicht.

	Seite	Nummer
I. Ueber die Funktionen des Maxwell'schen Kreisels.	5	1—37
Beschreibung des Kreisels — Konstruktion des Trägheitsellipsoides — Berechnung der Schraubenkonstanten — Berechnung der 6 Konstanten des Kreisels — Diskussion der Formeln — Beispiele — Asymmetrische Kreisel.		
II. Typus I. Differentialgleichungen und besondere Formen der Bewegung	21	38—85
Voraussetzungen des Problems. Vorbemerkung — Koordinaten. Beziehungen zwischen den Koordinaten der Lage, der Geschwindigkeit und des Impulses — Sätze über den Impulsvektor — Anwendung dieser Sätze — Differentialgleichungen der Bewegung — Dynamische Eigenschaften der Bewegung — Geometrische Herleitung von drei besonderen Bewegungsformen — Analytische Herleitung derselben Bewegungsformen.		
III. Angenäherte Darstellung der Bewegung bei geringer Elliptizität. Nachbarbewegungen zur Präzession.	39	86—161
Vorbemerkung — Die Näherungsmethode — Herstellung der Störungsgleichungen — Differentialgleichung für die Störung der Koordinate ϑ — Die allgemeine Lösung — Nachbarbewegung zur regulären Präzession — Gleichungen der reduzierten Bahnkurve. Stereographische Projektion — Säkulare Fälle. Resonanz — Schwebungen — Zwei spezielle Fälle — Nachbarbewegung zur pseudoregulären Präzession — Gleichungen der reduzierten Bahnkurve. Stereographische Projektion.		

	Seite	Nummer
IV. Ueber die Schwingungen um den stationären Zustand	68	162–196
Aufrechter Kreisel — Neue Koordinaten — Simultane Differentialgleichungen für x, y. Umformung und Integration derselben — Die determinierende Gleichung — Charakter der Bewegung — Die Rotation ist null — Die Rotation ist unendlich — Spezielle Fälle — Historische Notiz — Bemerkung zum konischen Pendel.		
Zusammenfassung	76	

Wortabkürzungen.

F-A = Figurenachse
H-A = Hauptachse
S-A = Schwerpunktachse
H-T = Hauptträgheitsmoment
T-E = Trägheitsellipsoid
KS = F. Klein und A. Sommerfeld, Ueber die Theorie des Kreisels.

Seite Nummer
68 162–196
76

I.

Ueber die Funktionen des Maxwell'schen Kreisels.

Maxwell hat im Jahre 1857 in den Transactions der Royal Society of Edinburgh (Vol. XXI, Part IV; siehe Scientific Papers I p. 248) ein sinnreiches Kreiselinstrument beschrieben, dessen Einrichtung es gestattet, mannigfaltige Versuche zum Studium der merkwürdigen Bewegungen eines starren Körpers um einen festen Punkt anzustellen. Der gegenwärtigen Abhandlung ist die photographische Abbildung eines Maxwell'schen Kreisels beigefügt; das Modell befindet sich in der Sammlung math. Instrumente u. Modelle zu Göttingen*. Ich will und muss zunächst das Instrument, mit Hilfe dieser Figur, kurz soweit erklären, als nötig ist, damit wir es als das anschauliche Objekt der folgenden theoretischen Ueberlegungen mit Vorteil gebrauchen können.

Beschreibung des Kreisels.

Der Apparat besteht aus zwei gesonderten Teilen: Dem eigentlichen Kreiselkörper und dem Gestell, in welchem er ruht oder seine Bewegungen ausführt. Am Kreiselkörper unterscheiden wir: die *Glocke* (G), deren Rand ein Ring (R) von quadratischem Profil bildet; sie besteht aus einem Rotguss-(Bronze-)Stück — gleichsam den „Rumpf" darstellend —; der Ring trägt die „Extremitäten", d. s. 9 radial-symmetrisch zur Rot.-Achse der Glocke angeordnete Messingschrauben, 6 mit horizontaler Achse (H) in Gewindebohrungen des Ringes horizontal verschiebbar, die 3 übrigen mit vertikaler Achse (V) entsprechend vertikal verschiebbar. Diese Beweglichkeit der 9 Schraubenmassen macht, allgemein zu reden, eine Veränderung der Gestalt des Kreisels hinsichtlich seines mechanischen Charakters in dreifachem Sinne möglich:

---

*Es ist nach den Angaben Maxwell's mit unwesentlichen Abweichungen in Gestalt und Dimensionen vom Mechaniker Dornfeld (am physikalischen Institut) ausgeführt worden.

1) Eine Aenderung der Grösse der drei Hauptträgheitsmomente (abgekürzt H-T) des Körpers für den Stützpunkt;

2) eine Aenderung der Lage der durch den Stützpunkt gehenden drei Hauptachsen (abgekürzt H-A);

3) eine Aenderung der Richtung der Schwerpunktachse (abgekürzt S-A) (Verbindungsgerade zwischen Stütz- und Schwerpunkt),

die letzten beiden Aenderungen gegenseitig und gegen die Figurenachse (abgekürzt F-A) (Symmetrieachse der Glocke), alle drei innerhalb von Grenzen, die durch die Abmessungen des Modells gegeben sind. Die cylindrische *Achse* (*A*) (aus Messing) mit eingezapften, konisch zugespitzten Stahlenden; sie besitzt ein Gewinde, an welchem die Glocke vermöge einer passenden Durchbohrung ihrer Kuppe auf- und niedergeschraubt werden kann. Eine solche Verschiebung der Glocke bewirkt eine Verlegung des Schwerpunktes der ganzen Kreiselmasse parallel der F-A (nunmehr die Verbindungslinie der Stahlspitzen); insbesondere kann es durch die Glockenform des Kreiselrumpfes erreicht werden, dass der Schwerpunkt „unter" dem Stützpunkt liegt, d. h. unterhalb derjenigen Ebene durch den Stützpunkt, deren Normale die F-A ist, (Aequatorebene d. Kr.). Koaxial mit der Glocke ist noch ein *Uebergewicht* (*U*) (ebenfalls aus Messing) mit einer doppelten Aufgabe:

a) die Grösse der äquatorialen Trägheitsmomente gegen dasjenige um die F-A stärker zu verändern, als es die Schrauben vermögen;

b) kleinere Verschiebungen des Schwerpunktes ∥ F-A hervorzubringen, als es mit der Glocke bequem ist, namentlich beim Aequilibrieren des Kreisels diese die „grobe" jenes die „feine" Einstellung fungierend.

Auf Glocke und Uebergewicht sitzen die Gegenmuttern g_1 resp. g_2, um beide in der jeweiligen Stellung zu arretieren.

Der Kreiselkörper stützt sich mit der ein wenig abgerundeten*, unteren Spitze auf die *Pfanne*, einen flach kegelförmig vertieften Achatbecher, so dass seine tiefste Stelle den festen (Stütz-)Punkt** darstellt. Der standfeste *Fuss* (wie die Glocke aus einem Bronzestück gegossen) mit breitem Basisteller von etwa doppeltem Durch-

---

*Der sonst beträchtliche Druck würde die Unterlage bald zerstören.

**Diese Bezeichnung ist nicht exakt, terminus technicus ist „halber Fixpunkt"; aber indem wir geflissentlich Bewegungen des Kreisels einzuleiten vermeiden, die ihn aus der Pfanne herausschleudern können, dürfen und wollen wir den Punkt fortan als einen festen ansehen.

messer des Ringes verjüngt sich nach oben, um auf seinem Gipfel die fest eingekittete Pfanne aufzunehmen. Der Antrieb des Kreisels erfolgt, indem auch seine obere Stahlspitze (fortan schlechtweg Kreiselspitze genannt) in das Hütchen einer Stellschraube gelagert wird, die im Querbalken des *Bügels* (*B*) befestigt ist, in der bekannten einfachsten Weise durch Abziehen einer an dornartige Fortsätze (*d*) der Achse angelegten Schnur, ausreichend, um ihm von Hand aus Umlaufgeschwindigkeiten bis beinahe $20\,2\pi/\text{sec}$ zu erteilen. Hierauf kann der Bügel aus den beiden Büchsen (*b*) herausgehoben werden. Hinsichtlich der Art, wie das Instrument zu justieren ist, sei auf die eingangs genannte Note Maxwell's hingewiesen.

Konstruktion des Trägheitsellipsoides.

Die klare Einsicht in die Funktion der 9 Schrauben erlangen wir nur durch eine mathematische Betrachtung; die Hauptschritte der einfachen Rechnung mögen hier wiedergegeben werden. Die mathematische Aufgabe ist diese: Das Trägheitsellipsoid (abgekürzt T-E) des Maxwell'schen Kreisels um seinen Stützpunkt als Centrum zu konstruiren. Wir nehmen, um die Vorstellungen zu vereinfachen, an, der Mechaniker habe, obwohl dies in Wirklichkeit nur angenähert zutreffen kann, unsere Absicht vollkommen erreicht, alle Teile des Kreiselkörpers mit genauer mechanischer Rotations-Symmetrie um eine Achse herzustellen — Schwerpunkt des Körperteils in dieser Achse, sie selbst und alle in irgend einem Punkte durch sie gehenden senkrechten Geraden seine H-A —. Dabei denke man sich die Gewinde aufgeschnitten und jeden Gang zu einem ebenen Ring geschlossen; es sind dann soviel parallelliegende Ringe als die Zahl der Windungen beträgt vorhanden und ihre gemeinsame Achse fällt mit der Achse des zugehörigen Teiles zusammen — diese Aenderung darf ohne merklichen Fehler geschehen —; die 9 Schrauben seien unter sich kongruent und ihre Anordnung entspreche der geforderten radiären Symmetrie.

Das rechtwinklige Koordinaten-System, auf welches wir alle Abmessungen beziehen, ist mit dem Kreiselkörper fest verbunden. Der feste Punkt ist der Ursprung, die Z-Achse falle mit der F-A zusammen, +Richtung nach der Kreiselspitze; die Aequatorebene wird dann die XY-Ebene. Wenn sämtliche Schrauben fortlaufend numeriert werden, erst die Horizontalschrauben von 1 bis 6, darauf die Vertikalschrauben von 7 bis 9, und zwar von der Spitze gesehen wie Fig. 1 anzeigt, dann sei die X-Achse parallel der Achsenlinie der beiden Diametralschrauben 1, 4, also die Y-Achse ∥ 07, die +Richtungen sind in die Figur eingezeichnet.

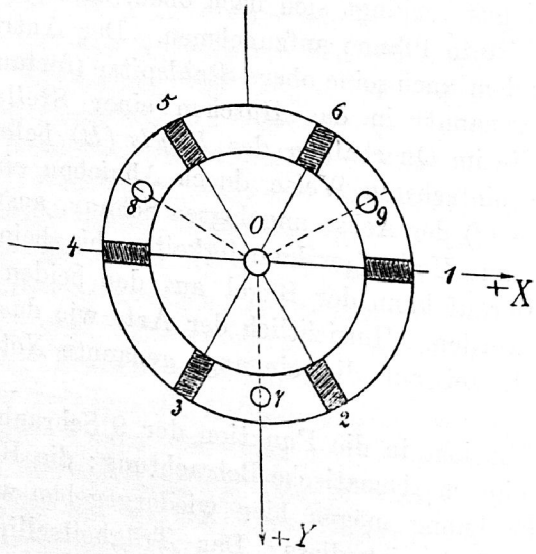


Fig. 1.

Ist uns das Trägheitsmoment des Körpers für jede Gerade durch den festen Punkt bekannt, so ist, wie wir wissen, das T-E der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernung vom Centrum eine der reziproken Wurzel aus dem Trägheitsmoment für ihre Vektorlinie proportionale Länge hat. Es seien K das Trägheitsmoment der Geraden, deren Richtungskosinus α, β, γ sind, A, B, C die Trägheitsmomente der X, Y, Z-Achse beziehentlich, D, E, F die Trägheitsprodukte der YZ, ZX, XY-Ebene bez., so wird K mit Hilfe dieser 6 Konstanten und der gegebenen Richtung nach der Formel berechnet:

1 $$K = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta.$$

Die 6 Konstanten des ganzen Kreiselkörpers werden durch Summation der seiner Teile erhalten. Also z. B.

2a $$A = A_a + G_a + S_a + U_a$$

wo (A) = Achse, (G) = Glocke (mit Gegenmutter), (S) = Schrauben, (U) = Uebergewicht (mit Gegenmutter); die übrigen mit dem entsprechenden Index. Hierbei sind offenbar nach Annahme

2b $$\begin{cases} A_a = A_b\,(= A_0), & G_a = G_b\,(= G), & U_a = U_b\,(= U), \\ A_d = A_e = A_f = 0, & G_d = G_e = G_f = 0, & U_d = U_e = U_f = 0, \end{cases}$$

und nach Konstruktion das erste Glied der Summe (2a) unbeweglich, die anderen drei Summanden mit der Stellung der Glocke

und des Uebergewichts, mit der Konfiguration der 9 Schrauben, bis auf G_c, U_c, veränderliche Grössen. Diese Abhängigkeit wollen wir gerade ermitteln. Zu dem Zwecke denken wir uns zunächst die Glocke bis zur Koincidenz der X-Achse mit der Achsenlinie des Schraubenpaares 1, 4 verschoben*; die XY-Ebene enthält dann die Achsen aller Horizontalschrauben.

Berechnung der Schraubenkonstanten.

1. *Berechnung der S.* Masse jeder Schraube m, H-T für ihre Achse C_s, für jede dazu senkrechte durch ihren Schwerpunkt A_s. Die Achse der H-Schraube $i\,(i/_1^6)$ sei gegen die $+X$-Achse unter dem $\sphericalangle \alpha_i$ geneigt, der Abstand ihres Schwerpunktes auf der Achse von 0 (Fig. 1) betrage R_i, dann sind die 6 Konstanten der Schraube i in derselben Reihenfolge wie A, B, C, D, E, F:

$$\left\{\begin{array}{l} H_a^i = C_s \cos^2\alpha_i + (A_s + mR_i^2)\sin^2\alpha_i \\ H_b^i = C_s \sin^2\alpha_i + (A_s + mR_i^2)\cos^2\alpha_i \\ H_c^i = A_s + mR_i^2 \\ H_d^i = H_e^i = 0; \quad H_f^i = \tfrac{1}{2}(A_s - C_s + mR_i^2)\sin 2\alpha_i. \end{array}\right. \qquad 3$$

Der Radiusvektor nach der Achsenspur der V-Schraube k $(k/_1^3)$ in der XY-Ebene sei gegen die $+X$-Achse unter dem $\sphericalangle \beta_k$ geneigt, seine Länge, welche bei allen 3 Schrauben gleich ist, betrage R_0, die Erhebung ihres Schwerpunktes über der XY-Ebene Z_k, auf der Achse gemessen, und wir haben für die 6 Konstanten der Schraube k folgende Werte:

$$\left\{\begin{array}{ll} V_a^k = A_s + mZ_k^2 + mR_0^2\sin^2\beta_k & V_d^k = mR_0 Z_k \cos\beta_k \\ V_b^k = A_s + mZ_k^2 + mR_0^2\cos^2\beta_k & V_e^k = mR_0 Z_k \sin\beta_k \\ V_c^k = C_s + mR_0^2 & V_f^k = \tfrac{1}{2}mR_0^2 \sin 2\beta_k \end{array}\right. \qquad 4$$

Man summiere über alle i und k, indem für α_i nacheinander: 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, für β_k: 90°, 210°, 330° gesetzt werden und erhält aus (3):

$$\left\{\begin{array}{l} H_a = \sum_i H_a^i = 3(A_s + C_s) + \tfrac{3}{4}m(R_2^2 + R_3^2 + R_5^2 + R_6^2) \\ H_b = \sum_i H_b^i = 3(A_s + C_s) + \tfrac{1}{4}m(R_2^2 + R_3^2 + R_5^2 + R_6^2) + m(R_1^2 + R_4^2) \\ H_c = \sum_i H_c^i = 6A_s + m\sum_i R_i^2 \\ H_d = \sum_i H_d^i = 0 \qquad H_e = \sum_i H_e^i = 0 \\ H_f = \sum_i H_f^i = \dfrac{\sqrt{3}}{4}m(R_2^2 - R_3^2 + R_5^2 - R_6^2). \end{array}\right. \qquad 5$$

*Die Koincidenz findet bei einer wirklichen Schraubung der Glocke natürlich nur ausnahmsweise statt, aber unsere Betrachtung hat mit diesem Umstand nichts zu thun.

Desgl. aus (4):

6
$$\begin{cases} V_a = \sum_k V_a^k = 3(A_s + \frac{1}{2} mR_0^2) + m(Z_7^2 + Z_8^2 + Z_9^2) \\ V_b = \sum_k V_b^k = 3(A_s + \frac{1}{2} mR_0^2) + m(Z_7^2 + Z_8^2 + Z_9^2) = V_a \\ V_c = \sum_k V_c^k = 3(C_s + mR_0^2) \\ V_d = \sum_k V_d^k = \frac{\sqrt{3}}{4} mR_0(Z_9 - Z_8) \\ V_e = \sum_k V_e^k = \frac{1}{2} mR_0(2Z_7 - Z_8 - Z_9) \\ V_f = \sum_k V_f^k = 0. \end{cases}$$

Die Konstanten S werden aus den korrespondierenden H und V additiv zusammengesetzt. Hierbei bemerken wir, dass die Grössen H (folglich auch S) nur von der Quadratsumme der Schwerpunktsabstände je zweier Diametralschrauben von der F-A abhängen. Infolgedessen erscheint es zweckmässig, für diese folgende Abkürzungen einzuführen:

7
$$R_1^2 + R_4^2 = R_{14}^2, \quad R_2^2 + R_5^2 = R_{25}^2, \quad R_3^2 + R_6^2 = R_{36}^2.$$

Mithin wird (5, 6):

8
$$\begin{cases} S_a = 3\{2A_s + C_s + 0{,}5mR_0^2\} + m\{Z_7^2 + Z_8^2 + Z_9^2\} + 0{,}75m\{R_{25}^2 + R_{36}^2\} \\ S_b = 3\{2A_s + C_s + 0{,}5mR_0^2\} + m\{Z_7^2 + Z_8^2 + Z_9^2\} + 0{,}25m\{R_{25}^2 + R_{36}^2\} + mR_{14}^2 \\ S_c = 3\{2A_s + C_s + mR_0^2\} + m\{R_{25}^2 + R_{36}^2 + R_{14}^2\} \\ S_d = 0{,}25\sqrt{3}\, mR_0\{Z_9 - Z_8\} \\ S_e = 0{,}5mR_0\{2Z_7 - Z_8 - Z_9\} \\ S_f = 0{,}25\sqrt{3}\, m\{R_{25}^2 - R_{36}^2\}. \end{cases}$$

Die 6 Grössen S bestimmen das T-E, welches zu dem System der 9 Schrauben allein mit dem Mittelpunkt in 0 gehört; seine Figur und Lage im Koord.-System hängen nach (8) von 6 Parametern ab: $R_{14}\, R_{25}\, R_{36},\ Z_7\, Z_8\, Z_9$. Wir erhalten die Koordinaten ξ_s, η_s, ζ_s ihres Schwerpunktes aus den folgenden Gleichungen:

$$9m\xi_s = m\sum_i R_i \cos\alpha_i, \quad 9m\eta_s = m\sum_i R_i \sin\alpha_i, \quad 9m\zeta_s = m\sum_k Z_k,$$

oder

$$\left\{\begin{array}{l} 18\xi_s = (R_2 - R_5) - (R_3 - R_6) + 2(R_1 - R_4) \\ 12\sqrt{3}\,\eta_{1s} = (R_2 - R_5) + (R_3 - R_6) \\ 9\zeta_s = Z_7 + Z_8 + Z_9. \end{array}\right. \qquad 9$$

Die Richtung der hierdurch bestimmten S-A des Systems der 9 Schrauben gegen die Koord.-Achsen hängt ebenfalls von 6 Parametern ab: $R_1 - R_4$, $R_2 - R_5$, $R_3 - R_6$, Z_7, Z_8, Z_9.

Anmerkung. Die Konfiguration der Schrauben ist dagegen durch alle R_i, Z_k vollständig bestimmt und daher von (eben diesen) 9 Parametern abhängig.

Berechnung der 6 Konstant des Kreise

2. *Berechnung von $A \ldots F$.* Sie geschieht nach der Vorschrift und den Bezeichnungen der Gleichungen (2a, b). Das Uebergewicht (U) ignorieren wir vorläufig, ersetzen A_s durch A_0', G_s durch G' und versehen wegen der besonderen Stellung der Glocke (p. 7) A bis F mit dem oberen Index 0. Somit bekommen wir:

$$\left\{\begin{array}{ll} A^0 = A_0 + G + S_a & D^0 = S_d \\ B^0 = A_0 + G + S_b & E^0 = S_e \\ C^0 = A_0' + G' + S_c & F^0 = S_f. \end{array}\right. \qquad 10$$

Nunmehr gelangt man leicht zu den Größen A bis F, welche einer beliebigen Stellung der Glocke zukommen, indem man eine Hilfs-Koordinatenebene einführt, welche die Achsenlinien der H-Schrauben enthält, also parallel der XY-Ebene ist, im Abstande h $(> 0$ nach oben, < 0 nach unten); alle X, Y bleiben ungeändert, alle Z-Abmessungen vermehren sich um h. Demnach bei aufgesetztem Uebergewicht (mit Gegenmutter), Masse m', Höhe des Schwerpunktes über der XY-Ebene h, U_0, U_0' äquatoriales bez. axiales Trägheitsmoment des Uebergewichts für seinen Schwerpunkt, ferner Gesamtmasse des Kreiselkörpers M ohne Uebergewicht, seine Schwerpunkthöhe über der Hilfsebene ζ^0:

$$\left\{\begin{array}{ll} A = A^0 + U_0 + Mh(h + 2\zeta^0) + m'h'^2 & D = D^0 + Mh\eta \\ B = B^0 + U_0 + Mh(h + 2\zeta^0) + m'h'^2 & E = E^0 + Mh\xi \\ C = C^0 + U_0' & F = F^0 \end{array}\right. \qquad 11$$

Hierin beziehen sich die Z_k nicht mehr auf die XY- sondern auf die Hilfsebene, deshalb schreiben wir auch sie lieber Z_k^0 und für ζ_s ζ_s^0.

ξ, η, ζ sind die Koordinaten für den Schwerpunkt des ganzen Systems. Dann ist unmittelbar klar, dass

$$(M + m')\xi = 9m\xi_s, \quad (M + m')\eta = 9m\eta_{1s}, \qquad 12a$$

während ζ, um seine Abhängigkeit von h, h' explicirte auszudrücken, die Bezeichnung der Masse der Achse $= m_A$, ihrer Schwerpunkthöhe über der XY-Ebene $= \zeta_A$, ebenso der Masse der Glocke $= m_G$, ihrer Schwerpunkthöhe über der Hilfsebene $= \zeta_G^0$ erfordert:

12 b
$$(M+m')\,\zeta = (m_A\zeta_A + m_G\zeta_G^0) + 9\,m\zeta_S^0 + (9\,m + m_G)\,h + m'h'.$$

Schliesslich ζ^0, welches in (11) vorkommt:

12 c
$$M\zeta^0 = (m_A\zeta_A + m_G\zeta_G^0) + 9\,m\zeta_S^0 - m_A h$$

(12 b) darf auch geschrieben werden:

12 d
$$(M+m')\,\zeta = M(\zeta^0 + h) + m'h'$$

(direkt oder aus 12 b, c vermöge $M = 9\,m + m_A + m_G$).

Diskussion der Formeln.

3. *Diskussion der gefundenen Formeln.* Wir beschränken uns auf die folgenden Bemerkungen. Ohne den mechanischen Charakter des Kreisels hinsichtlich der p. 6 aufgeführten Eigenschaften zu verändern, können wir die Extremitäten und das Uebergewicht je durch materielle Punkte in ihren Schwerpunkten ersetzt denken, diesen mit der Masse m', jene mit m, wenn die äquatorialen Trägheitsmomente der Achse in der XY-Ebene um

$$3\{2\,A_s + C_s + 0{,}5\,mR_0^2\} + U_0,$$

das axiale um

$$3\{2\,A_s + C_s + mR_0^2\} + U_0'$$

vergrössert werden (8, 11), sodass ihre Masse und die Lage ihres Schwerpunktes dieselben bleiben. Das vorgestellte System und der Maxwell'sche Kreisel besitzen daher dasselbe T-E und koincidente Schwerpunkte.

Gestalt und Lage des T-E und Richtung der S-A hängen von denselben 11 Grössen (nämlich $6\,R_i$, $3\,Z_k^0$, h, h') ab, welche die Anordnung der 11 beweglichen Konstruktionsteile des Instruments bestimmen. Die Dimensionen aller Bestandteile geben natürliche Grenzen für diese 11 Grössen, welche wieder die 6 Trägheitsgrössen A bis F (11), die 3 Koordinaten ξ, η, ζ (12 a, b) beschränken, d. h. die Deformationen und Drehungen des T-E, die Verlagerungen des Schwerpunktes.

Sehen wir die 9 Gleichungen (11, 12 a, b) als ebensoviel Relationen zwischen den 9 Grössen $A \ldots F$, ξ, η, ζ einerseits, den 11 Grössen R_i, Z_k^0, h, h' andererseits an, so beantworten sie uns die beiden Fragen:

A) Welches T-E und welcher Ort des Schwerpunktes gehören zu einer gegebenen Anordnung des Kreisels?

B) (Umkehrung) Wie müssen die Bestandteile des Kreisels angeordnet werden, damit er einen Körper mit gegebenen T-E und gegebenem Ort des Schwerpunktes darstellt?

Die Antwort auf (A) ist immer eindeutig; die Antwort auf (B) ist im allgemeinen vieldeutig und entscheidet zugleich über die Möglichkeit der Forderung, ob nämlich aus gegebenen $A \ldots F$, ξ, η, ζ oder aus gegebenen Beziehungen zwischen ihnen reelle Werte von R_i, Z_k, h, h' innerhalb der erlaubten Grenzen folgen. Für eine mögliche Forderung giebt es sogar unendlich viele Anordnungen, wie wir folgendermassen zeigen können: Man bilde (11, 10, 8) die Differenz

$$B - A = S_b - S_a = mR_{14}^2 - \frac{m}{2}(R_{25}^2 + R_{36}^2), \qquad 13$$

folglich ist $\{2R_{14}^2 - (R_{25}^2 + R_{36}^2)\}$ eine bekannte Grösse, ebenso, da C gegeben ist, $\{R_{14}^2 + (R_{25}^2 + R_{36}^2)\}$, und wegen $F = F^0 = S_f : \{R_{25}^2 - R_{36}^2\}$. Hieraus findet man eindeutige Werte für R_{14}^2, R_{25}^2, R_{36}^2. Alle R_i kommen ausserdem als die 3 Differenzen $R_1 - R_4$, $R_2 - R_5$, $R_3 - R_6$ nur noch in ξ, η vor (12a, 9). Das giebt mit den 3 Gl. (7) 5 Gl. für 6 Unbekannte, ein R_i bleibt willkürlich. Nach (9) können wir z. B. $R_2 - R_5$ und $R_3 - R_6$ durch $R_1 - R_4$ ausdrücken, die dann zusammen mit $R_2^2 + R_5^2 = R_{25}^2$, $R_3^2 + R_6^2 = R_{36}^2$ eindeutige* Werte von R_2, R_5 in R_1, R_4 liefern. Für diese aber ist nur die Gl. $R_1^2 + R_4^2 = R_{14}^2$ vorhanden, also R_1 oder R_4 willkürlich. Ferner (11, 10) ergeben sich aus den Gl.

$$S_a + Mh\eta = D, \quad S_c + Mh\xi = E \qquad 14$$

Z_8^0, Z_9^0 ausgedrückt in Z_7^0, h, aus (12b) ζ_s^0 ausgedrückt in h, h', deshalb (9) Z_7^0 in h, h' und rückwärts Z_8^0, Z_9^0 ebenfalls in h, h'. Wenn in A (11, 10, 8) alle vorkommenden Grössen, welche bekannt oder in h, h' berechnet sind, durch die neuen Werte ersetzt werden, so kommt eine Relation zwischen h und h', vom 2. Grade in beiden, zustande. Damit sind alle Gl. von (11, 12a, b) erschöpft, folglich bleibt auch h oder h' willkürlich. Alle Z_k^0 sind eindeutige Ausdrücke in h, h', von diesen aber ist der eine zweiwertiger Ausdruck im anderen, mithin bekommt ebenso jedes Z_k^0 2 Werte. Es

---

*Nur positive Werte gelten. Typus der Gl.: $\begin{matrix} x^2 + y^2 = s^2 \\ x - y = d \end{matrix}$. Ist x_1, y_1 ein Wurzelpaar, so ist das zweite $x_2 = -y_1$, $y_2 = -x_1$. Sind x_1, $y_1 > 0$, so ist die 2. Lösung ungültig, sind x_1, $y_1 < 0$, so ist die 1. Lösung zu verwerfen. Alle anderen Fälle sind unmöglich.

ist Angelegenheit des besonderen Falles zu entscheiden, wieviele von ihnen eine Anordnung möglich machen.

Wie aus (11) hervorgeht, haben Verschiebungen der Glocke und des Uebergewichts nur Aenderungen der Trägheitsmomente A, B um den gleichen Betrag, keine von C zur Folge (v. p. 6 sub a).

Anmerkung. Durch die Entfernung von Schrauben können wir die Variabilität der Anordnung erhöhen. Diesem Umstand werden die aufgestellten Formeln nicht gerecht ($m = 0$ bedeutet Wegnahme aller 9 Schrauben). Wir hätten sie dafür einrichten können, wenn wir von vornherein etwa $m_i = m\{i\}$, wo $\{i\} = \{^1_0$ ein Diskontinuitätsfaktor, eingeführt hätten, doch werden die Gl. dann ebenso umständlich, als wenn alle m_i der Grösse nach voneinander verschieden wären.

Beispiele.

Beispiele. Ad (A): 1) $h = 0$ (*Nullstellung*). Die Formeln (11) reduziren sich, wie es sein muss, auf (10). Eine Eigentümlichkeit der Nullstellung ist, dass das Zusammenfallen der F-A mit einer H-A allein durch die V-Schrauben bewirkt wird. Die F-A wird H-A, wenn D^0, E^0 zugleich verschwinden, was (10, 8) giebt:

$$Z_9^0 = Z_8^0, \quad 2Z_7^0 = Z_8^0 + Z_9^0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$Z_7^0 = Z_8^0 = Z_9^0;$$

i. e. die V-Schrauben müssen gleich hoch gestellt werden. Diese Eigentümlichkeit teilt die Nullstellung noch mit dem Fall $\xi, \eta = 0$, wo die F-A zugleich die S-A wird. Denn alsdann ist (11) $D = D^0$, $E = E^0$, und es gelten dieselben Folgerungen wie vorher.

2) $R_i = R$, $Z_k^0 = Z^0$ (*Symmetrische Anordnung*). (7) $R_{ik'}^2 = 2R^2$; (8) $S_a = 3\{2A_s + C_s + 0{,}5mR_0^2\} + 3m(Z^{02} + R^2)$, $S_b = S_a$; (9) $\xi_s = \eta_s = 0$, daher (12a) $\xi = \eta = 0$, $D = E = F = 0$; (11) $B = A$, i. e. die symmetrische Anordnung stellt einen symmetrischen Kreisel dar, wie auch eine einfache, geometrische Symmetrie-Betrachtung direkt beweist.

Ad (B): 3) *Der symmetrische Kreisel.* F-A = S-A = H-A C. Also $\xi, \eta = 0$, $D, E = 0$. T-E um die C-Achse symmetrisch, f. alle äquatorialen Trägheitsmomente einander gleich. (1) $\gamma = 0$: $K = A\alpha^2 - 2F\alpha\beta + B\beta^2 = \text{const.}$ für alle α, β ($\alpha^2 + \beta^2 = 1$) nur, wenn $B = A$, $F = 0$. $\xi, \eta = 0$ (12a, 9) giebt:

15 $$R_5 - R_2 = R_3 - R_6 = R_1 - R_4,$$

$D, E = 0$ äquivalent mit $S_d, S_e = 0$ (s. Beisp. 1), oder

16 $$Z_7^0 = Z_8^0 = Z_9^0.$$

(13) $B-A = 0$ und $F = 0$ oder (8) $S = 0$ machen

$$R_{52}^2 = R_{36}^2 = R_{14}^2, \qquad 17$$

wobei R_{52}^2 identisch mit R_{25}^2 ist. Da die R_i absolute Grössen sind, so folgt aus (15, 17) (s. Fussnote p. 13)

$$R_1 = R_3 = R_5, \quad R_2 = R_4 = R_6. \qquad 18$$

(16) und (18) bestimmen die für einen symmetrischen Kreisel allein möglichen Anordnungen. Die V-Schrauben müssen gleich hoch sein, die Schwerpunkte der H-Schrauben mit gerader und ungerader Nummer je ein gleichseitiges Dreieck bilden mit dem Mittelpunkt in 0 und einer nach Fig. 1 erkennbaren Orientierung. Es ist selbstverständlich die „symmetrische" Anordnung (Beisp. 2) als besonderer Fall darin enthalten.

Asymmetrische Kreisel.

Wir richten fernerhin die Aufmerksamkeit besonders auf *den asymmetrischen Kreisel*, dessen Körper im allgemeinen Falle also durch 3 ungleich grosse H-T und eine von den H-A verschiedene S-A charakterisiert ist. Speziell:

4) *Das Hess'sche Pendel**. Etwas weitläufiger. S-A $\perp$ zu einem Kreisschnitt des reciproken T-E. Es sei S-A = F-A, f. (a) $\xi, \eta = 0$. Die beiden durch den Stützpunkt des Kreisels gehenden Kreisschnittebenen schneiden sich in der mittleren Achse des reciproken T-E. Dies ist mit dem T-E selbst ähnlich gelegen, mithin steht die S-A normal zu einer H-A des Körpers. Die Y-Achse möge diese H-A sein, d. h. B ist ein H-T, f. (b) $D, F = 0$. Die Gleichung des T-E in den laufenden Koordinaten X, Y, Z lautet dann:

$$AX^2 - 2EXZ + CZ^2 + BY^2 = M'k^4, \qquad 19$$

$M' = M + m'$ die gesamte Masse, k = Dimensionsfaktor [Länge]. Die anderen beiden H-A des T-E liegen in der XZ-Ebene, gegen die X resp. Z-Achse um den $\measuredangle \varphi$ gedreht, wobei φ aus

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2E}{C-A} \qquad 20$$

zu berechnen ist. In einem neuen Koordinaten-System, welches die H-A des Körpers bilden, lautet die Gleichung des T-E mit den laufenden Koordinaten X', Y', Z':

---

*Eine kurze Erklärung mit ergänzender Litteraturangabe befindet sich in der Monographie von F. Klein und A. Sommerfeld: Ueber die Theorie des Kreisels, Heft II (abgekürzt KS II) p. 378—386.

21
$$A_1 X'^2 + B_1 Y'^2 + C_1 Z'^2 = M' k^4.$$

$B_1 = B$; A_1 und C_1 sind die beiden Wurzelwerte von λ in der quadratischen Gleichung

22
$$(A-\lambda)(C-\lambda) = E^2.$$

Aus (21) fliesst die Gleichung des reciproken T-E:

23
$$\frac{X'^2}{A_1} + \frac{Y'^2}{B_1} + \frac{Z'^2}{C_1} = \frac{1}{M'};$$

$\sqrt{B_1/M'}$ ist die Länge seiner mittleren Halbachse, wir setzen deshalb die Grössenordnung $A_1 > B_1 > C_1$ fest. Wenn ξ', ζ' die laufenden Koordinaten der in die $X'Z'$-Ebene fallenden Normalen zu einer der beiden Kreisschnittscharen des reziproken T-E bedeuten, so ist deren Gleichung

24
$$\xi'^2\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right) = \zeta'^2\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1}\right).$$

Diese Normale soll die S-A sein, also mit der C-Achse zusammenfallen, weshalb $\measuredangle \varphi$ der Gleichung

25
$$\xi' = \zeta' \operatorname{tg} \varphi$$

gehorchen muss. Es besteht aber die Identität $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}$, deren Quadrat nach Substitution des in (20) ausgedrückten Wertes von $\operatorname{tg} 2\varphi$, des durch Elimination von ξ', ζ' aus (24, 25) erhaltenen Wertes von $\operatorname{tg} \varphi$ eine Relation zwischen A, C, E einerseits und A_1, B_1, C_1 andererseits von der Form

26 a
$$\frac{E^2}{(C-A)^2} = \frac{\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1}\right)\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{C_1}\right)}{\left(\frac{2}{B_1} - \frac{1}{A_1} - \frac{1}{C_1}\right)^2}$$

liefert, welche wegen (21—22) nichts Anderes ist als eine Relation zwischen A, B, C, E selber. Wir müssen aber bemerken, dass (26 a) ebenso Bedingung für diejenigen Fälle ist, bei denen die S-A in der Kreisschnittebene liegt; denn $\varphi \mid \varphi + \pi/2$ (gelesen: φ ersetzt durch $\varphi + \pi/2$) ändert die angeführte Identität nicht. Die Beziehung (26 a) lässt sich noch erheblich vereinfachen. Zunächst eine leichte Umformung:

$$\frac{E^2}{(C-A)^2} = -\frac{\left(\frac{A_1 C_1}{B_1} - A_1\right)\left(\frac{A_1 C_1}{B_1} - C_1\right)}{\left(A_1 + C_1 - 2\frac{A_1 C_1}{B_1}\right)^2}; \qquad \textbf{26 b}$$

dann, (22) $A_1 + C_1 = A + C$, $A_1 C_1 = AC - E^2$ berücksichtigend und vorübergehend zur Abkürzung $\frac{A_1 C_1}{B_1} = \frac{AC - E^2}{B} = \mu$, $A - \mu = A'$, $C - \mu = C'$ gesetzt, entwickeln sich aus (26 b) successive die Gleichungen:

$$\frac{E^2}{(C-A)^2} = \frac{E^2 - (A-\mu)(C-\mu)}{(A+C-2\mu)^2}, \quad \frac{E^2}{(C'-A')^2} = \frac{E^2 - A'C'}{(C'+A')^2}, \qquad \textbf{26 c}$$

$$A'C'\{4E^2 + (C'-A')^2\} = 0. \qquad \textbf{26 d}$$

Die letzte lässt nur 3 Auflösungen zu:

$$1)\ E = 0,\ C' = A';\quad 2)\ A' = 0;\quad 3)\ C' = 0.$$

Die erste Auflösung führt zu $C = A$, (22) $C_1 = A_1$ und infolge der festgesetzten Grössenordnung $C_1 = A_1 = B_1$. Das gewöhnliche (21) und das reziproke T-E (23) ist eine Kugel; der Körper ist ein Kugelkreisel, der für eine beliebige Lage der S-A ein Hess'sches Pendel repräsentiert, da jede Ebene sein reziprokes T-E in einem Kreise schneidet. Diese Auflösung ist trivial. Die zweite führt zu $A = \mu = \frac{AC - E^2}{B}$ oder $E^2 = A(C-B)$. Wird $C = B$, f. $E = 0$, (22) $A_1 = A$ und $C_1 = C$, $B_1 = C_1$, so verwandelt sich das reziproke T-E (und das gewöhnliche gleichfalls) in ein symmetrisches Ellipsoid, dessen Rot.-Achse die X-Achse ist; die beiden Kreisschnittebenen durch den Mittelpunkt fallen in der YZ-Ebene zusammen und enthalten die S-A. Der Kontinuität nach dürfen wir auch für $C \neq B$ schliessen, dass die an (26 a) angeknüpfte Bemerkung hier zutrifft. Die zweite Lösung giebt also kein Hess'sches Pendel. Dagegen die dritte. Sie führt zu $C = \mu = \frac{AC - E^2}{B}$ oder (c) $E^2 = C(A-B)$; in Worten: Das Trägheitsprodukt E muss gleich sein dem geometrischen Mittel aus dem Trägheitsmoment C und der Differenz der beiden übrigen $A-B$. Denn falls hier $A = B$, f. $E = 0$ wird, kehren wir zu den Bedingungen des symmetrischen Kreisels (Beisp. 3) zurück, und dieser vermag wegen der Koinzidenz der S-A mit der Rotationsachse von selbst das Hess'sche Pendel zu repräsentieren. Unter den gemachten Festsetzungen sind

27 (a) $\xi = \eta_1 = 0$, (b) $D = F = 0$, (c) $E^2 = C(A-B)$

die notwendigen und ausreichenden Bedingungen, denen die Massenverteilung des Maxwell'schen Kreisels hier unterliegt. Für eine reelle Beziehung (c) zwischen A, B, C, E muss $A > B$ sein. Diese Ungleichung genügt zugleich für den (hier unterdrückten, aber leichten) Beweis, dass die $A_1 B_1 C_1$ als reelle Grössen der Festsetzung $A_1 > B_1 > C_1$ gehorchen.

Einfluss der Bedingungsgleichungen (27) auf die Anordnung: (14, 27a, b) $D = S_d = 0$, $F = S_f = 0$, f.

28a (10, 8) $Z_2^0 = Z_5^0 = Z^0$, $R_{25}^2 = R_{36}^2 = \overline{R}^2$.

28b (12a, 9, 27a) $R_2 - R_5 = R_6 - R_3 = R_1 - R_4$ (vgl. 15), daher

29 $R_2 = R_6$, $R_3 = R_5$.

Ferner (13): $A - B = m(\overline{R}^2 - R_{14}^2)$, wegen $A > B$

30 $\overline{R}^2 > R_{14}^2$ oder $R_1^2 + R_5^2 = R_6^2 + R_3^2 > R_1^2 + R_4^2$;

(11, 10, 8): $C = A_0' + G' + U_0' + 3\{2A_4 + C_4 + 0{,}5\, m R_0^2\} + m\{\overline{R}^2 + R_{14}^2\}$.

31 $A_0' + G' + U_0' + 3\{2A_4 + C_4 + 0{,}5\, m R_0^2\} = m P_0^2$ gesetzt, wird

$C = m\{P_0^2 + 2\overline{R}^2 + R_{14}^2\}$; wegen $\xi = 0$, $E = E^0 = (10,8)\, m R_0 (Z_7^0 - Z^0)$.

Wegen (27c) kommt daraus:

32 $$R_0^2 (Z_7^0 - Z^0)^2 = (\overline{R}^2 - R_{14}^2)(P_0^2 + 2\overline{R}^2 + R_{14}^2).$$

(28—32) machen die Vorschrift aus, nach welcher wir aus dem Kreisel ein Hess'sches Pendel herstellen. Sie lautet:

Die H-Schrauben je Nr. 2, 6 und Nr. 3, 5 sind gleich weit herauszudrehen, Nr. 1 und 4 so, dass die Differenz ihrer Schwerpunkt-Abstände von der F-A gleich der von 2 und 5 oder (was dasselbe ist) 3 und 6, die Quadratsumme jener Abstände kleiner ist, als die von 2 und 5 oder (was dasselbe ist) 3 und 6; von den V-Schrauben müssen Nr. 8 und 9 gleich hoch stehen, während 7 so gestellt werden muss, wie es durch Rechnung aus (32) hervorgeht.

Am einfachsten ist es, $R_1 = R_3 = R_5 = R_6$ und darum notwendig (28b) $R_1 = R_4$ zu machen, die V-Schrauben Nr. 1 und 4 müssen dann wegen (30) weiter nach innen gerückt sein als die übrigen. Die Bestimmung von Z_7^0 erfordert im Allgemeinen die Kenntnis der konstanten Grösse P_0 (31), hängt hingegen nicht von der Stellung der Glocke und des Uebergewichts ab. Der Doppelwert von Z_7^0 entspricht der zweifachen Kreisschnittschar des reci-

proken T-E, indem die S-A Senkrechte der einen oder der anderen werden kann. Die Differenz $(\overline{R}^2 - R_{14}^2)$ kann immer so klein gewählt werden, dass Z_1° im erlaubten Gebiet bleibt.

Es ist nützlich, die allgemeine Massenverteilung des asymmetrischen Kreisels noch nach zwei Richtungen hin zu specialisieren, Massenverteilungen, die einen gewissen Grad der Verwandtschaft mit dem symmetrischen Kreisel zeigen: Kreisel mit dreiachsigem T-E, deren eine H-A mit der S-A zusammenfällt (*Typus I*), und Kreisel mit symmetrischem T-E, deren S-A von der Symmetrielinie des T-E verschieden ist (*Typus II*)*. Bei jenen wird man die Achse mit der doppelten Bedeutung, bei diesen entweder die Rotationsachse des T-E oder die S-A in die F-A des Instruments hineinlegen.

5) *Typus I.* $\xi, \eta_1 = 0$, $D, E = 0$. Der Schnitt der Aequatorebene mit dem T-E ist dann schon die Ellipse, deren Achsen Richtung und Grösse der übrigen beiden H-A angeben. Wir orientieren sie gleich so, dass die grosse Achse in die X-, mithin die kleine in die Y-Achse fällt. Dementsprechend sind $F = 0$, A, B, C die H-T, $B > A$. Wie in Beisp. 3 (15, 16) folgt

$$R_5 - R_3 = R_3 - R_6 = R_1 - R_4, \quad Z_7^\circ = Z_8^\circ = Z_9^\circ,$$

weil F verschwindet: $R_{58}^2 = R_{36}^2 = \overline{R}^2$, (13)

$$B - A = m(R_{14}^2 - \overline{R}^2), \quad R_{14}^2 > \overline{R}^2. \qquad 33$$

Aus der ersten und dritten der dreigliedrigen Gleichungen ergiebt sich: $R_5 = R_3$, $R_6 = R_1$.

Am einfachsten ist die folgende Anordnung: Alle V-Schrauben gleich hoch, die H-Schrauben Nr. 2, 3, 5, 6 in gleichem Abstand von der F-A, Nr. 1 und 4 ebenfalls gleichweit von der F-A entfernt, aber mehr nach aussen gerückt als die übrigen.

Es leuchtet auch unmittelbar ein, dass die beschriebene Konfiguration der Schrauben die Asymmetrie des Typus I erzeugt.

6) *Typus II.* a) F-A = H-A, C = axiales H-T, f. $D, E = 0$. Damit alle äquatorialen Trägheitsmomente einander gleich werden, muss sein: $F = 0$, $B = A$. In welcher Meridianebene des T-E die S-A liegt, ist gleichgültig, sei somit $\eta_1 = 0$ (aber $\xi \neq 0$). (14, 8) $D = S_4 = 0$ macht $Z_2^\circ = Z_8^\circ = Z^\circ$, $E = 0$ $Z^\circ - Z_7^\circ =$ 34

$\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{M}{m} h\xi$. Durch $\eta_1 = 0$ zusammen mit $F = 0$ kommt $R_8 = R_2$, 35

$R_9 = R_4$, durch $B - A = 0$ (33) $\overline{R}^2 = R_{14}^2$, und endlich, indem 36

* Das Hess'sche Pendel gehört keinem der beiden Typen an.

wir die erste Gleichung von (9, 12) hinzufügen:

37
$$\begin{cases} R_1^2+R_4^2 = R_2^2+R_3^2 \\ R_1-R_4 = 9\xi_2-(R_2-R_3), \text{ wo } 9\xi_2 = \dfrac{M'}{m}\xi. \end{cases}$$

(34—37) zeigen vollständig an, wie die Kreiselschrauben für Typus IIa anzuordnen sind. Gegeben seien ξ, ζ, damit die Neigung der S-A gegen die F-A, und h; werden die V-Schrauben Nr. 8, 9 gleich hoch gestellt, so folgt die Höhendifferenz der dritten V-Schraube gegen sie aus (35); die H-Schrauben Nr. 2 und 5 dürfen noch eine willkürliche Stellung haben, doch mit der Einschränkung, dass der zwischen $R_{2,3}$ und $R_{1,4}$ bestehende Zusammenhang (37) durch reelle Werte geleistet wird, dann aber sind die Stellungen von Nr. 3, 6 durch (36), von Nr. 1, 4 durch (37) bestimmt.

b) (Andeutung) F-A = S-A, f. (a) $\xi, \gamma_1 = 0$. Das axiale H-T möge in der XZ-Ebene liegen, also schneidet die äquatoriale Hauptebene den XY-Plan in der Y-Achse und B ist die Grösse des äquatorialen H-T. Analytisch (v. ex. 4): (b) $D, F = 0$; B ist eine Wurzel der quadratischen Gleichung (22), f. (c) $E^2 = (A-B)(C-B)$. Den Bedingungen (a, b, c) sind wie vorher die Formeln des Maxwell'schen Kreisels anzupassen, woraus wir die Anordnungen für Typus IIb gewinnen.

Fordern wir in Beisp. 6a) überdies noch $\zeta = 0$ (12b), $2C = A$ oder in b) $C = B = 2A$ (f. $E = 0$) — die S-A begiebt sich in die äquatoriale Hauptebene —, so gelangen wir zu dem *Fall der Frau Kowalevski**. Freilich machen es erst die besonderen Masse des Modells aus, ob es diese Bedingungen erfüllen kann. Jedenfalls aber können wir immer Modelle konstruieren, die imstande sind, den Kowalevski'schen Kreisel zu vertreten.

Vorzüglich werden wir später das Gewicht auf den Umstand legen, dass die Asymmetrie der beiden Typen, d. h. im 1. Falle die Differenz der äquatorialen H-T, im 2. Falle die Neigung der S-A gegen die ausgezeichnete H-A, willkürlich verkleinert werden kann, dass wir also dem symmetrischen Kreisel beliebig nahe benachbarte Körper herstellen können. Beim Typus I einfachster Anordnung geschieht dies durch Einrücken der Diametralschrauben Nr. 1, 4 bis im Grenzfalle ihre Schwerpunkte mit denen der übrigen H-Schrauben einen Kreis bilden mit dem Centrum in der F-A, beim Typus II durch Verminderung der Höhendifferenz

---

*Acta Mathematica Bd. 12 (1888); KS II p. 376.

der V-Schraube Nr. 7 gegen die übrigen, welcher gleichzeitig von einer Verrückung der H-Schraube Nr. 1, im Grenzfalle bis in die Distanz der Nr. 3, 5, der H-Schraube Nr. 4 bis in die Distanz der Nr. 2, 6 gefolgt wird.

Mit dem Typus I werden wir uns fortan ausführlich beschäftigen.

II.

Typus I. Differentialgleichungen und besondere Formen der Bewegung.

Voraussetzungen des Problems. Vorbemerkung.

Dieser und die folgenden Abschnitte sollen von der Bewegung derjenigen besonderen Form des schweren asymmetrischen Kreisels handeln, welche in dem ersten Abschnitte Typus I genannt worden ist und durch eine einfache Anordnung des Maxwell'schen Instrumentes vertreten wird. Nach dem gewöhnlichen Vorgang der theoretischen Mechanik wollen wir von den bei der natürlichen Bewegung des Kreisels wirksamen Kräften alle seine Energie verzehrenden (dissipativen) ignorieren und von den seine Energie erhaltenden (konservativen) Kräften nur die Schwere zur Betrachtung zulassen. Die spezielle Wahl des Typus I rechtfertigt sich durch den Wunsch, die Vorstellung zu fixieren und mit Hilfe des einfachen Beispiels Ueberlegungen zu entwickeln, welche mutatis mutandis auch für den anderen Typus oder für den allgemeinen Fall gültig sind.

Während dieser Abschnitt der Herleitung der Differentialgleichungen der Bewegung aus mechanischen Prinzipien vermittelst des Impulsbegriffes gewidmet ist, und diejenigen äusserst einfachen, aber theoretisch wichtigen Bewegungsformen erörtert werden, welche vermöge des geometrischen Zusammenhanges zwischen den Richtungen des Vektors der instantanen Winkelgeschwindigkeit und des Impulses durch ein besonderes Verhalten beider Vektoren ausgezeichnet sind, sollen in den folgenden Abschnitten Näherungsformeln der wichtigeren Bewegungen entwickelt werden, z. T. unter der Annahme, dass die Asymmetrie des Kreisels beliebig klein sei*, damit die angenäherte Darstellung hinreichend

* Ueber die Bedeutung dieses Gedankens vgl. eine Schlussbemerkung zum Exkurs über den asymmetrischen Kreisel im Kap. V der Kreisel-Monographie, KS II p. 390.

genau werde. Hingegen bleiben die Betrachtungen des gegenwärtigen Kapitels von dieser Beschränkung frei und erfreuen sich innerhalb der gemachten Voraussetzungen mathematisch vollkommener Strenge.

oordinaten. eziehungen wischen den oordinaten er Lage, der eschwindig- eit und des Impulses.

Wir setzen zunächst die Bezeichnungen fest und stellen einige oft gebrauchte Formeln zusammen, indem wir uns hinsichtlich weitläufigerer Auseinandersetzungen und der Beweise der hingestellten Sätze bequem auf die Monographie der Herren Geheimrat KLEIN und Professor SOMMERFELD berufen.

Wir gebrauchen, wie üblich, zwei rechtwinklige Haupt-Koordinatensysteme mit dem Ursprung im Stützpunkt: xyz mit der Erde, XYZ mit dem Kreisel starr verbunden; in jenem ist die Linie der positiven z der Richtung der Schwerkraft entgegengesetzt, die xz-Ebene, eine an sich willkürliche Vertikalebene, mag mit der Medianebene des Bügels (= Ebene durch die Achsenlinien seiner beiden Säulen) identisch sein, dieses fällt mit dem Kreuz der H-A des Kreisels zusammen, die Linie der Z mit der F-A, die Linie der X mit der A-Achse, die Linie der Y mit der B-Achse, so dass alles mit dem Beispiel 5 des ersten Abschnittes übereinstimmt, auch die Festsetzung $B > A$. Alle überhaupt vorkommenden rechtwinkligen Koordinatensysteme sollen „Hopfensysteme“ sein, womit zugleich die als positiv geltenden Drehrichtungen festgestellt sind. Die EULER'schen Winkel ϑ, ψ, φ bestimmen die Lage des Koordinatensystems XYZ gegen xyz, und zwar, wie in Fig. 2 dargestellt ist:

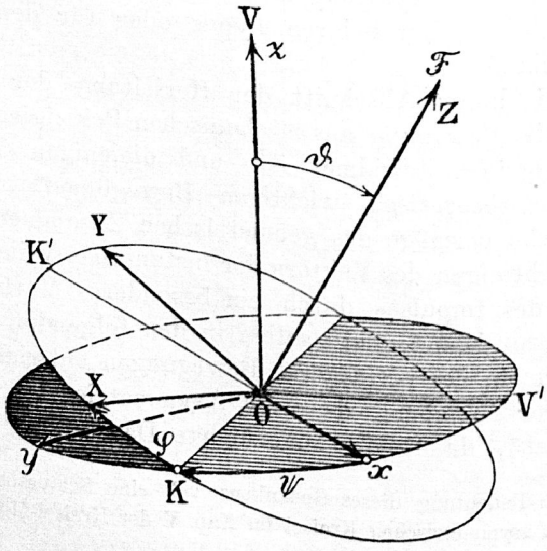


Fig. 2.

$$\begin{cases} \vartheta = \sphericalangle Z, z \\ \psi = \sphericalangle \mathrm{K}, x \\ \varphi = \sphericalangle X, \mathrm{K} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \mathrm{OK} &= \text{Knotenlinie} \\ \mathrm{OV} &= \text{Vertikale} \\ \mathrm{OF} &= \text{Figurenachse.} \end{aligned} \qquad 38$$

(KS I p. 17, 18).

Diese 3 Winkel schneiden auf der um O als Mittelpunkt beschriebenen Einheitskugel Bogen aus, von welchen, wenn wir die Kugel mit der Himmelskugel, die xz-Ebene mit der Meridianebene, den Durchstosspunkt der Vertikalen mit dem Zenith, den der F-A mit einem Stern vergleichen, ϑ der Zenithdistanz, ψ dem Stundenwinkel des Gestirns entspricht. ϑ, ψ, φ repräsentieren als von einander unabhängige Koordinaten die 3 Freiheitsgrade des Kreisels; wir können ϑ und ψ die Koordinaten der F-A, φ die Koordinate der Drehung des Kreisels um die F-A nennen. Die Linie, welche der „Stern“ auf der Einheitskugel beschreibt, werde reduzierte Bahnkurve der Kreiselspitze genannt, ϑ und ψ sind dann zugleich ihre laufenden sphärischen Koordinaten.

Die Ableitungen nach der Zeit t sollen nach Lagrange durch Accente, Vektoren durch deutsche Buchstaben bezeichnet werden.

Die Komponenten des *Vektors der instantanen Winkelgeschwindigkeit* (kurz: des *Drehvektors*) $\mathfrak{W}$ nach der Knotenlinie, Vertikale und F-A sind resp. ϑ', ψ', φ' und heissen die (Euler'schen) Geschwindigkeitskoordinaten, die senkrechten Projektionen von $\mathfrak{W}$ auf die H-A A, B, C seien resp. p, q, r und heissen die Komponenten der momentanen Winkelgeschwindigkeit des Kreisels in Richtung der H-A (kurz: die Drehkomponenten). Gelegentlich soll r die axiale, die Resultante von p und q die äquatoriale Drehkomponente genannt werden.

Wenn zur Abkürzung $\sin\vartheta = s$, $\cos\vartheta = u$ gesetzt wird, so drückt sich der Zusammenhang zwischen den Drehkomponenten und Geschwindigkeitskoordinaten folgendermassen aus: 39

$$p + iq = e^{-i\varphi}(\vartheta' + i\psi' s) \quad \text{oder} \qquad 40\,\mathrm{a}$$

$$\begin{cases} p = \vartheta' \cos\varphi + \psi' s \sin\varphi \\ q = -\vartheta' \sin\varphi + \psi' s \cos\varphi, \quad \text{und} \\ r = \varphi' + \psi' u. \quad \text{(KS I p. 44/45).} \end{cases} \qquad 40\,\mathrm{b}$$

Die senkrechten Projektionen des *Impulsvektors* $\mathfrak{J}$ ($|\mathfrak{J}| = J$) auf die Knotenlinie, Vertikale und F-A seien resp. E, n, N und heissen die (Euler'schen) Impulskoordinaten; die senkrechten Projektionen auf die A-, B-Achse seien resp. L, M, diejenige auf die C-Achse ist N. L, M, N heissen die Impulskomponenten in Rich-

tung der H-A, gelegentlich N die axiale, die Resultante von L und M die äquatoriale Impulskomponente. Ihr Zusammenhang mit den Drehkomponenten p, q, r:

41
$$L = Ap, \quad M = Bq, \quad N = Cr.$$

Wir erkennen an der Fig. 2 noch zwei rechtwinklige Neben-Koordinatensysteme, deren wir fernerhin noch bedürfen: Wenn nämlich OV′ Schnitt der Vertikalebene durch OV und OF mit der xy-Ebene, OK′ mit der XY-Ebene ist, das erste aus den Achsen OF, OK, OK′, das zweite aus den Achsen OV, OV′, OK gebildet. Die senkrechte Projektion von $\mathfrak{J}$ auf OK′ sei F, auf OV′ sei m; $\mathfrak{J}$ nach den Achsen des ersten Systems zerlegt in die Komponenten N, E, F bezw., nach den Achsen des zweiten Systemes in n, m, E bezw. Aus geometrischen Gründen ergeben sich alsdann zwischen den 7 eingeführten Impulsgrössen die folgenden Relationen:

42
43
$$E + iF = e^{-i\varphi}(L + iM)$$

44
$$n = Nu + Fs$$
$$N = nu + ms;$$

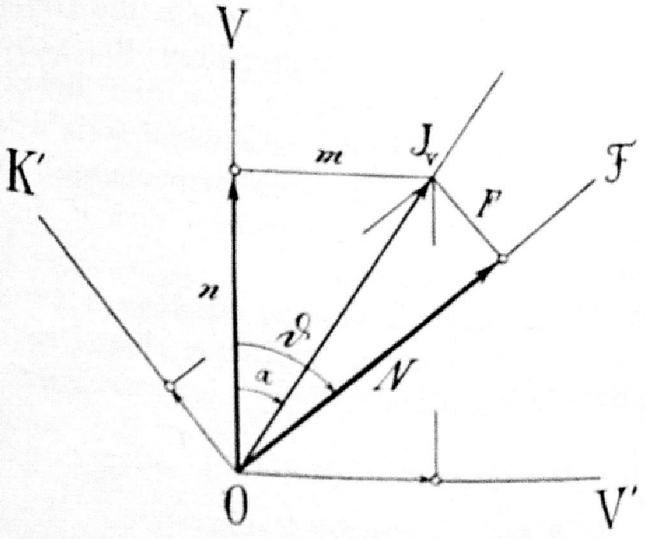


Fig. 3.

die beiden letzten leicht mit Hilfe der Fig. 3, welche die Ebene durch die Vertikale und F-A mit OJ_v als senkrechte Projektion des Impulsvektors auf sie darstellt.

Sätze über den Impulsvektor.

Der Impuls des Kreisels und alle ihn von aussen treffenden Stosskräfte sind vermöge seiner Verbindung mit dem festen Punkt Drehstösse (KS I p. 88 und 93). Nennen wir den Vektor des

einem System von Stosskräften, welches den Kreisel in irgend einem Zeitpunkt trifft, gleichwertigen Drehstosses $\mathfrak{S}$, dann gilt der *Satz*:

$$\Delta\mathfrak{J} = \mathfrak{S}, \tag{45a}$$

in Worten: Der durch den äusseren Drehstoss $\mathfrak{S}$ veränderte Impuls $\mathfrak{J}+\Delta\mathfrak{J}$ ist gleich der Resultante des Impulses $\mathfrak{J}$ vor dem Stoss und des Drehstosses $\mathfrak{S}$, gleich $\mathfrak{J}+\mathfrak{S}$.

Rührt der äussere Drehstoss von kontinuirlichen Kräften her, so wird $\mathfrak{S}$ der infinitesimale Drehstoss $\mathfrak{K}dt$, wo $\mathfrak{K}$ den Vektor der Drehkraft bedeutet, welche den äusseren Kräften äquivalent ist, und die Aenderung des Impulses das Differential $d\mathfrak{J}$; weil dann die Gleichung (45a) für den ganzen Zeitraum der Wirkung der äusseren Kräfte gelten muss, verwandelt sie sich in die Differentialgleichung:

$$\mathfrak{J}' = \mathfrak{K} \quad \text{(vgl. KS I p. 115):} \tag{45b}$$

Die Aenderungsgeschwindigkeit des Impulses ist (vektoriell) gleich der äusseren Drehkraft. Die Aussagen (45a, b) beziehen sich auf ein im Raume festes Koordinatensystem. Wünschen wir die Aenderungen des Impulses, insbesondere seine Aenderungsgeschwindigkeit als Folge äusserer, stetiger Kräfte, relativ zu einem irgendwie stetig bewegten, rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Ursprung im festen Punkt des Kreisels zu kennen, so ist zum Vektor $\mathfrak{K}$ noch ein Vektor $\mathfrak{C}$ zu addieren, der das Vektorprodukt aus dem vorhandenen Impuls $\mathfrak{J}$ und dem Drehvektor $\mathfrak{D}$ des bewegten Koordinatensystems ist, in Zeichen:

$$\mathfrak{J}' = \mathfrak{C}+\mathfrak{K}, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{J} \times \mathfrak{D}^*; \quad \text{(vgl. KS I p. 141**)} \tag{46a}$$

wohlverstanden: Die Zerlegung in Komponenten hat nach den Achsen des bewegten Koordinatensystems stattzufinden. Also z. B. $\mathfrak{C}$. Die Komponenten von $\mathfrak{J}$ seien $J_1 J_2 J_3$, die von $\mathfrak{D}$ $\omega_1 \omega_2 \omega_3$ in Richtung der bewegten Koord.-Achsen, dann sind die Komponenten von $\mathfrak{C}$:

$$\left\{\begin{aligned} C_1 &= J_2\omega_3 - J_3\omega_2 \\ C_2 &= J_3\omega_1 - J_1\omega_3 \\ C_3 &= J_1\omega_2 - J_2\omega_1. \end{aligned}\right. \tag{46b}$$

---

*Nach dem Vorgang von Gibbs. Vektorielles oder äusseres Produkt der Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, Skalares oder inneres Produkt $= \mathfrak{A} . \mathfrak{B}$.

**Siehe auch Routh, Rigid Dynamics. Advanced Part Art. 19.

Anwendung dieser Sätze.

Die äussere Drehkraft $\mathfrak{K}$ ist hier allein der Vektor des Drehmoments der Schwere und, weil der Schwerpunkt auf der F-A liegt, beständig in der Knotenlinie gelegen. Mit G das Gewicht des Kreisels, mit l die längs der F-A von O aus gemessene, nach oben positive und nach unten negative Abscisse seines Schwerpunktes bezeichnet, wird

47 $$\mathfrak{K} = Gls = Ps, \quad \mathfrak{K} \begin{cases} > 0 \text{ Vektor nach K zielend} \\ < 0 \text{ Vektor von K abgewandt;} \end{cases}$$

mithin bedeutet P das grösste Drehmoment der Schwere, welches der Kreisel bei horizontaler Lage der F-A ($s = 1$) wirklich besitzt.

Differentialgleichungen der Bewegung.

Wir sind nunmehr imstande, die Differentialgleichungen der Bewegung sofort hinzuschreiben. Koordinatensystem: KK′F (p. 24). Komponenten von $\mathfrak{Z}$ nach OK: E, OK′: F, OF: N, von $\mathfrak{D}$ bez.: ϑ', $\psi's$, $\psi'u$; von $\mathfrak{K}$ bez.: Ps, 0, 0. Folglich (46 a b):

48 $$\left\{ \begin{aligned} E' &= F\psi'u - N\psi's + Ps \\ F' &= N\vartheta' - E\psi'u \\ N' &= E\psi's - F\vartheta'. \end{aligned} \right. \qquad \text{(I)}$$

Dies System von drei simultanen Gleichungen ist vollständig; denn sie sind unabhängig voneinander, und ihre Anzahl stimmt mit der Zahl der Freiheitsgrade des Kreisels überein. Sie bestimmen die Bewegung zusammen mit gegebener Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit eindeutig; denn es sind, weil wir die darin vorkommenden Impulsgrössen E, F, N nach (42, 41, 40 b) durch die Euler'schen Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten und durch die Trägheitskonstanten des Kreisels ausdrücken können, drei simultane Differentialgleichungen 2. Ordnung für ϑ, ψ, φ.

Andere Gleichungssysteme, welche wir für den folgenden Gebrauch noch aufstellen müssen, sind daher entweder nur andere Gestalten von (48) oder (teilweise oder ganz) durch deren Integrale ersetzt. Die Elimination von E aus der 2. und 3. Gleichung von (48) liefert sogleich ein erstes Integral:

49 $$Nu + Fs = \text{const } (44) = n.$$

Die 1. und 3. Gl. (48) zusammen mit (49) sind identisch mit Lagrange's Gleichungen der zweiten Form, in dem speziellen Problem angewandt auf die Koordinaten ϑ, ψ, φ; denn E, n, N sind die entsprechend zugehörigen Impulskoordinaten.

Mit Hilfe von (49) F aus der 1. und 3. Gl. (48) entfernt:

$$sE' = \psi'(nu - N) + Ps^2$$
$$sN' = E\psi' s^2 - (n - uN)\vartheta'.$$

Hierin werde die Impulskomponente m eingeführt, (44) $m = \frac{N - nu}{s}$,

wodurch wir die erheblich einfacheren Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} E' = Ps - \psi' m \\ m' = E\psi' \end{array} \right. \qquad \text{(II)} \qquad 50$$

gewinnen, welche zusammen mit (44) ein vollständiges System darstellen.

(50) aber auch direkt durch Beziehung des Impulssatzes (46 a b) auf das Koordinatensystem V'KV (p. 24). Komponenten von $\mathfrak{S}$ nach OV': m, OK: E, OV: n; von $\mathfrak{D}$ bez.: ψ', 0, 0; von $\mathfrak{K}$ wieder bez.: Ps, 0, 0. Ausser den Gl. (50) kommt dann noch $n' = 0$, also übereinstimmend mit (49).

Mit Rücksicht auf die Entwicklungen des nächsten Abschnittes wollen wir den positiven Unterschied zwischen B und A in Bruchteilen von A ausdrücken und ε nennen, also:

$$B - A = \varepsilon A \quad \text{oder} \quad B = A(1 + \varepsilon) \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \frac{B - A}{A}. \qquad 51$$

ε ist eine unbenannte, absolute Zahl und möge die äquatoriale Ellipliptizität der Massenverteilung des Kreisels oder kurz seine Ellitizität* heissen. Für die folgenden Rechnungen ist es bequem, alle Trägheits-, Impuls- und Kraftgrössen auf A als Einheit zu beziehen und demzufolge zu setzen:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \text{Konstanten:} & \frac{C}{A} = c_0 & \frac{1}{c_0} = a_0 & \frac{n}{A} = n_0 & \frac{P}{A} = p_0 \\ \text{Veränderliche:} & \frac{E}{A} = e & \frac{F}{A} = f & \frac{N}{A} = w & \frac{m}{A} = \overline{m}. \end{array} \right. \qquad 52$$

Anmerkung: Zur Prüfung der Formeln hinsichtlich der Dimensionen merke man sich, dass durch diese Festsetzung die Trägheitskonstanten unbenannt werden, die Impulse den Charakter von Winkelgeschwindigkeiten, die Drehkräfte den Charakter von Winkelbeschleunigungen bekommen. Symbolisch:

$$[\text{Impuls}] = t^{-1}, \quad [\text{Drehkraft}] = t^{-2}. \qquad 53$$

Mit den neuen Bezeichnungen (52) lauten:

---

*KS III p. 600. $\varepsilon = \square$ der numerischen Excentrizität der äquatorialen Trägheitsellipse.

54
$$\left\{\begin{array}{ll} (43)\quad n_0 = wu+fs & (50)\quad c' = p_0 s - \psi'\overline{m} \\ (44)\quad w = n_0 u+\overline{m}s & \overline{m}' = e\psi', \end{array}\right.$$

und die Impulsgrössen e, f werden (42, 41):

55
$$e = \vartheta' - \varepsilon q \sin\varphi \qquad f = \psi' s + \varepsilon q \cos\varphi.$$

Dynamische Eigenschaften der Bewegung.

Die folgenden drei dynamischen Eigenschaften, von welchen die beiden ersten auch dem allgemeinen Kreisel zukommen, führen ebenfalls zu einem vollständigen System von Differentialgleichungen, von denen aber zwei hinsichtlich der ϑ, ψ, φ von der ersten Ordnung sind und nur die dritte von der zweiten. Die ersten beiden müssen also zwei erste Integralgleichungen sein und 2 von den 6 willkürlichen Konstanten besitzen, welche die vollständig integrierten Bewegungsgleichungen des Problems enthalten.

1. Satz. Der Endpunkt des Impulsvektors verharrt während der Bewegung in derselben Horizontalebene. (KS II p. 375).

Denn nach (45 b) ist die Aenderungsgeschwindigkeit des Impulsvektors wie der Kraftvektor $\mathfrak{R}$ beständig horizontal gerichtet, welches mit der Behauptung identisch ist. Mithin ist die senkrechte Projektion von $\mathfrak{Z}$ auf die Vertikale konstant, nämlich gleich der Höhe der den Vektor der Aenderungsgeschwindigkeit enthaltenden Horizontalebene über dem Stützpunkt. Die Konstante ist gleich n (Fig. 3 und Nr. 49).

Da n die zu ψ gehörende Impulskoordinate ist, so ist ψ cyklische Koordinate des Kreisels, und weil ψ die einzige ist, so gehört der asymmetrische Kreisel zu den monocyklischen Systemen der Mechanik. Diese Eigentümlichkeit hat zwei wichtige Umstände zur Folge:

1) Die Koordinate ψ kann überhaupt ignoriert* werden;

2) es existiert eine sogenannte stationäre Bewegung.

2. Satz. Die Gesamtenergie des Kreisels ist während der Bewegung konstant.

Nach den Voraussetzungen des Problems ist der Kreisel ein abgeschlossenes (d. h. ohne Bedingungsgleichungen, welche die Zeit explicite enthalten) und konservatives System, womit diejenigen Merkmale vorhanden sind, unter welchen das Prinzip der Erhaltung der Energie gilt. Die konstante Gesamtenergie sei h ($h/A = h_0$).

n und h sind die beiden angekündigten willkürlichen Integrationskonstanten.

---

*Thomson & Tait, Treatise on Natural Philosophy I (1903) Art. 319, von p. 320 ab.

3. Satz. Die Aenderungsgeschwindigkeit der axialen Impulskomponente ist von der Schwere unabhängig und gleich dem Flächeninhalt des aus der äquatorialen Impuls- und Drehkomponente gebildeten Parallelogramms, ausgedrückt in den Massen dieser Vektoren. Der Winkel zwischen beiden ist immer von der Impulskomponente aus zu rechnen und sein Vorzeichen bestimmt das Vorzeichen des Flächeninhalts.

Wir brauchen nur den Impulssatz (46a) auf das aus den H-A des Kreisels gebildete Koordinatensystem (XYZ) anzuwenden und bei der Zerlegung die Komponente des Impulsvektors nach der F-A zu betrachten, um die Behauptung einzusehen. Denn erstens steht die Knotenlinie zur F-A immer senkrecht, und deshalb hat der Drehvektor der Schwere keine Komponente nach dieser Achse, zweitens ist der fernere Inhalt der Behauptung nichts weiter als eine geometrische Interpretation des für die Aenderungsgeschwindigkeit der axialen Impulskomponente hergestellten Ausdruckes.

Aus diesen 3 Sätzen können die drei Differentialgleichungen der Bewegung leicht konstruiert werden. Kinetische Energie $T =$ halbes Skalarprodukt aus Impuls- und Drehvektor (KS I p. 96) $= \frac{1}{2}\mathfrak{J}.\mathfrak{W}$, potentielle Energie $U = Pu$, 2. Satz: $T+U = h$. Für den 3. Satz: (46b) $C_3 = N$, $J_1 = L$, $J_2 = M$, $\omega_1 = p$, $\omega_2 = q$. Die 3 Gl. erhalten zunächst die Form:

$$\left\{\begin{array}{l} Nu+Fs = n \\ \frac{1}{2}(Lp+Mq+Nr)+Pu = h \\ N' = Lq-Mp. \end{array}\right. \qquad \text{(III)} \qquad 56$$

Bemerkung. Die erste dieser Gleichungen ist identisch mit (43, 49), die letzte nach (40a, 42) mit der dritten des Gl.-Systems (48). Wenn wir für L, M, N die Werte (41) in p, q, r substituieren, wird sie $Cr' = (A-B)pq$, also die dritte Eulersche Gleichung. 57

Zum Zwecke einiger Umformungen der Gl. (56) setzen wir noch:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon' & \varepsilon' \sin 2\varphi = \gamma \\ n_0 - uw = g \equiv g(u,w) & \varepsilon' \cos 2\varphi = \gamma'. \end{array}\right. \qquad 58$$

Dann folgt aus der ersten Gl. (56): $fs = g$; aus (55, 40b): $fs = \psi' s^2(1+\varepsilon'+\gamma')+u'\gamma$, f. 59

$$\psi' s^2 = \frac{g-u'\gamma}{1+\varepsilon'+\gamma'}. \qquad 60*$$

Ferner:

$$es = -\psi' s^2\gamma - u'(1+\varepsilon'-\gamma') = (60) - \frac{u'(1+\varepsilon)+g\gamma}{1+\varepsilon'+\gamma'}; \qquad 61$$

aus der 2. Gl. (56):

$$Lp+Mq = 2h-2Pu-\frac{N^2}{C} = A\{2h_0-2p_0u-a_0w^2\}$$

zur Abkürzung $= Ak^2$; k reell, weil $Lp+Mq = Ap^2+Bq^2 \geqq 0$. Es ist also

62 $$k^2 \equiv k^2(u,w) = 2h_0-2p_0u-a_0w^2 \geqq 0.$$

Andererseits: $Lp+Mq = E\vartheta'+F\psi's$, folglich

$$\begin{aligned}(Lp+Mq)\frac{s^2}{A} &= -esu'+fs\psi's^2 \quad (59,\ 61)\\ &= u'^2(1+\varepsilon'-\gamma')+\psi's^2(g+u'\gamma) \quad (60)\\ &= \frac{u'^2(1+\varepsilon)+g^2}{1+\varepsilon'+\gamma'}.\end{aligned}$$

Durch Vergleich kommt die bemerkenswerte Gleichung:

*63 $$u'^2(1+\varepsilon)+g^2 = k^2s^2(1+\varepsilon'+\gamma').$$

Die dritte Gl. (56) wird geschrieben: (57)

*64 $$w'+\varepsilon pq = 0.$$

(60, 63, 64) sind die neuen Formen des Gleichungstripels (56).

Für den symmetrischen Kreisel, $\varepsilon = 0$, ergeben: (64) $w =$ const.; (63) $u'^2 = k^2s^2-g^2$, nach der Bedeutung von g, k (58, 62), wegen $s^2 = 1-u^2$ und der Unveränderlichkeit von w eine blosse Funktion von u; (60) $\psi' = \frac{g}{s^2}$ aus denselben Gründen eine blosse Funktion von u. Wir kehren damit, abgesehen von der im Augenblick unberücksichtigten Koordinate φ, nach Restitution der ursprünglichen Bezeichnungen zu denjenigen Quadraturformeln des symmetrischen Kreisels zurück, welche z. B. in KS II p. 223 (8) aufgestellt und seit Lagrange allgemein bekannt sind.

Geometrische Herleitung von drei besonderen Bewegungsformen.

Es ist bekannt, dass zwischen den Richtungen des Impuls- und Drehvektors ein durch die Massenverteilung des bewegten Körpers allein bestimmter, geometrischer Zusammenhang besteht, der sich so ausdrücken lässt:

Der Impulsvektor steht senkrecht zu derjenigen Ebene, welche dem Drehvektor hinsichtlich des mit dem Körper fest verbundenen T-E konjugiert ist*.

Die beiden Vektoren fallen dauernd zusammen, wenn sie beim

---

*KS I p. 102.

Beginn der Bewegung in einer der drei H-A des Ellipsoids lagen und der Kraftvektor der Schwere ihre Richtung nicht ändert, f. in derselben H-A liegt oder dauernd 0 ist. Demzufolge:

1. $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{W}$ liegen in der C-Achse. $\mathfrak{K}$ immer senkrecht zu dieser, also notwendig $\mathfrak{K} = 0$, f. (47) $\vartheta = 0$, d. h. die F-A muss kerzengerade stehen. $\mathfrak{J}, \mathfrak{W} = \text{const}$, $\mathfrak{J} = C\omega$, $\mathfrak{W} = \omega$; $\omega = \text{arb.}^*$ *Diese Bewegung ist eine permanente Rotation um die vertikal gestellte F-A.*

2. $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{W}$ liegen zusammen in der A- oder B-Achse, $\mathfrak{K}$ liegt in ihrer Hauptebene, muss also bez. mit der A- oder B-Achse koincidieren, f. liegen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{W}$ auch in der Knotenlinie. Die Bewegung des Kreisels besteht in einer Drehung um die Knotenlinie, und diese bleibt an Ort und Stelle. $\psi = \text{const}$, $\varphi = 0^\circ$ resp. 90°. $\mathfrak{J} = A\vartheta'$ resp. $B\vartheta'$. Impulssatz (45 b) $\mathfrak{J}' = \mathfrak{K}$:

$$A\vartheta'' = Ps \quad \text{resp.} \quad B\vartheta'' = Ps. \qquad 65$$

Der Kreisel schwingt in beiden Fällen wie ein ebenes Pendel.

Man vergegenwärtige sich z. B. das Modell des Maxwell'schen Kreisels im Zustande des Typus I, stelle ihn derart, dass die Achsenlinie des herausgerückten Schraubenpaares zur Medianebene des Bügels ($\psi = 0$) senkrecht steht, oder in ihr liegt, neige die F-A in derselben Ebene und gebe, wenn man will, dem Kreisel einen (Dreh-)Stoss, dessen Vektor in die Knotenlinie fällt, um die beiden möglichen Pendelbewegungen anschaulich vor sich zu haben.

Es giebt nun aber noch Fälle von Bewegungen, bei welchen Impuls- und Drehvektor ohne zusammenzufallen dauernd in derselben Ebene verbleiben.

3. Diese Bewegungen bestehen in der permanenten Rotation um eine von der F-A im allgemeinen verschiedene, vertikale Achse. Die Ebene, welche $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{W}$ dauernd enthält, muss nach dem vorausgeschickten geometrischen Satze eine der Hauptebenen durch die C-Achse, also entweder die CA- oder CB-Ebene und wegen der permanenten Rotation zugleich die Ebene durch die Vertikale und F-A sein. Deshalb ist auch die AB-Ebene ausgeschlossen. Die Knotenlinie fällt beständig mit der B- resp. A-Achse zusammen. $\varphi = 90^\circ$ resp. 0°; die konstante $\measuredangle$-Geschwindigkeit um die Vertikale sei $\psi' = \nu$. In diesem besonderen Falle können wir unbedenklich von einer kinetischen Interpretation des kinematisch eingeführten Vektors $\mathfrak{C}$ (46 a), welche umgekehrt Poinsot zu dem Impulssatze (46 a) geführt hat,

---

*Abkürzung für quantitas arbitraria.

vorteilhaften Gebrauch machen*. Indem wir das Koordinatensystem, auf welches wir die Aenderungsgeschwindigkeiten des Impulsvektors beziehen, mit dem Kreisel fest verbinden, sprechen wir mit KS $\mathfrak{C}$ als den Vektor der centrifugalen Drehkraft an. Da der Impulsvektor hier keine Komponente nach der Knotenlinie entsendet, überhaupt $\mathfrak{Z}' = 0$ ist, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{K}$ in der Knotenlinie selbst liegen, so gilt vermöge (46 a) der Satz:

Findet eine permanente Rotation um die Vertikale statt, so müssen sich der Kraftvektor und der Centrifugalvektor auf der Knotenlinie beständig das Gleichgewicht halten.

In Zeichen: $\mathfrak{C} + \mathfrak{K} = 0$. Die konstante Neigung der F-A gegen die Vertikale betrage ϑ_0, dementsprechend sind s_0, u_0 die Werte von s, u. Das Koordinatensystem FKK′ ist fest im Kreisel; die Geschwindigkeitskomponente nach OK′ und OF sind νs_0 resp. νu_0, die Impulskomponenten $A\nu s_0$ resp. $C\nu u_0$ im Falle $\varphi = 90^0$, $B\nu s_0$ resp. $C\nu u_0$ im Falle $\varphi = 0^0$ (also nur B mit A vertauscht). Jenen vorausgesetzt, wird offenbar

$$\mathfrak{C} = A\nu s_0 . \nu u_0 - C\nu u_0 . \nu s_0 = \nu^2 s_0 u_0 (A - C),$$

f. wegen $\mathfrak{K} = -\mathfrak{C}$:

66 a
$$\begin{cases} Ps_0 = \nu^2 s_0 u_0 (C - A) & \text{und durch } A|B \text{ der andere Fall:} \\ Ps_0 = \nu^2 s_0 u_0 (C - B). \end{cases}$$

$s_0 = 0$ oder $\vartheta_0 = 0$ befriedigt beide Gleichungen identisch, $\nu =$ arb. Dies ist der 1. Fall der permanenten Rotation um die F-A. Dagegen für von 0 verschiedene ϑ_0 Division der Gl. (66 a) mit s_0 erlaubt:

66 b
$$\varphi = 90^0: \ \nu^2 = \frac{P}{(C-A)u_0}; \quad \varphi = 0^0: \ \nu^2 = \frac{P}{(C-B)u_0}.$$

Die $\measuredangle$-Geschwindigkeit um die Vertikale ist also durch die Neigung der F-A gegen die permanente Drehachse und durch die Massenverteilung doppelwertig ($\pm$) bestimmt.

Der Kreisel verhält sich in beiden Fällen wie ein konisches Pendel.

Die Bewegung kann eingeleitet werden durch einen „Eigenimpuls“ (Drehstoss, dessen Vektor in die F-A fällt) von der Grösse $C\nu u_0$ und durch einen „seitlichen Anstoss“ (Vektor in der Richtung OK′) der F-A von der Grösse $A\nu s_0$ oder $B\nu s_0$, je nachdem $\varphi = 90^0$ oder $\varphi = 0^0$ ist, bei gegebener Anfangsneigung ϑ_0 der F-A gegen die Vertikale. Die Aequatorebene zerlegt die beiden Hauptebenen des Kreisels, welche allein die möglichen permanenten

*Kritik der Poinsot'schen Betrachtung bei KS I p. 145.

Drehachsen enthalten, je in obere und untere Halbebene; immer nur eine von beiden kann alle zulässigen Drehachsen enthalten, welche, hängt vom Vorzeichen der Grösse $\frac{P}{C-A}$ resp. $\frac{P}{C-B}$ ab.

Bemerkungen. 1. Die eben erörterte Bewegung gehört zu den von Herrn Staude betrachteten Rotationen des allgemeinen Kreisels um permanente Drehachsen*. In der That entartet der Kegel 2. Grades, welcher der geometrische Ort aller möglichen permanenten Rotationsachsen im Körper ist, beim Typus I in die beiden Hauptebenen durch die F-A. Uebrigens besteht beim Typus II der Staude'sche Kegel ebenfalls aus zwei senkrecht gekreuzten Ebenen, der Aequatorebene und der Ebene durch die C- und S-A.

2. Die betrachtete Bewegungsform entspringt aus einer Eigenschaft aller cyklischen Systeme; denn sie ist die zur cyklischen Koordinate ψ zugehörige, bereits angekündigte, stationäre** Bewegung. Davon handelt allgemein Routh II, Art. 98: To find a steady motion.

Analytische Herleitung derselben Bewegungsformen.

Wir müssen diese drei Bewegungsarten als partikuläre Lösungen der Differentialgleichungen wiederfinden, und zwar auf folgende Weise. Es zeigt sich, dass $m = \text{const.}$ eine ihnen gemeinsame Eigenschaft ist. Wir wollen beweisen, dass sie jenen Bewegungen von allen überhaupt möglichen Bewegungsformen des Typus I allein eigentümlich ist, d. h. wir behaupten:

Verharrt während der Bewegung der Impulsvektor dauernd in ein und derselben Ebene, welche durch die Knotenlinie hindurchgeht und gegen die Vertikale eine unveränderliche Neigung besitzt, so kann die Bewegung nur von folgender Art sein:

1) Eine permanente Rotation um die vertikal gestellte F-A,

2) Eine ebene Pendelbewegung um die A- oder B-Achse,

3) Eine konische Pendelbewegung um eine in der CA- oder CB-Hauptebene des Kreisels gelegene Vertikalachse.

Damit ist gleichzeitig ein Prinzip der Einordnung dieser partikulären Bewegungsformen in die allgemeinen gegeben.

Beweis (analytisch). Bedeutet α (s. Fig. 3) die Neigung dieser Ebene gegen die Vertikale, so ist $\operatorname{tg}\alpha = m/n$, f. $m = \text{const}$, $m' = 0$. $\overline{m} \mid m_0$. 2. Gl. (50) $E\psi' = 0$. Entweder verschwindet E oder ψ.

Sei A) $E = 0$. Dann wird die 1. Gl. (50) ($E' = 0$): $Ps = m\psi'$ **67**

*KS II p. 378 und 386/390. — Crelle's Journal Bd. 113 (1894).

**Von Hertz werden derartige Bewegungen isocyklische genannt. — Prinzipien der Mechanik, Ges. Werke III p. 240 Nr. 560.

68 69 und (61) $u'(1+\varepsilon)+g\gamma=0$. Daraus folgt (60): $\psi' s^2 = \frac{g(1+\varepsilon'-\gamma')}{1+\varepsilon}$,

70 und ebenso (63): $g^2(1+\varepsilon'-\gamma') = k^2 s^2(1+\varepsilon)$. (69, 70) miteinander multipliziert (die Möglichkeit $g=0$ wird nachher von selbst berücksichtigt):

71a $$\psi' g = k^2, \quad \psi' = \frac{k^2}{g} = (67)\frac{Ps}{m} = \frac{p_0}{m_0}s.$$

Es ist aber (54) $w = n_0 u + m_0 s$ jetzt nur Funktion von ϑ, mithin auch g und k, d. h. (71 a) die Gleichung

71b $$k^2 m_0 = g s p_0$$

ist eine solche allein für ϑ. Wir können daraus nur schliessen, dass

(a) $\vartheta = \mathrm{const}$; f. $u'=0$ und dann (68): $g\gamma=0$. Dies wieder nur möglich, wenn g oder γ verschwindet. $g=0$ führt (69, 67) zu $\psi'=0$ und zugleich zu $s=0$. Schon wenn ϑ, $\psi = \mathrm{const}$, d. h. die F-A an derselben Stelle bliebe, wäre dies nicht anders möglich als bei vertikaler Stellung $\vartheta=0$. Ferner $w = n_0$; da aber $N = Cr = C\varphi'$, so ist $w = c_0\varphi' = n_0$, $\varphi' = \mathrm{const}$, doch weil n_0 beliebig, $\varphi' = \mathrm{arb}$. Also ist im Falle $g=0$ nur (1) *die gleichförmige Drehung um die vertikale F-A* möglich.

$\gamma = 0$. Entweder ε' oder $\sin 2\varphi = 0$. Jenes bedeutet $\varepsilon = 0$ oder den symmetrischen Kreisel. Weil ausserdem $\vartheta = \mathrm{const.} = \vartheta_0$ ($u = u_0$, $s = s_0$), wird (69) $\psi' = \frac{g}{s^2} = \mathrm{const} = \nu$, demgemäss (67):

72a $$P s_0 = m\nu.$$

$N = C(\varphi' + \psi' u) = \mathrm{const}$, denn $w = n_0 u_0 + m_0 s_0 = \mathrm{const}$; f. $\varphi' = \mathrm{const} = \mu$. Mit ϑ, ψ', $\varphi' = \mathrm{const}$ und der Gl. (72 a) ist aber diese Partikularbewegung als *reguläre Präzession des symmetrischen Kreisels* gekennzeichnet. Wir mögen in (72 a) m und ν durch n, N, ϑ_0 ausdrücken: $m = \frac{N - n u_0}{s_0}$, $\nu = \frac{g}{s_0^2} = \frac{n - u_0 N}{A s_0^2}$, oder m durch ϑ_0, μ, ν und A, C: $m = s\{C\mu + (C-A)\nu u_0\}$, um resp. die Relationen zu erhalten:

72b $$\begin{cases} (N - u_0 n)(n - u_0 N) = A P s_0^4 & \text{(Gl. in den Imp.-Koord. } N, n) \\ \nu s_0\{C\mu + (C-A)\nu u_0\} = P s_0 & \text{(Gl. in den Geschw.-Koord. } \mu, \nu), \end{cases}$$

welche für die reguläre Präzession charakteristisch sind (vgl. KS I p. 177 Nr. 3; II p. 279 Nr. 1). Nun betrachten wir $\sin 2\varphi = 0$ oder $\varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi/2 \end{cases}$, f. $\gamma' = \pm\varepsilon'$, $\varphi' = 0$ und wieder (69) $\psi' = \mathrm{const} =$

$\nu = \frac{g(1+\varepsilon'-\gamma')}{(1+\varepsilon)s_0^2}$ und weil $fs = g$ (59), kommt $f = \frac{\nu s_0(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon'-\gamma'}$. 73

Am bequemsten die erste Gl. (48) zu benutzen, welche jetzt nacheinander wird: $0 = F\nu u_0 - N\nu s_0 + Ps_0$; wegen $F = Af$ (52) $N = C\nu u_0$, (73): $0 = A\nu^2 s_0 u_0 \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon'-\gamma'} - C\nu^2 s_0 u_0 + Ps_0$, oder

$\nu^2 s_0 u_0 \left(C - A\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon'-\gamma'}\right) = Ps_0$. Wenn hier die beiden Werte von γ' substituiert werden, so ergiebt sich nach der Bedeutung von ε (51):

$$\nu^2 s_0 u_0 \begin{Bmatrix} C-B \\ C-A \end{Bmatrix} = Ps_0, \text{ je nachdem } \gamma' = \pm\varepsilon'. \qquad 74$$

Die beiden Gl. (74) sind aber offenbar identisch mit (66 b), (2) sie *charakterisieren also die beiden konischen Pendelbewegungen des Kreisels.*

(b) ϑ = var; dann müssen aber (71 b) p_0, m_0 zugleich verschwinden. m_0 mit $E = 0$: Der Impulsvektor steht lotrecht und hat die konstante Grösse n_0. $p_0 = 0$: Der Kreisel muss kräftefrei sein, d. h. wir erhalten hier die sog. *Poinsot-Bewegung.* Mit der Anwendung dieser Bedingungen gelangen wir nach einer leichten Umformung unserer Gleichung, z. B. für u in der That zu einer der bekannten Quadraturformeln in der Theorie.

Da $w = n_0 u + m_0 s = n_0 u$ schon durch u ausgedrückt ist, nach (68) $g\gamma = -u'(1+\varepsilon)$, so ist mit Hilfe der letzten Gleichung nur φ (in γ') aus (63) zu entfernen. Am einfachsten so: $u' = -\frac{g\gamma}{1+\varepsilon}$ 75 76

in (63) eingesetzt, darauf die entstandenen Gl. mit $1+\varepsilon'+\gamma'$ dividiert:

$$g^2(1+\varepsilon'-\gamma') = k^2 s^2(1+\varepsilon) \quad \text{oder} \quad g^2(\varepsilon'-\gamma') = k^2 s^2(1+\varepsilon) - g^2.$$

(63) anders geschrieben: $k^2 s^2(\varepsilon'+\gamma') = u'^2(1+\varepsilon) + g^2 - k^2 s^2$. Die beiden letzten Gleichungen miteinander multipliziert (58):

$$\begin{aligned} g^2 k^2 s^2 \gamma^2 &= \{u'^2(1+\varepsilon) + g^2 - k^2 s^2\}\{k^2 s^2(1+\varepsilon) - g^2\} \\ &= u'^2(1+\varepsilon)^2 k^2 s^2 - u'^2 g^2(1+\varepsilon) + (g^2 - k^2 s^2)\{k^2 s^2(1+\varepsilon) - g^2\}. \end{aligned}$$

Weil (76) $u'^2(1+\varepsilon)^2 = g^2\gamma^2$, hebt sich das linke Glied gegen das erste der rechten Seite weg, und wir bekommen:

$$u'^2(1+\varepsilon)g^2 = \{g^2 - k^2 s^2\}\{k^2 s^2(1+\varepsilon) - g^2\}. \qquad 77\,a$$

Diese Diff.-Gl. lässt sich auf eine Quadratur bringen; denn (58, 75)

$g = n_0 s^2 = n_0(1-u^2)$, (62) $k^2 = 2h_0 - a_0 n_0^2 u^2$, f. $u'^2 =$ Funktion von u allein.

Nach Wiederherstellung der ursprünglichen Bezeichnungen bis auf $2h$, welches hier durch H, und n, welches durch J ersetzt werde:

77b
$$\begin{cases} u'^2 = \dfrac{A-C.B-C}{AB}\dfrac{J^2}{C^2}(u_1^2-u^2)(u^2-u_2^2) \\ u_1^2 = \dfrac{AH-J^2}{A-C}\cdot\dfrac{C}{J^2}, \quad u_2^2 = \dfrac{BH-J^2}{B-C}\cdot\dfrac{C}{J^2} \end{cases}$$

v. KS II p. 456, Routh II Art. 177.

78 Direkt wird (71a) $\psi' = \dfrac{k^2}{g} = J\dfrac{H-Cr^2}{J^2-C^2r^2}$ (KS I p. 150 Nr. 8).

Es ist auffallend, dass in den Lehrbüchern, welche von der Poinsot-Bewegung handeln, eine merkwürdige geometrische Eigenschaft derselben unerwähnt bleibt, welche der blosse Anblick der Gl. (76) schon lehrt. (76) $u' = -\dfrac{g\gamma}{1+\varepsilon}$ $= \dfrac{J}{2}\dfrac{A-B}{AB}s^2\sin 2\varphi$. ($A = B$, $u' = 0$, f. $\vartheta =$ const. Reguläre Präzession des kräftefreien, symmetrischen Kreisels!) $u' = 0$ findet an den Grenzkreisen statt, zwischen welchen die Kreiselspitze auf- und niederschwankt, damit aber, $A \neq B$, verschwindet gleichzeitig $\sin 2\varphi$, oder es nimmt φ, wenn u eine Grenze erreicht, immer einen der Werte 0, $\pi/2$ oder Vielfache von $\pi/2$ an. Wenn wir uns den Impulsvektor vertikal gestellt denken, mit anderen Worten: *So oft die Kreiselspitze in der Poinsot-Bewegung eine höchste oder tiefste Lage passiert, stellt sich der Kreiselkörper hinsichtlich der Ebene durch Vertikale und C-Achse symmetrisch ein, d h. so, dass entweder die A- oder die B-Achse in diese Ebene eintritt.* (Entsprechende Sätze durch cyklische Vertauschung von A, B, C). Die besondere Art, in welcher dies geschieht, können wir erst aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} s^2\sin^2\varphi &= \frac{A.B-C}{C.A-B}(u^2-u_2^2) \\ s^2\cos^2\varphi &= \frac{B.A-C}{C.A-B}(u_1^2-u^2) \end{aligned}\right\} \quad \varphi' = \frac{J^2-HC}{JC}\frac{u}{s^2}$$

erschliessen, von denen die beiden ersten, das ist bemerkenswert, einen von der Zeit unabhängigen Zusammenhang zwischen φ und ϑ vorstellen. $A > B > C$ vorausgesetzt, folgt $HA > J^2 > HC$. Zwei wesentlich verschiedene Klassen von Bewegungen, je nachdem $J^2 \lessgtr BH$. 1) $J^2 < BH$, $u \Big| \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}$ $(u_1^2 > u_2^2)$, φ' hat beständig dasselbe Vorzeichen: φ geht successive durch die Werte 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π etc. hindurch, wenn u durch u_2, u_1, u_2 etc. hindurchgeht. Der Kreisel dreht sich gegen die Knotenlinie immer um einen rechten Winkel, wenn die Spitze von der höchsten in die tiefste Lage und umgekehrt geht. 2) $J^2 > BH$, $u \Big| \begin{matrix} +u_1 \\ -u_1 \end{matrix}$ $(u_1^2 > 0$, $u_2^2 < 0)$, φ' wechselt für $u = 0$ ($\vartheta = 90^0$) sein Vorzeichen, an den Grenzlagen immer $\varphi = 90^0$, in der horizontalen Lage der C-Achse immer $\varphi = \varphi_0$, wo φ_0 aus $\cos^2\varphi_0 = \dfrac{B.A-C}{C.A-B}u_1^2$ zu berechnen. Wenn die Kreiselspitze einen der beiden gleich-

weit von der Horizontalebene abstehende Grenzkreise passiert, stellt sich immer nur die A-Achse in die VC-Ebene ein, φ schwankt zwischen 90^0 und φ_0 zweimal, während u von $-u_1$ nach $+u_1$ geht. Qualitativ müssen sich die eben aus den analytischen Formeln gefolgerten Eigenschaften auch aus einer genauen Betrachtung des kinematischen Bildes von Poinsot (Abrollen des T-E auf einer invariablen Ebene) ergeben.

Damit sind alle Möglichkeiten, welche aus $E = 0$ folgen, erschöpft. Sei B) $\psi' = 0$. Es folgt nicht ohne Weitläufigkeiten $\varphi' = 0$. Dies ist bewiesen, wenn wir eine Bestimmungsgleichung für φ hergeleitet haben, welche ausser φ nur Konstanten enthält. (40 b) $p = \vartheta' \cos\varphi$, $q = \vartheta' \sin\varphi$, $r = \varphi'$. Deshalb: $N = Cr =$ 79 80
$C\varphi'$ oder $w = c_0\varphi'$. (64) $w' = -\varepsilon pq = \vartheta'^2\gamma$. (54) $w = n_0 u + m_0 s$,
f. $u \equiv u(w)$. Die Gl. (81) nach t differentiiert: $(m_0 u - n_0 s)\vartheta' = w'$ 82
oder (80) $m_0 u - n_0 s = \vartheta'\gamma$. Gl. (81, 82) quadriert und addiert:
$n_0^2 + m_0^2 = w^2 + \gamma^2\vartheta'^2$ oder (80) $n_0^2 + m_0^2 - w^2 = w'\gamma$. Ersetzen wir
w durch seinen Wert (79), so lässt die entstandene Diff.-Gl. 2. Ordnung für φ:

$$n_0^2 + m_0^2 - c_0^2\varphi'^2 = \varepsilon' c_0 \sin 2\varphi\,\varphi''$$

ein erstes Integral zu von der Form:

$$n_0^2 + m_0^2 - w^2 = c\cos\varphi^{\frac{c_0}{\varepsilon'}}, \qquad 83$$

wo c die willkürliche Konstante bedeutet. (83) verifiziert man leicht durch logarithmische Differentiation.

Weil $\psi' = 0$, wird (60) $g = u'\gamma$. Dieser Wert von g werde in (63) eingeführt und ergiebt: $(1+\varepsilon'-\gamma')u'^2 = k^2 s^2$ oder $(1+\varepsilon'-\gamma')\vartheta'^2 = k^2$. Wäre $\gamma = 0$, so wäre unsere Behauptung nicht erst zu beweisen, also $\gamma \neq 0$ angenommen. Die letzte Gl. mit γ^2 multipliziert und (80) berücksichtigt: $(1+\varepsilon'-\gamma')w'\gamma = k^2\gamma^2$ oder weil $w'\gamma = n_0^2 + m_0^2 - w^2$

$$(1+\varepsilon'-\gamma')(n_0^2 + m_0^2 - w^2) = k^2\gamma^2. \qquad 84$$

An (83) und (84) knüpfen wir unsere letzten Schlüsse. $k^2 \equiv k^2(u, w)$ (62), wegen (81) $k^2 \equiv k^2(w)$. Aus (83) folgt aber $w \equiv w(\varphi)$; diese Lösung setzen wir in Gl. (85) ein und finden eine transcendente Bestimmungsgleichung für φ, d. h. $\varphi = \text{const}$, f. (79) w, $w' = 0$. Die Gl. $n_0^2 + m_0^2 - w^2 = w'\gamma$ schrumpft auf $n_0^2 + m_0^2 = 0$ zusammen, also n_0 und $m_0 = 0$. (84) $\gamma = 0$. Demnach Widerspruch mit der Annahme; es ist von vornherein $\gamma = 0$, und dann folgt wie eben n_0, $m_0 = 0$.

Wenn wir $\varepsilon = 0$ ausschliessen, ist $\sin 2\varphi = 0$, $\varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi/2 \end{cases}$

(62) $k^2 = 2h_0 - p_0 u$, f. (84):

85 $(1-\varepsilon'-\gamma')u'^2 = s^2(2h_0-p_0u)$; $\begin{cases}\varphi = 0^0, & \gamma' = +\varepsilon', \; Au'^2 = s^2(2h-Pu)\\ \varphi = 90^0, & \gamma' = -\varepsilon', \; Bu'^2 = s^2(2h-Pu).\end{cases}$

(3) *Dies sind die Gleichungen der beiden ebenen Pendelbewegungen des Kreisels* und identisch mit den ersten Integralen der beiden Differentialgleichungen (65).

Betrachten wir aber der Vollständigkeit wegen $\varepsilon = 0$, so folgt aus (80) $w' = 0$, $w = \text{const}$, aus $g = u'\gamma \; n_0 - uw = 0$. Damit $u = \text{var}$, müssen n_0 und w zugleich verschwinden, damit auch φ', i. e. $\varphi = \text{const}$. φ hat einen willkürlich festen Wert, wie es bei den ebenen Pendelbewegungen des symmetrischen Kreisels thatsächlich der Fall ist.

Das Ergebnis dieses Beweises vergegenwärtigen wir uns in einer Tabelle.

$m = \text{const}$

$E=0$	$\vartheta = \text{const}$	$g = 0$	Permanente Rotation um die vertikale F-A (1)
		$\gamma = 0$	$\sin 2\varphi = 0$. Konische Pendelbewegung (2). ($\varepsilon = 0$. Reguläre Präcession)
	$\vartheta = \text{var}$	$p_0 = 0$	(Poinsot-Bewegung)
$\psi'=0$	$\varphi = \text{const}$	$\gamma = 0$	$\sin 2\varphi = 0$. Ebene Pendelbewegung (3). ($\varepsilon = 0$. Ebene Pendelbewegung).

III.

Angenäherte Darstellung der Bewegung bei geringer Elliptizität. Nachbarbewegungen zur Präzession.

Vorbemerkung

Es werde in den Untersuchungen dieses Abschnittes beständig ε als eine kleine Grösse vorausgesetzt. Diese Beschränkung ist in doppelter Hinsicht wichtig: Erstens setzt sie uns in den Stand, endliche Gleichungen der Bewegung aus den Differentialgleichungen herzuleiten und damit die theoretischen Kenntnis des allgemeinen Kreisels* wenngleich nur um ein geringes Stück zu vermehren; zweitens liefert sie einen Beitrag zur Fehlerthorie des symmetrischen Kreisels und damit wenigstens einen Teil der Grundlagen feinerer Versuche mit einem Modell. In der That bilden unter allen wirklich vorhandenen Kreiseln die symmetrischen Ausnahmefälle; selbst die redlichste Absicht des geschicktesten Mechanikers wird es nicht erreichen, einen Kreiselkörper herzustellen, dessen äquatoriale Trägheitsmomente genau übereinstimmen, und dessen Schwerpunkt genau auf der ausgezeichneten H-A liegt; wir können sogar mit einer von 1 unendlich wenig unterschiedenen Wahrscheinlichkeit wetten, dass ein uns beliebig präsentierter Kreisel asymmetrisch sei. Praktisch werden, besonders durch die unvollkommene Homogenität des Materials, auch stärkere Abweichungen von der Symmetrie ziemlich wahrscheinlich sein, und die durch jede Asymmetrie notwendige Abweichung von der Bewegung des symmetrischen Kreisels wird einer hinreichend genauen Beobachtungsweise bemerkbar werden. Dadurch nehmen wir zugleich und zunächst ein Prinzip an, welches wir als das wahrscheinliche Ergebnis unserer physikalischen Erfahrung betrachten, und aus welcher wir die Berechtigung aller folgenden Vernachlässigungen schöpfen. Dieses Prinzip lautet: Die Lagekoordinaten des asymmetrischen Kreisels unterscheiden sich, wenigstens für einen beschränkten Zeitraum, von denen des symmetrischen Kreisels um so weniger, je weniger der asymmetrische vom symmetrischen abweicht. Damit wird nicht behauptet, dass der Charakter der Bewegung, z. B. die Gestalt der Bahnkurve, welche die Kreiselspitze beschreibt, dem des symmetrischen Kreisels um so ähnlicher

*Vgl. das ideale Programm, welches von KS zur Behandlung des allgemeinen Kreisels vorgeschlagen ist: II p. 376 und 390.

werden müsse, je mehr der asymmetrische Kreisel sich diesem nähere. Die Asymmetrie nach Art des Typus I können wir als eine besondere Fehlerquelle der abweichenden Bewegung auffassen.

Die Näherungsmethode.

Offenbar liefert uns jeder bilateral gebaute Körper (d. h. ein Körper, der eine zweizählige Symmetrieachse besitzt) ein Beispiel für den Kreisel vom Typus I. Wir applizieren z. B. dem Schwungring eines symmetrischen Kreisels an diametral gegenüberliegenden Punkten zwei gleiche Knöpfe. Diese beiden Knöpfe bilden sowohl für sich, dank der starren Verbindung, welche der symmetrische Kreisel vermittelt, als auch mit ihrem Träger einen Kreisel vom Typus I. Wir sagen, der Knopfkreisel sei mit dem symmetrischen gekoppelt. Die Bewegung des ganzen Kreisels ist eine durch den Einfluss der Koppelung gestörte Bewegung des symmetrischen Bestandteils. Den hierbei sich abspielenden kinetischen Prozess denken wir uns in eine unendliche Reihe von Wechselwirkungen zwischen dem symmetrischen und dem Zusatzkreisel zerlegt. Die überwiegende träge Masse des symmetrischen Teils strebt im ersten Augenblick, die beiden Knöpfe in ihrer Bewegung mitzureissen, diese wirken durch ihre eigene Trägheit im folgenden Augenblick auf den symmetrischen Kreisel zurück, als wenn sie seine ungestörte Bewegung wirklich ausführten, und modifizieren diese Bewegung des ersten Augenblicks; mit der modifizierten Bewegung aber wiederholt sich das Spiel u. s. f. In der ersten Annäherung betrachten wir die wirklich stattfindende Bewegung als den Effekt der ersten Rückwirkung der Knöpfe, indem wir alle folgenden gegen diese vernachlässigen.

Aus diesem Bilde ergiebt sich das folgende Näherungsverfahren. Wir ersetzen in den Differentialgleichungen die mit ε multiplizierten Grössen durch die korrespondierenden desjenigen symmetrischen Kreisels, welcher für $\varepsilon = 0$ denselben Gleichungen gehorcht. Ich will ihn, nur der Kürze wegen, Mutterkreisel nennen. Da wir eine bestimmte Bewegung des Kreisels dauernd zu ein und derselben bestimmten, ihr wenigstens für einen beschränkten Zeitraum „benachbarten“ Bewegung seines Mutterkreisels in Beziehung setzen wollen, so treffen wir die Bestimmung, dass der Anfangszustand des Mutterkreisels übereinstimme mit dem des betrachteten Kreisels. Der Anfangszustand aber ist charakterisiert durch die Anfangslage $\vartheta_0 \psi_0 \varphi_0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $\vartheta_0' \psi_0' \varphi_0'$. Es soll fortan φ_0' mit μ, ψ_0' mit ν bezeichnet werden. Die reduzierten Bahnkurven (p. 23) beider Kreisel werden sich also im gemeinsamen Anfangspunkt berühren.

Auch der Mutterkreisel soll in Hinsicht des betrachteten

Kreisels genau durch die folgenden drei Eigenschaften gekennzeichnet werden:

1) Sein Schwerpunkt befinde sich an derselben Stelle der F-A wie der des Kreisels selbst;

2) Die Masse beider sei gleich gross;

3) Von den Trägheitsmomenten beider seien die A einander gleich, und die C mögen sich um denselben Betrag unterscheiden wie die B, nämlich um εA.

Aus der ersten und zweiten Eigenschaft folgt, dass das maximale Drehmoment der Schwere (P, p_0) für beide Kreisel den gleichen Wert hat, aus der dritten geht hervor, wie durch Verkleinerung von ε das T-E des betrachteten Kreisels in das seines Mutterkreisels übergeht.

Man überzeugt sich leicht, dass das Maxwell'sche Instrument in der (p. 19) beschriebenen einfachsten Anordnung des Typus I die aufgezählten Eigenschaften besitzt. Sein Mutterkreisel wird, wie aus dem Schluss des ersten Abschnittes hervorgeht, durch die symmetrische Anordnung (Beisp. 2 p. 14) dargestellt. A_1, C_1 H-T des Mutterkreisels, $B_1 = A_1$.

$$\left\{\begin{array}{ll} B-A = \varepsilon A = m(R_{14}^2 - \overline{R}^2) \quad (33,\ 51) & \\ A = [A]+1{,}5\,m\overline{R}^2 & A_1 = [A]+1{,}5\,m\overline{R}^2 \\ C = [C]+2\,m\overline{R}^2+mR_{14}^2 & C_1 = [C]+3\,m\overline{R}^2, \end{array}\right. \qquad 86$$

wo $[A]$, $[C]$ aus (11, 10, 8) hervorgehende Abkürzungen sind. Nach (86) haben wir unmittelbar:

$$A = A_1, \quad C = C_1+\varepsilon A \text{ oder } (52)\ c_0 = c_1+\varepsilon, \qquad 87$$

wenn $\frac{C_1}{A} = \frac{C_1}{A_1} = c_1$ gesetzt wird.

Durch diese Bestimmungen ist jeder Bewegung des Mutterkreisels eindeutig eine Bewegung des Kreisels selbst zugeordnet; wir erhalten durch diese Beziehung auch alle Bewegungen desselben, weil der Grad der Mannigfaltigkeit beider der gleiche ist. Es werden aber insbesondere zu jeder reduzierten Bahnkurve des Mutterkreisels einfach unendlich viele, im allgemeinen voneinander verschiedene reduzierte Bahnkurven des betrachteten Kreisels gehören. Dies rührt von dem Umstand her, dass φ beim symmetrischen, nicht aber beim asymmetrischen Kreisel cyklische Koordinate ist. Die Gleichung der reduzierten Bahnkurve des ersteren enthält φ_0 nicht, wohl aber die des letzteren, und dieser Para-

meter wird im allgemeinen die Gestalt der Kurve beeinflussen, was die Behauptung ist *.

Herstellung der Störungsgleichungen.

Von den im II. Abschnitt zur Verfügung gestellten Differentialgleichungen werden wir bei der Auswahl derjenigen, welche dem Näherungsverfahren unterworfen werden sollen, alle mit Hilfe des Energieprinzips entwickelten vermeiden, weil diese in speziellen Fällen zu überflüssigen Komplikationen der Rechnung führen. Wir benutzen fortan:

88
$$\begin{cases} (54) & e' = p_0 s - \psi' \bar{m} \quad \text{für die Berechnung von } \vartheta, \\ (55, 59) & \psi' s^2 = g - \varepsilon s q \cos\varphi \quad \text{für die Berechnung von } \psi, \end{cases}$$

indem wir zunächst die Bewegung der F-A in der reduzirten Bahnkurve zu kennen begehren. Es war

89
$$\begin{cases} (55) \quad e = \vartheta' - \varepsilon q \sin\varphi & (58) \quad g = n_0 - uw \\ (54) \quad s\bar{m} = w - n_0 u = \bar{g} & (64) \quad w' = -\varepsilon pq. \end{cases}$$

Wenn wir stets die entsprechenden veränderlichen Grössen des Mutterkreisels durch den Index σ, die konstanten durch den Index 1 auszeichnen, ergeben sich aus (88, 89) für $\varepsilon = 0$:

90
$$\begin{cases} \vartheta''_\sigma = p_0 s_\sigma - \dfrac{g_\sigma \bar{g}_\sigma}{s_\sigma^3} \equiv \vartheta''_\sigma(\vartheta_\sigma) \\ \psi'_\sigma = \dfrac{g_\sigma}{s_\sigma^2} \equiv \psi'_\sigma(\vartheta_\sigma), \end{cases}$$

welches auch zugleich die Differentialgleichungen der ungestörten Bewegung sind. Ausserdem

91
$$w = \text{const} = w_1 \qquad g_\sigma = n_1 - u_\sigma w_1 \qquad \bar{g}_\sigma = w_1 - u_\sigma n_1.$$

Die Impulskonstanten n_1, w_1 hängen mit Bestimmungsstücken des Anfangszustandes zusammen durch die Gleichungen:

92
$$w_1 = c_1(\mu + \nu u_0) \qquad n_1 = \nu s_0^2 + u_0 w_1,$$

wo $u_0 = \cos\vartheta_0$, $s_0 = \sin\vartheta_0$. Ist am Anfang der Bewegung $w = w_0$, dann mögen

93 a
$$w_0 = w_1 + \varepsilon w_2 \qquad n_0 = n_1 + \varepsilon n_2$$

gesetzt sein, wo

93 b
$$w_2 = \mu + \nu u_0 = r_1 \qquad n_2 = u_0 w_2 + s_0 q_0 \cos\varphi_0.$$

* ψ_0 und φ_0 sind beim symmetrischen Kreisel „unwesentliche" Konstanten der endlichen Bewegungsgleichungen; beim asymmetrischen ist es nur ψ_0; φ_0 dagegen ist wesentliche Konstante. Ich erinnere an die besonderen Bewegungsformen des II. Abschnitts, wo dieser Umstand schon deutlich hervortritt.

q_0 ist der Anfangswert von q. Hiermit ist auch die Verknüpfung der Impulskonstanten n_0, w_0 mit den Bestimmungsstücken des Anfangszustandes gezeigt. Die Gl. (92, 93 b) werden leicht aus (41, 40 b, 52; 87, 88) gefunden.

Wir beginnen mit der Anwendung des Näherungsverfahrens auf die 4. Gl. (89):

$$w' = -\varepsilon p_\sigma q_\sigma, \quad \text{f. } w = w_0 - \varepsilon \int_0^t p_\sigma q_\sigma dt; \tag{94 a}$$

denn $p_\sigma q_\sigma$ gelten als bekannte Funktionen der Zeit. Damit ist der langsam veränderliche Parameter w bekannt. Wir kürzen ab:

$$w = w_0 + \varepsilon \overline{w}, \quad \text{mithin} \quad \overline{w} = -\int_0^t p_\sigma q_\sigma dt. \tag{94 b}$$

Aus der 1. Gl. (88) ist ψ' vermittelst der zweiten zu entfernen. Daher diese:

$$\psi' s^2 = g - \varepsilon s_\sigma q_\sigma \cos\varphi_\sigma \quad \text{oder} \quad \psi' = \frac{g}{s^2} - \varepsilon \frac{q_\sigma \cos\varphi_\sigma}{s_\sigma}. \tag{95}$$

Dann wird (89)

$$\overline{m}\psi' = \frac{g\overline{g}}{s^3} - \varepsilon W_1, \quad \text{wo} \quad s_\sigma^2 W_1 = \overline{g}_\sigma q_\sigma \cos\varphi_\sigma. \tag{96}$$

1. Gl. (89): $e = \vartheta' - \varepsilon q_\sigma \sin\varphi_\sigma$, f.

$$e' = \vartheta'' - \varepsilon W_2, \quad \text{wo} \quad W_2 = \{q_\sigma \sin\varphi_\sigma\}'. \tag{97}$$

Das erste Glied der rechten Seite wird durch Substitution des Wertes von w (94 b), indem hier wie auch künftig das $\square$ von ε vernachlässigt wird:

$$\frac{g\overline{g}}{s^3} = \frac{g_1\overline{g}_1}{s^3} - \varepsilon W_3, \quad \text{wo} \quad s_\sigma^3 W_3 = -\overline{w}(g_\sigma - u_\sigma \overline{g}_\sigma) - (\overline{g}_2 g_\sigma + g_2 \overline{g}_\sigma). \tag{98}$$

Hier bedeuten:

$$\left\{ \begin{array}{llll} g_1 = n_1 - uw_1 & \equiv g_1(\vartheta) & \overline{g}_1 = w_1 - un_1 & \equiv \overline{g}_1(\vartheta) \\ g_2 = n_2 - u_\sigma w_2 & \equiv g_2(\vartheta_\sigma) & \overline{g}_2 = w_2 - u_\sigma n_2 & \equiv \overline{g}_2(\vartheta_\sigma). \end{array} \right. \tag{99}$$

Durch (96—98) ergiebt sich aus der 1. strengen Gl. (88) die angenäherte

$$\vartheta'' = p_0 s - \frac{g_1\overline{g}_1}{s^3} + \varepsilon W, \quad \text{wo} \quad W = W_1 + W_2 + W_3. \tag{100 a}$$

W ist nur von Grössen, welche die Bewegung des Mutterkreisels bestimmen, abhängig; εW stellt in erster Annäherung die störende Einwirkung der Asymmetrie (im Bilde des Knopfkreisels) auf die

Koordinate ϑ in Form einer Drehkraft (53) dar. Weil aber die Bewegung des Mutterkreisels bekannt ist, kann W als gegebene reine Funktion der Zeit angesehen werden, und der Charakter der Gl. (100 a) ist demnach und nach (99):

100 b
$$\vartheta'' = F(\vartheta) + \varepsilon W(t).$$

Verschwindet die Störung mit $\varepsilon = 0$, so geht (100 a) von selbst in die 1. Gl. (90) über.

Berücksichtigen wir jetzt, dass die gestörte Bewegung der ungestörten benachbart ist, so dürfen wir beide Bewegungen durch die Gleichungen

101
$$\vartheta = \vartheta_\sigma + \varepsilon\eta \qquad \psi = \psi_\sigma + \varepsilon\xi \qquad \varphi = \varphi_\sigma + \varepsilon\zeta$$

einander zuordnen, wenn die Anfangsbedingungen ($t = 0$) für ξ, η, ζ lauten (p. 40):

102
$$(\xi)_0 = (\eta)_0 = (\zeta)_0 = 0, \quad \xi_0' = \eta_0' = \zeta_0' = 0.$$

Dadurch wird $F(\vartheta) = F(\vartheta_\sigma) + \varepsilon F'(\vartheta_\sigma)\eta$ nach der Taylor'schen Reihe, die mit dem 1. Gliede η abgebrochen ist. $F' = -\Omega^2$ gesetzt, kommt aus (100 b), weil $\vartheta_\sigma'' = F(\vartheta_\sigma)$:

103 Diff.-Gl. für die Störung der Koordinate ϑ.
$$\eta'' + \Omega^2\eta = W.$$

Indem wir F' nach (100 a) wirklich ausrechnen, erhalten wir:

104
$$\Omega^2 = -\frac{d\vartheta_\sigma''}{d\vartheta_\sigma} = -\frac{\vartheta_\sigma'''}{\vartheta_\sigma'} = \frac{d}{d\vartheta_\sigma}\left\{\frac{g_\sigma\bar{g}_\sigma}{s_\sigma^3} - p_0 s_\sigma\right\}$$
$$= \frac{n_1 g_\sigma + w_1\bar{g}_\sigma}{s_\sigma^2} - \frac{u_\sigma}{s_\sigma^4}\left\{p_0 s_\sigma^4 + 3\bar{g}_\sigma g_\sigma\right\} \equiv \Omega^2(u_\sigma).$$

u_σ ist eine doppelperiodische Funktion der Zeit, wie aus der Theorie des symmetrischen Kreisels bekannt ist, mithin auch Ω^2.

Die Störung W ist zwar im Allgemeinen nicht streng periodisch, aber eine aus periodischen Bestandteilen zusammengesetzte, allgemein zu reden, zwischen endlichen Grenzen oscillierende Funktion der Zeit.

Die Diff.-Gl. (103) gehört also zu den linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit doppelperiodischen Koeffizienten (Lamésche Gleichung). Ihr vollständiges Integral wird aus dem der komplementären Gleichung

105
$$\eta'' + \Omega^2\eta = 0$$

abgeleitet. Dieses sei $\eta = \eta_*$. Da Ω^2 als singuläre Stellen nur

Pole für diejenigen Werte von t besitzt, die $u_\sigma = \infty, \pm 1$ machen, so ist nach einem Theorem von PICARD η_c eine elliptische Funktion zweiter Art. Wir finden vermittelst η_c ein partikuläres Integral der Stammgleichung (103) in der Form:

$$\eta_P = \int \frac{dt}{\eta_c^2} \int W \eta_c \, dt, \quad \text{wo} \quad W \equiv W(t) \tag{106 a}$$

und damit das vollständige Integral:

$$\eta = \eta_c + \eta_P. \tag{106 b}$$

Während aber η_c hiernach nicht ohne Weitläufigkeiten gefunden wird, können wir wegen der besonderen Gestalt von Ω^2 das allgemeine Integral, abgesehen von einer Ausnahme, direkt formal bilden:

$$(104) \quad \Omega^2 = -\frac{\vartheta_\sigma'''}{\vartheta_\sigma'}, \quad \text{f. (103)} \quad \vartheta_\sigma' \eta'' - \vartheta_\sigma''' \eta = W \vartheta_\sigma'. \tag{107}$$

Es besteht die leicht zu verifizierende Identität:

$$\vartheta_\sigma' \eta'' - \vartheta_\sigma''' \eta = \left\{ \vartheta_\sigma'^2 \left(\frac{\eta}{\vartheta_\sigma'} \right)' \right\}' \quad (107) = W \vartheta_\sigma', \tag{108}$$

und nun folgt durch successive Quadraturen das allgemeine Integral

$$\eta = \vartheta_\sigma' \int \frac{d\vartheta_\sigma}{\vartheta_\sigma'^3} \int W d\vartheta_\sigma + \left\{ c \vartheta_\sigma' \int \frac{d\vartheta_\sigma}{\vartheta_\sigma'^3} + c' \vartheta_\sigma' \right\}. \tag{109}$$

Die allgemeine Lösung.

Es bedeuten c, c' die notwendigen, zunächst willkürlichen Konstanten. Sie sind dann durch die Anfangsbedingung (102) $(\eta)_0$, $\eta_0' = 0$ zu bestimmen.

W und ϑ_σ' sind hier in (109) als Funktionen von ϑ_σ zu denken; dies ist möglich, weil $t \equiv t(\vartheta_\sigma)$. Nach vollendeter Integration ist $\eta \equiv \eta(\vartheta_\sigma)$ (damit kennt man die Abhängigkeit der gestörten Koordinaten ϑ von der ungestörten ϑ_σ), aber durch $\vartheta_\sigma \equiv \vartheta_\sigma(t)$ wird $\eta \equiv \eta(t)$ (damit kennt man die gestörte Koordinate ϑ als explizite Funktion der Zeit (101)). Die Entwicklung von (107) bis (109) ist jedoch nicht statthaft, wenn dauernd ϑ_σ', also auch ϑ_σ''', verschwindet. Diesen Ausnahmefall werden und müssen wir besonders behandeln. Doch existieren sonst die in der allgemeinen Lösung (109) vorkommenden, mit ϑ_σ' multiplizierten Integrale im reellen, endlichen Bereich immer, auch für diejenigen Werte von ϑ_σ (seine Grenzwerte), für welche ϑ_σ' verschwindet, und zwar mit im Allgemeinen von 0 verschiedenen Werten. Wir übergehen den leichten Beweis dieser Behauptung.

η ist schon durch die Form (109) in zwei Summanden zerlegt. Der erste (das doppelte Integral) ist eine Partikularlösung der Stammgleichung (103) und werde mit η_g abgekürzt, der zweite ist diejenige Lösung, für welche $W = 0$ ist, also die der komplementären Gl. (105), und werde mit η_f abgekürzt. Daher:

110
$$\eta = \eta_f + \eta_g, \quad \begin{cases} \eta_f = c\vartheta'_\sigma \int \frac{d\vartheta_\sigma}{\vartheta'^2_\sigma} + c'\vartheta'_\sigma \\ \eta_g = \vartheta'_\sigma \int \frac{d\vartheta_\sigma}{\vartheta'^2_\sigma} \int W d\vartheta_\sigma. \end{cases}$$

η_f muss wesentlich mit η_c, f. η_g mit η_p übereinstimmen. Nehmen wir $\vartheta_\sigma \equiv \vartheta_\sigma(t)$, so wird $\eta_f = c\vartheta'_\sigma \int \frac{dt}{\vartheta'^2_\sigma} + c'\vartheta'_\sigma \equiv \eta_f(t)$. η_f ist eine wenigstens reell-periodische Funktion von t; denn sie ist aus der doppelperiodischen Funktion ϑ'_σ und dem Integral einer doppelperiodischen Funktion derselben Art zusammengesetzt. Das Integral $\int \frac{dt}{\vartheta'^2_\sigma}$ könnte wohl ein der Grösse t proportionales, aperiodisches Glied liefern, welches mit $c\vartheta'_\sigma$ multipliziert eine divergierende Schwingung ergeben würde; aber dies ist ebenso mit der Thatsache, dass η_c eine elliptische Funktion 2. Art sein muss, wie unabhängig von der Kenntnis des Picard'schen Theorems, damit, dass η''_c/η nach (103) eine doppelperiodische Funktion ist, im Widerspruch.

Somit stellt η_f die freie, d. h. von der Störung W unabhängige Schwingung des Mutterkreisels vor, mit derselben Periode, in welcher seine Spitze bei ungestörter Bewegung auf- und niederschwanken würde. Dieselbe Schwingung würde sich mit verschwindender Amplitude einer Bewegung des symmetrischen Kreisels superponieren, wenn man ihm plötzlich einen verschwindend kleinen Drehstoss erteilte, dessen Vektor in die Knotenlinie fällt. (z. B. durch einen Stoss auf die Kreiselachse, dessen Richtung in der Ebene durch die Vertikale und F-A liegt).

η_g stellt die gezwungene durch die Art und Grösse der Störung W bestimmte Bewegung vor. Sie ist, von Ausnahmen abgesehen, eine zusammengesetzte Schwingung innerhalb endlicher Grenzen.

Nach der Berechnung von η finden wir ξ (101) aus (88) oder (95): $\psi' = \frac{g}{s^2} - \frac{\varepsilon q_\sigma \cos\varphi_\sigma}{s_\sigma}$, und zwar, indem wir die Einzelheiten der Entwicklung übergehen, für ξ die Diff.-Gl.:

111
$$\xi' = \frac{\overline{g}_\sigma - u_\sigma g_\sigma}{s^3_\sigma}\eta + \frac{g_2 - u_\sigma \overline{w} - s_\sigma q_\sigma \cos\varphi_\sigma}{s^2_\sigma}.$$

Daraus ξ durch einfache Quadratur nach t. Die willkürliche Konstante wird durch $(\xi)_0 = 0$ bestimmt. Die Anfangsbedingung $\xi_0' = 0$ ist in (111) von selbst erfüllt: $(\eta)_0 = 0$, (94 b) $\overline{w}_0 = 0$, $g_{20} = n_2 - u_0\, w_2 = s_0 q_0 \cos\varphi_0$ (93 b). Wir können ξ ebenfalls in die Bestandteile der freien und gezwungenen Schwingung zerlegen:

$$\xi = \xi_f + \xi_g, \quad \begin{cases} \xi_f = \int \dfrac{\overline{g}_\sigma - u_\sigma g_\sigma}{s_\sigma^3}\, \eta_{1f}\, dt + c'' \\ \xi_g = \int dt \left\{ \dfrac{\overline{g}_\sigma - u_\sigma g_\sigma}{s_\sigma^3}\, \eta_{1g} + \dfrac{g_2 - u_\sigma \overline{w} - s_\sigma q_\sigma \cos\varphi_\sigma}{s_\sigma^2} \right\}. \end{cases} \qquad 112$$

Aus (110, 112) ergiebt sich die Gleichung der reduzierten Bahnkurve in den laufenden Koordinaten ϑ, ψ (101).

ζ berechnen wir aus der Gleichung (40 b, 41):

$$w_0 = c_0(\varphi' + \psi' u) \quad \text{oder} \quad \varphi' = a_0 w_0 - \psi' u \qquad 113$$

und finden, indem wir die Einzelheiten der Entwicklung weglassen, für ζ die Diff.-Gl.

$$\zeta' = \frac{g_\sigma}{s_\sigma}\, \eta - u_\sigma \xi' + a_1 \overline{w}, \qquad 114$$

und vermöge derselben Zerlegung in freie und gezwungene Schwingungen, wie vorher bei ξ, η:

$$\zeta = \zeta_f + \zeta_g, \quad \begin{cases} \zeta_f = \int \dfrac{g_\sigma - u_\sigma \overline{g}_\sigma}{s_\sigma^3}\, \eta_{1f}\, dt + c''' \\ \zeta_g = \int dt \left\{ \dfrac{g_\sigma - u_\sigma \overline{g}_\sigma}{s_\sigma^3}\, \eta_{1g} + \dfrac{(s_\sigma q_\sigma \cos\varphi_\sigma - g_2) + \overline{w}(a_1 s_\sigma^2 + u_\sigma^2)}{s_\sigma^2} \right\}. \end{cases} \qquad 115$$

Die willkürliche Konstante c''' ist so zu bestimmen, dass der Bedingung $(\zeta)_0 = 0$ genügt wird. Dagegen ist $\zeta_0' = 0$ in der Formel (114) von selbst erfüllt, denn $(\eta)_0 = 0$, $\xi_0' = \overline{w}_0 = 0$. Aus (115, 101) ergiebt sich die Koordinate der Drehung (φ) als Funktion der Zeit.

Allgemein gesprochen, können wir also schliesslich mit Recht behaupten:

Theorem über den Charakter der allgemeinen Bewegung.

1. Die Bewegung eines Kreisels vom Typus I mit kleiner Ellipticität besteht angenähert in einer zusammengesetzten Schwingung um den Bewegungszustand des korrespondierenden, symmetrischen Kreisels.

2. Die Elongationen dieser Schwingung sind der Grösse der Elliptizität proportional.

3. Indem wir uns den Einfluss der Asymmetrie in der selbständigen Wirkung einer störenden Drehkraft auf die Koordinaten der Lage vorstellten und für die Koordinate ϑ in erster Annäherung wirk-

lich berechneten, fanden wir: Durch die Störung werden die Eigenschwingungen des korrespondierenden, symmetrischen Kreisels angeregt, welche den einen Hauptbestandteil der zusammengesetzten Schwingung bilden. Der andere Hauptbestandteil hat den Charakter einer gezwungenen Schwingung. Jene haben eine einfache Periode, diese ist das Aggregat von mehreren verschieden-periodischen Funktionen.*

4. Die Bewegung ist durch den Anfangszustand vollständig und eindeutig bestimmt.

Es können aber Ausnahmefälle derart eintreten, dass die Elongationen der überlagerten, gezwungenen Schwingungen auch der Zeit proportional werden (säkulare Glieder), d. h. in unendlich ferner Zeit zu unendlicher Grösse, selbst bei beliebig kleinem ε, anwachsen würden. Diese Folgerung widerspricht völlig der Natur unseres mechanischen Problems, insbesondere dem Energie-Prinzip; die Ausnahmefälle zeigen also mit Sicherheit an, dass die sie darstellenden Gleichungen auch zeitlich beschränkte Genauigkeit besitzen. Der Grund dafür liegt in der Art des Näherungsverfahrens. Die Anschauungsweise einer unendlichen Reihe von Wechselwirkungen ist nicht mehr statthaft, und wollen wir in den Formeln dieser Fälle säkulare Glieder vermeiden, so bedarf die Methode einer dem speziellen Falle angepassten Modifikation, die allerdings mehr wie ein Kunstgriff erscheinen und die physikalische Bedeutung des Verfahrens verdunkeln wird. Ein Beispiel dafür wird sich, gerade in einem wichtigen Falle, alsbald einstellen.

Säkulare Glieder können auftreten entweder in $\overline{w}$ durch Integration von $p_\sigma q_\sigma$ nach t und damit divergierte die Störung W, oder durch $\int W \vartheta'_\sigma dt$ (110) und damit divergierte η_σ.

Offenbar trägt das auseinandergesetzte Näherungsverfahren den Keim einer vollständigen Reihenentwicklung in sich, wir brauchen es nur mit den expliciten Endformeln genau zu wiederholen. Diese Reihen würden aber ausserordentlich kompliziert werden, so dass wir im allgemeinen Falle und an dieser Stelle auf die Ausführung verzichten. Dagegen werde ich in zwei besonders ausgezeichneten Fällen die Rechnung mit den Formeln der 1. Annäherung soweit durchführen, dass sie als Grundlage einer experimentellen Prüfung dienen können:

A) Die schon erwähnte Ausnahme $\vartheta'_\sigma = 0$, für welche die formale Integration von (107) bis (109) hinfällig wird. Bedeutung:

---

*Genaues über diese Unterscheidung z. B. bei Routh II, Chapt. VII Art. 308 und 325.

Reguläre Präzession (stationäre) Bewegung des symmetrischen Mutterkreisels.

B) Die Bewegung bei grossem Eigenimpuls, der den Kreisel in rasche Anfangsrotation um die F-A versetzt. Sie ist theoretisch und praktisch wichtig und im symmetrischen Fall wegen der Verwechslung mit der regulären Präzession, die sie dem Auge, wenn besondere Vorrichtungen fehlen, gewöhnlich vortäuscht und deshalb viele falsche Erklärungen hervorgerufen hat, bei KS recht bezeichnend *pseudoreguläre Präzession** genannt worden.

Nachbarbewegung zur regulären Präzession

A. Ueber die aus der regulären Präzession abgeleitete Bewegung.

Bestimmungsstücke und Formeln der regulären Präzession: $\vartheta_\sigma = \text{const} = \vartheta_0$, entsprechend $u_\sigma = u_0$, $s_\sigma = s_0$. $\psi'_\sigma = \text{const} = \nu$, $\varphi'_\sigma = \text{const} = \mu$, f. $\varphi_\sigma = \mu t + \varphi_0$. Die Relation zwischen diesen Konstanten, welche die Bewegung als partikulär ausscheidet, schreiben wir (72 a): $p_0 s_0 = m_1 \nu$, oder weil $m_1 = (w_1 - n_1 u_0)/s_0 =$

(92) $(w_1 - \nu u_0) s_0$,

$$p_0 = (w_1 - \nu u_0)\nu. \quad (40\,a)\ p_\sigma + iq_\sigma = i\nu s_0 e^{-i\varphi_\sigma}. \qquad 116$$

Form der Diff.-Gl. (103): Berechnung von W.

$$(94\,b)\quad \overline{w} = \frac{s_0^2\nu^2}{4\mu}\{\cos 2\varphi_\sigma - \cos 2\varphi_0\}$$

$$(91)\quad g_\sigma = \nu s_0^2 \qquad (99)\quad g_2 = \nu s_0^2 \cos^2\varphi_0$$
$$\overline{g}_\sigma = (w_1 - \nu u_0) s_0^2 \qquad \overline{g}_2 = s_0^2(\mu + \nu u_0 \sin^2\varphi_0).$$

$$\left\{\begin{aligned}
&(96)\quad W_1 = \frac{p_0 s_0}{2} + \frac{p_0 s_0}{2}\cos 2\varphi_\sigma \\
&(97)\quad W_2 = \mu\nu s_0 \cos 2\varphi_\sigma \qquad 117 \\
&(98)\quad W_3 = -\frac{p_0 s_0}{2} - \frac{\nu s_0}{2}(2\mu + \nu u_0) - \frac{s_0}{2\mu}\{p_0(2\mu + \nu u_0) - \nu^2(2\mu u_0 + \nu)\}\cos 2\varphi_0 \\
&\qquad + \frac{\nu s_0}{4\mu}(p_0 u_0 - \nu^2)\cos 2\varphi_\sigma.
\end{aligned}\right.$$

Die Störung W ist eine einfache, harmonische Funktion der Zeit von folgender Gestalt:

$$W = T_0 + T_1 \cos(2\mu t + 2\varphi_0). \qquad 118\,a$$

Die Koeffizienten sind:

* KS Anzeige von II und II p. 209, 274; Kap. V § 2, 3.

118 b
$$\begin{cases} T_0 = -\dfrac{s_0\nu}{2}(2\mu+\nu u_0) - \dfrac{s_0}{4\mu}\left\{p_0(2\mu+\nu u_0) - \nu^2(2\mu+\nu)\right\}\cos 2\varphi_0 \\ T_1 = \dfrac{s_0}{4\mu}\left\{p_0(2\mu+\nu u_0) + \nu(4\mu^2-\nu^2)\right\}. \end{cases}$$

Es besteht dabei durch (116) zwischen μ und ν die Gleichung:

118 c
$$p_0 = c_1\mu\nu + (c_1-1)\nu^2 u_0.$$

Berechnung von Ω. Da $\Omega^2 \equiv \Omega^2(u_\sigma)$ so ist hier Ω = const, nämlich (104, 90):

119 a
$$\Omega^2 = \frac{n_1(n_1-u_0 w_1)+w_1(w_1-u_0 n_1)}{s_0^2} - 4p_0 u_0$$
$$= \frac{n_1^2+w_1^2-2n_1 w_1 u_0 - 4p_0 u_0(1-u_0^2)}{1-u_0^2}.$$

Es ist aber bemerkenswert, dass sich vermöge der Präzessions-Gl. (116) Ω^2 als Funktion von ν in der folgenden, einfachen Weise darstellen lässt:

119 b
$$\Omega^2 = \frac{(p_0-\nu^2 u_0)^2+\nu^4 s_0^2}{\nu^2}.$$

Hieraus wird Ω^2 sogleich als wesentlich positive Grösse erkannt. (Für $p_0 = 0$ wird $\Omega = \nu$, wie es auch sein muss). Die Diff.-Gl. (103) besitzt demgemäss als vollständige Lösung für η eine aus zwei einfachen harmonischen Schwingungen zusammengesetzte Funktion der Zeit: Eine freie (komplementäre) von der Periode $2\pi/\Omega$ und eine erzwungene (partikuläre) von der Periode π/μ. Der Leser wolle sich überzeugen, dass jene nach (119 a) im Ausdruck mit der Grösse 2ω bei KS II p. 288 übereinstimmt, dass demnach die komplementäre Schwingung die zur regulären Präzession gehörige Eigenschwingung des symmetrischen Kreisels ist, welche durch einen verschwindend kleinen Anstoss, dessen Vektor in die Knotenlinie fällt, mit verschwindender Amplitude aus der regulären Präzession erzeugt wird.

Integration der Diff.-Gl. Die vollständige Lösung leiten wir ab aus der Form:

120
$$\eta = \frac{1}{\Omega}\int_0^t \sin\Omega(t-\tau)\,W(\tau)\,d\tau,$$

in welcher den Anfangsbedingungen $(\eta)_0 = 0$, $\eta_0' = 0$ bereits Genüge geleistet ist, und die eine auch im Fall der sog. Resonanz gültig bleibende Formel darstellt. Sofern $\Omega^2 \neq 4\mu^2$, kommt aus (120):

$$\eta_l = \eta_{l0} + \eta_{l1}\cos(\Omega t + X_0) + \eta_{l2}\cos(2\mu t + 2\varphi_0) \qquad 121\,a$$

$$\begin{cases} \eta_{l0} = T_0/\Omega^2 & \eta_{l1}\sin X_0 = -\eta_{l2}\dfrac{2\mu}{\Omega}\sin 2\varphi_0 \\ \eta_{l2} = T_1/(\Omega^2 - 4\mu^2) & \eta_{l1}\cos X_0 = -\eta_{l0} - \eta_{l2}\cos 2\varphi_0. \end{cases} \qquad 121\,b$$

ξ erhalten wir bequem aus Gl. (111), die durch Substitution der berechneten Grössen sich folgendermassen gestaltet:

$$\xi' = \frac{p_0 - \nu^2 u_0}{s_0 \nu}\eta_l + \frac{\nu}{4\mu}(2\mu + \nu u_0)\{\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_\sigma\}, \qquad 122$$

woraus, nachdem der Wert (121 a) von η_l eingesetzt ist,

$$\xi = \nu_1 t + \xi_0 + \xi_1 \sin(\Omega t + X_0) + \xi_2 \sin(2\mu t + 2\varphi_0) \qquad 123\,a$$

folgt. ξ_0 wird durch $(\xi)_0 = 0$ bestimmt.

$$\begin{cases} \nu_1 = \eta_{l0}\dfrac{p_0 - \nu^2 u_0}{\nu s_0} + \dfrac{\nu}{4\mu}(2\mu + \nu u_0)\cos 2\varphi_0, \quad \xi_1 = \eta_{l1}\dfrac{p_0 - \nu^2 u_0}{\Omega \nu s_0} \\ \xi_0 = -\xi_1 \sin X_0 - \xi_2 \sin 2\varphi_0 = \qquad \xi_2 = \eta_{l2}\dfrac{p_0 - \nu^2 u_0}{2\mu\nu s_0} - \dfrac{\nu}{8\mu}(2\mu + \nu u_0) \\ \qquad \left\{\dfrac{\nu}{8\mu^2}(2\mu + \nu u_0) - \dfrac{T_1}{\Omega}\dfrac{p_0 - \nu^2 u_0}{2\mu\nu s_0}\right\}\sin 2\varphi_0. \end{cases} \qquad 123\,b$$

Die Darstellung von ζ, die aus (114) leicht berechnet und von derselben Art wie ξ ist, können wir unterlassen. Die Drehung φ hat einen leicht ungleichförmigen Gang durch eine der konstanten Rotation überlagerte, aus der freien und gezwungenen Schwingung zusammengesetzte Oscillation.

Gleichungen der reduzierten Bahnkurve

Die Gleichungen der reduzierten Bahnkurve zusammengestellt lauten:

$$\begin{cases} \vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon\eta_l = \vartheta_0 + \varepsilon\{\eta_{l0} + \eta_{l1}\cos(\Omega t + X_0) + \eta_{l2}\cos(2\mu t + 2\varphi_0)\} \\ \psi = \nu t + \varepsilon\xi = (\nu + \varepsilon\nu_1)t + \varepsilon\{\xi_0 + \xi_1 \sin(\Omega t + X_0) + \xi_2 \sin(2\mu t + 2\varphi_0)\}. \end{cases} \qquad 124$$

Stereographische Projektion.

Bedienen wir uns einer der Einheitskugel eigentümlichen komplexen Grösse λ, welche durch stereographische Projektion des Sternes vom Zenith auf den Horizont seinen Ort bestimmt, zur Darstellung der reduzierten Bahnkurve, so wird

$$\lambda = \cot\vartheta/2\; e^{i\psi} = \cot\vartheta_0/2\; e^{i\bar{\nu}t}\{1 + i\varepsilon(\bar{\xi} + i\bar{\eta})\} \qquad 125\,a$$

bis auf ε^2 genau. Es bedeuten:

$$\bar{\nu} = \nu + \varepsilon\nu_1 \quad \bar{\eta} = \eta/s_0 \quad \bar{\xi} = \xi - \nu_1 t \text{ (123 a).} \qquad 125\,b$$

Die Gl. (125 a) legt eine gewöhnliche kinematische Deutung der F-A-Bewegung nahe: Nämlich $\cot\vartheta_0/2\, e^{i\bar{\nu}t}$ ist eine reguläre

Präzession der F-A, relativ zum Präzessionskreis die Nutation $i\varepsilon \cot \vartheta_0/2\,(\bar{\xi}+i\bar{\eta})$. Nun wird die Bewegung genau von folgendem zwangläufigen Mechanismus ausgeführt: Eine Stange, $\cot \vartheta_0/2$ Einheiten lang, rotiert um das im Mittelpunkt der Einheitskugel gelagerte Ende mit der gleichförmigen ∢-Geschwindigkeit $\bar{\nu}$ in der Horizontebene; dem anderen Ende ist ein Stäbchen von der Länge $\varepsilon\sqrt{\xi_0^2+\bar{\eta}_0^2}$ unter dem ∢ $\operatorname{arctg}(-\xi_0/\bar{\eta}_0)$ fest angegliedert. Auf einem Stift am freien Ende des Stäbchens sitzt ebenfalls fest eine elliptische Scheibe, deren erste Achse $2\varepsilon\bar{\eta}_1$ (val. abs.) parallel der Stange gerichtet ist, und deren zweite Achse die Grösse $2\varepsilon\xi_1$ (v. a.) hat. In einer Fahrrinne, welche den Rand dieser Scheibe bildet, läuft vermittelst eines Stiftes der Mittelpunkt einer zweiten elliptischen Scheibe mit der gleichförmigen ∢-Geschwindigkeit Ω um den Mittelpunkt der ersten Scheibe. Die erste Achse der zweiten Scheibe von der Länge $2\varepsilon\bar{\eta}_2$ (v. a.) ist der Stange parallel, die zweite Achse hat die Grösse $2\varepsilon\xi_2$ (v. a.). Ein Punkt, der sich den Rand dieser Scheibe entlang mit der gleichförmigen ∢-Geschwindigkeit 2μ um ihren Mittelpunkt bewegt, beschreibt alsdann die Bahn des Punktes λ.

Wir können auch sagen, dass die Bewegung der F-A relativ zur Präzession aus zwei elliptischen Nutationen zusammengesetzt ist. Die allgemeinen Sätze Nr. 1 bis 4 gelten auch für diesen Fall der Bewegung.

Säkulare lle. Resonanz.

Die Formeln (124) hören auf zu gelten, wenn $\mu = 0$ oder $\Omega = \pm 2\mu$ $(\mu \gtrless 0)$ wird. $\mu = 0$ bedeutet die konische Pendelbewegung des Mutterkreisels. Die dann immer noch richtige Formel (94 b) ergiebt $\bar{w} = \nu^2 s_0^2/2 \sin 2\varphi_0 t$, und die Störung W wird säkular, abgesehen von dem besonderen Fall $\sin 2\varphi_0 = 0$. In diesem aber ist auch der asymmetrische Kreisel von beliebiger Elliptizität einer konischen Pendelbewegung fähig (s. die Tabelle am Schluss des II. Abschnittes). $\Omega = \pm 2\mu$ bedeutet Uebereinstimmung der Perioden der natürlichen und gezwungenen Schwingung, also Resonanz, und die noch richtige Formel (120) führt zu divergierenden Schwingungen. Die Realität der Resonanz hängt von der Natur der quadratischen Gleichung für ν^2:

126 a

$$a\nu^4 - 2b\nu^2 + c = 0$$

ab, wo

126 b

$$a = C_1^2 - (C_1 - A_1)^2 u_0^2 \quad b = \frac{P u_0}{A_1}(C_1^2 - A_1 C_1 + A_1^2) \quad c = \frac{P^2}{A_1^2}(C_1^2 - 4A_1^2);$$

nämlich Resonanz ist nur möglich, wenn diese Gleichung wenig-

stens eine reelle und positive Wurzel für ν^2 liefert. Sie kann z. B. für $\vartheta_0 = 90°$ niemals eintreten, wenn $C_1 > 2A_1$ ist.

Von der Ausführung der Formeln für die säkularen Fälle will ich absehen.

Der Diff.-Quot. $\frac{d\vartheta}{d\psi}$, welcher die Richtung der reduzierten Bahnkurve in jedem Punkte bestimmt, hat den Wert:

$$\frac{d\vartheta}{d\psi} = \frac{\vartheta'}{\psi'} = \frac{\varepsilon\eta'}{\nu + \varepsilon\xi'}, \qquad 127$$

und wir erkennen: Ist ε so klein, dass $\varepsilon|\xi'|_{\text{Max.}} < |\nu|$, so treten in der Bahnkurve weder Spitzen noch Schleifen auf.

Die Perioden der beiden Nutationen studiert man am besten in ihrer eindeutigen Abhängigkeit von ν (118c, 119b). Die Frequenz der gezwungenen Nutationen ist doppelt so gross als die Zahl der Umläufe der Knotenlinie in der Aequatorebene des Mutterkreisels während einer Sekunde. Nach der Darstellung:

$$\begin{cases} p_0 > 0 & \Omega = \sqrt{p_0}\ \sqrt{\nu'^2 + \nu'^{-2} - 2\cos\vartheta_0} & \nu = \nu'\sqrt{p_0} \\ p_0 < 0 & \Omega = \sqrt{-p_0}\sqrt{\nu'^2 + \nu'^{-2} + 2\cos\vartheta_0} & \nu = \nu'\sqrt{-p_0} \end{cases} \qquad 128$$

kann Ω als Funktion von ν leicht graphisch versinnlicht werden, wie Fig. 4 für $\vartheta_0 = 30°$ (ν' = Abscisse, $\Omega' = \Omega/\sqrt{p_0}$ und $\Omega/\sqrt{-p_0}$ als

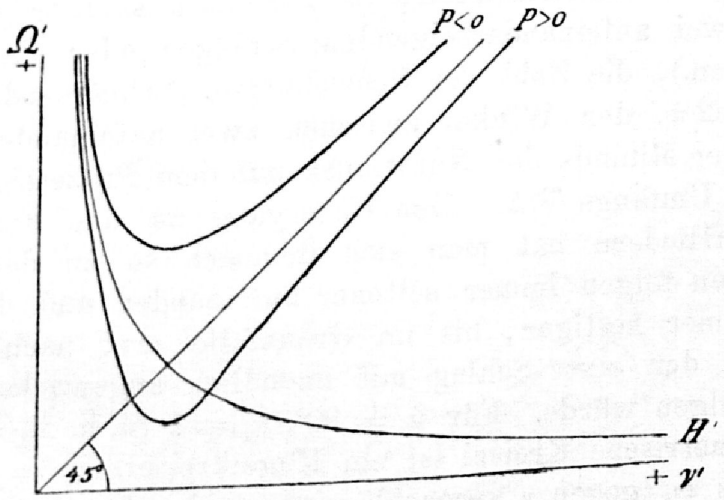


Fig. 4.

Ordinaten) entworfen ist. Die Unterscheidung $p_0 \gtrless 0$ kommt auf dasselbe hinaus wie eine Vertauschung von ϑ_0 mit $\pi - \vartheta_0$. Die beiden Kurven schmiegen sich mit verschwindendem ν' asymptotisch an die Hyperbel $H = \frac{1}{\nu'}$, mit unendlich wachsendem ν' an

die unter 45° gegen die ν'-Achse geneigte Gerade an und besitzen für $\nu' = 1$ ein einziges Minimum. Der Verlauf ist für negative ν symmetrisch zur Achse der Ordinaten. Die Frequenz der Eigennutationen eines Kreisels $(\Omega/2\pi)$ mit Schwerpunkt über dem Stützpunkt ist immer kleiner, als wenn der Schwerpunkt unter dem Stützpunkt liegt bei derselben Neigung der F-A und demselben absoluten Betrage des grössten Drehmoments der Schwere. Reziprok verhält sich die Periode.

Die, höchstens zwei, Schnittpunkte der Kurve

129 $\begin{cases} \Omega/\sqrt{p_0} \text{ mit der Hyperbel}^* \dfrac{2\mu}{\sqrt{p_0}} = \dfrac{2a_1}{\nu'} - 2(1-a_1)u_0\nu', \text{ resp.} \\ \Omega/\sqrt{-p_0} \text{ mit der Hyperbel } \dfrac{2\mu}{\sqrt{-p_0}} = -\dfrac{2a_1}{\nu'} - 2(1-a_1)u_0\nu' \end{cases}$

im ersten Quadranten geben die Resonanzfälle an. Für die Umgebung dieser Stellen, wo also Ω nahe an $\pm 2\mu$, muss das besonwebungen. ders merkwürdige *Phänomen der Schwebungen* statthaben, wie immer, wo natürliche mit aufgeprägten Oscillationen in Konkurrenz treten. Die Schwebungen werden sich an der Kreiselspitze durch eine abwechselnde Reihe grosser und kleiner Nutationen in regelmässiger Folge äussern. Analog dem Sprachgebrauch der Akustik** nennen wir die Stellen stärkster Nutationen Schläge, diejenigen schwächster Nutationen Pausen. Sei $\Omega - 2\mu = \Delta$ gesetzt, so beträgt die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schlägen oder Pausen $2\pi/\Delta$ $(\mu > 0$ angen.), die Zahl der Schwebungen (Schläge oder Pausen) pro Sek. $\Delta/2\pi$, der Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maximis oder Minimis der Nutationen auf dem Präzessionskreis in Teilen des Umfangs $\overline{\nu}/\Delta$. Den Uebergang zu den Formeln mit säkularen Gliedern hat man sich demnach so zu denken: Die Schwebungen folgen immer seltener aufeinander und die Schläge werden immer heftiger, bis im Grenzfalle erst nach unendlich ferner Zeit der erste Schlag mit unendlich angewachsener Elongation erfolgen würde. Für $\vartheta_0 = 90°$, $a_1 = 1$ (d. h. $A_1 = C_1$; der korr. symmetrische Kreisel ist ein Kugelkreisel), $\overline{\nu} = \nu$ (ε sei so klein, dass $\varepsilon\nu_1$ gegen ν vernachlässigt werden kann) und die unwesentliche Annahme $p_0 > 0$ ist die folgende Tabelle berechnet:

---

* und zwar nur demjenigen Ast, der positive μ repräsentiert.

** z. B. H. v. HELMHOLTZ, Die Lehre von den Tonempfindungen, Achter Abschnitt, insbesondere p. 274.

ν'	$\Omega/\sqrt{p_0}$	$2\mu/\sqrt{p_0}$	$\Delta/\sqrt{p_0}$	val. abs. $\frac{\nu}{\Delta}\cdot 2\pi$	Zahl der Schweb. pro 100 Präzess.
1.0	1.41	2.00	− 0.59	1.69 2π	59
1.1	1.43	1.82	0.39	2.82	35
1.2	1.46	1.67	0.21	5.72	18
1.3	1.51	1.54	0.03	43.3	2
1.315	1.5191	1.5209	0.0018	ca. 700	
$\sqrt[4]{3}$*	$2:\sqrt[4]{3}$	$2:\sqrt[4]{3}$	0	∞	0
1.4	1.57	1.43	+ 0.14	10.0	14
1.6	1.72	1.25	0.47	3.41	29
1.8	1.88	1.11	0.77	2.34	43
2.0	2.06	1.00	1.06	1.88	53

Die Zahlen der ersten vier Kolonnen geben die relativen Werte von ν, Ω, 2μ, Δ an, die Zahlen der beiden letzten Kolonnen gelten, was auch p_0 für einen Wert habe.

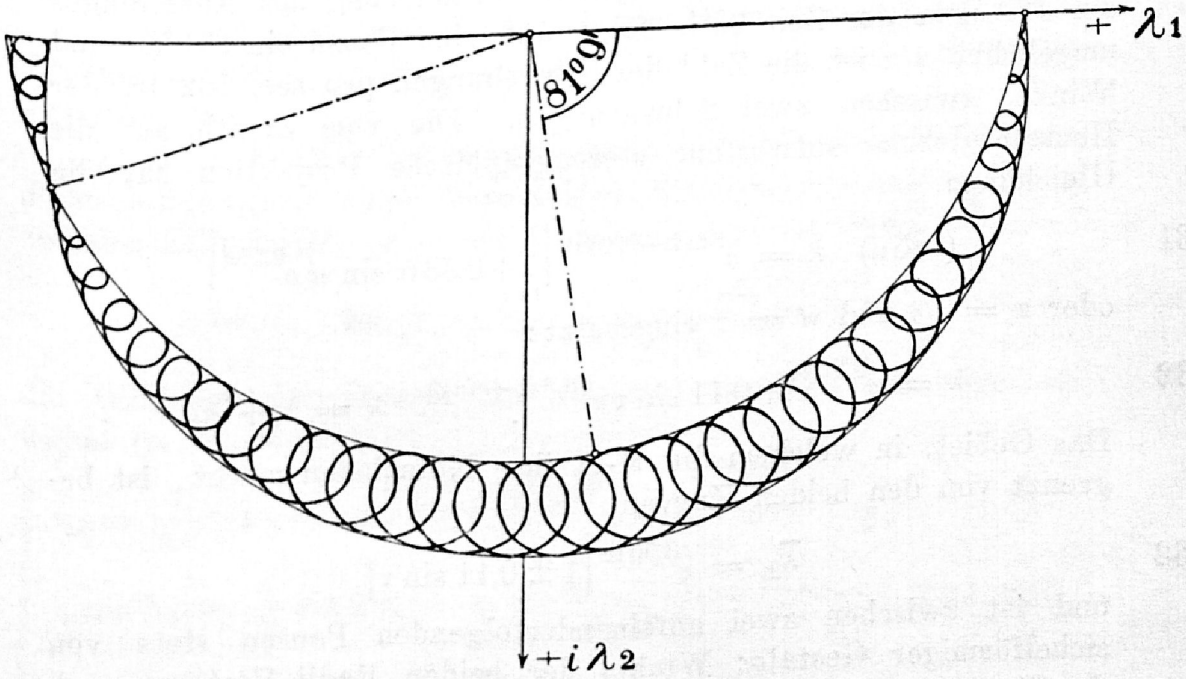


Fig. 5.

*$\sqrt[4]{3} = 1.316074$

Die Schwebungen sollen durch Fig. 5 an einem einfachen Beispiel veranschaulicht werden. Ich habe gewählt: $\vartheta_0 = 90°$, $\varphi_0 = 0$ (f. $X_0 = 0$), $c_1 = C_1/A_1 = 2 \cdot 31/32 = 1{,}94$, $\varepsilon = 1/5$, $\mu = 32\nu$. ν oder p_0 bleibt beliebig, ν sei jedoch positiv vorausgesetzt. Nach der Gleichung der Präzession $p_0 = c_1 \mu\nu$ folgt $p_0 = 62\nu^2 > 0$. (119 b) $\Omega = 62\nu$. Die Formeln (118 b, 121 b, 123 b) ergeben:

$$\eta_0 = -0{,}016 \qquad \eta_1 = +0{,}274 \qquad \eta_2 = -0{,}258,$$
$$\xi_0 = 0 \qquad \xi_1 = +0{,}274 \qquad \xi_2 = -0{,}258,$$

und $\nu_1 = -0{,}492\nu$, mithin $\overline{\nu} = \nu(1 - 0{,}492\varepsilon)$. Damit (124):

130 a
$$\begin{cases} \vartheta = 90° + \varepsilon\{-0{,}016 + 0{,}274\cos\Omega t - 0{,}258\cos 2\mu t\} \\ \psi = (1 - 0{,}492\varepsilon)\nu t + \varepsilon\{0{,}274\sin\Omega t - 0{,}258\sin 2\mu t\}. \end{cases}$$

Zeichnen wir die reduzierte Bahnkurve auf eine Kugel von 50 mm Radius auf, so dürfen wir für $\varepsilon = 1/5$ Beträge bis $0{,}016\,\varepsilon$ weglassen, die auf der Einheitskugel weniger als $^2/_{10}$ mm ausmachen, also 0,274 und 0,258 durch den arithmetischen Mittelwert 0,266 ersetzen und nun (130 a) anders schreiben:

130 b
$$\begin{cases} \vartheta = 90° + 0{,}53\,\varepsilon\sin\nu t\sin 63\,\nu t \\ \psi = (1 - 0{,}49\,\varepsilon)\nu t + 0{,}53\sin\nu t\cos 63\,\nu t. \end{cases}$$

Die Gl. (130 b) zeigen den Charakter der Schwebungen unmittelbar an. $0{,}53\,\varepsilon\sin\nu t$ ist die langsame Veränderung des Ausschlages der F-A; in der Zeit $90°/\nu$ folgt auf eine Pause ein Schlag und umgekehrt, ν/π ist die Zahl der Schwebungen pro sec, 162° 18′ der Winkel zwischen zwei Schwebungen. Die vom Zenith auf die Horizontalebene entworfene stereographische Projektion hat die Gleichung:

131
$$(125\,a)\quad \lambda = e^{i\nu t(1-0{,}49\,\varepsilon)}\{1 + 0{,}53\,i\varepsilon\sin\nu t\, e^{63\,i\nu t}\}$$

oder $\varepsilon = 1/5$ und $\nu t = \tau$ eingesetzt:

132
$$\lambda = e^{0{,}90\,i\tau} + 0{,}11\sin\tau\, e^{63{,}9\,i\tau + i\pi/2}, \qquad \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2.$$

Das Gebiet, in welchem die F-A ihre Nutationen macht, ist begrenzt von den beiden Kurven

133
$$\overline{\lambda}_\pm = e^{0{,}90\,i\tau}\{1 \pm 0{,}11\sin\tau\}$$

und ist zwischen zwei aufeinanderfolgenden Pausen stets von sichelförmiger Gestalt: Winkel der beiden Radii Vectores nach den Spitzen $2 \cdot 81° 9'$, grösste Breite der Sichel 11 mm. Die reduzierte Bahn hat Schleifen, weil sie erst von $\varepsilon = 1/34$ abwärts verschwinden.

Reine Schwebungen mit vollständigen Pausen finden statt, wenn $\eta_{l2} = \pm \eta_{l1}$. Beispiel: $\vartheta_0 = 90°$, $\varphi_0 = 0$ (f. $X_0 = 0$), $c_1 = 1$. Es wird $\eta_{l2} = -\eta_{l1}$, wenn $\eta_{l0} = 0$ oder $T_0 = 0$. Setze $\nu^2 = \alpha p_0$, mithin $\mu^2 = p_0/\alpha$ und wegen $T_0 = 0$ die Gl. $\alpha^2 + 2\alpha - 6 = 0$, f. $\alpha_\pm = \pm\sqrt{7} - 1$, α_+ wenn $p_0 > 0$, α_- wenn $p_0 < 0$. $\Omega^2 = p_0(\alpha + \alpha^{-1})$, $\overline{\nu} = \nu(1 - \varepsilon'\alpha)$. Der Winkel zwischen zwei Schwebungen beträgt $\frac{\alpha(1-\varepsilon'\alpha)}{\sqrt{1+\alpha^2}-2} 2\pi$, also

$$\text{für } p_0 > 0\colon\ 22{,}5 \cdot 2\pi, \quad \text{für } p_0 < 0\colon\ 2{,}06 \cdot 2\pi,$$

wenn wir $\varepsilon'\alpha$ vernachlässigen. p_0 kann dabei einen beliebigen Wert haben. Ferner die Zahlenwerte von

$$\Omega_+ = 1{,}50\sqrt{p_0} \quad 2\mu_+ = 1{,}50\sqrt{p_0} \quad \nu_+ = 1{,}28\sqrt{p_0} \quad \Delta_+ = -0{,}06\sqrt{p_0}$$
$$\Omega_- = 1{,}98\sqrt{-p_0} \quad 2\mu_- = 1{,}05\sqrt{-p_s} \quad \nu_- = 1{,}91\sqrt{-p_0} \quad \Delta_- = +0{,}93\sqrt{-p_0},$$

und weil $\eta_{l2} = \frac{3-\alpha}{3-2\alpha}$, $\xi_1 = \frac{\eta_{l1}}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $\xi_2 = \frac{\eta_{l2}}{2} - \frac{\alpha}{4}$ von

$$\eta_{l1+} = +4{,}65 \quad \eta_{l2+} = -4{,}65 \quad \xi_{1+} = +2{,}40 \quad \xi_{2+} = -2{,}73$$
$$\eta_{l1-} = -0{,}65 \quad \eta_{l2-} = +0{,}65 \quad \xi_{1-} = -0{,}17 \quad \xi_{2-} = +1{,}23.$$

Die Werte der Perioden der Teilschwingungen sind relativ, die ihrer Amplituden absolut.

Zwei spezielle Fälle.

Ohne auf eine vollständige Besprechung der anderen Bahntypen einzugehen, wollen wir die Formeln nur noch auf 2 Fälle spezialisieren.

1) $p_0 = 0$. Wir bekommen annähernde Gleichungen für die Poinsot-Bewegung eines dreiachsigen Kreisels von kleiner äquatorialer Elliptizität. Aus der Gleichung der reg. Präz. wird

$$\mu = \varkappa\nu, \quad \text{wo} \quad \varkappa = (a_1 - 1)u_0 = \frac{A_1 - C_1}{C_1}\cos\vartheta_0, \qquad \textbf{134 a}$$

die Winkelgeschwindigkeit der Eigenschwingung, wie schon erwähnt (p. 50), $\Omega = \nu$.

$$\left\{\begin{aligned}
&\eta_0 = \frac{s_0}{4\varkappa}\{(2\varkappa+1)\cos 2\varphi_0 - (2\varkappa+u_0)2\varkappa\}, \quad \eta_{l2} = -\frac{s_0}{4\varkappa},\\
&\eta_{l1}\sin X_0 = \frac{s_0}{2}\sin 2\varphi_0 \qquad \eta_{l1}\cos X_0 = \frac{s_0}{2}\{-\cos 2\varphi_0 + (2\varkappa + \nu u_0)\}\\
&\nu_1 = \frac{\nu}{4\varkappa}\{(u_0-1)\cos 2\varphi_0 + (2\varkappa+u_0)2\varkappa u_0\}\\
&\xi_1 = -\frac{\eta_{l1}u_0}{s_0}, \qquad \xi_2 = -\frac{\eta_{l2}u_0}{2\varkappa s_0} - \frac{2\varkappa+u_0}{8\varkappa^2}.
\end{aligned}\right. \qquad \textbf{134 b}$$

Die Formeln* bleiben hier, auch wenn $\Omega = \pm 2\mu$ oder $\varkappa = \pm 1/2$, bestehen, der im allgemeinen Falle dann verschwindende Faktor des Nenners von η_{i2} (hier: $\nu^2 - 4\mu^2$) ist durch Heben fortgefallen. Die Amplituden der Teilschwingungen hängen ausser von ϑ_0, φ_0 nur noch von der Massenverteilung des Körpers, nicht von den Anfangswerten der Geschwindigkeit ab, wie es der allgemeinen Theorie entspricht.

2) ν klein gegen μ (Langsame Präzession), so dass der Bruch ν/μ vernachlässigt werden kann. Mithin

135 a $$p_0 = c_1\mu\nu, \quad \Omega = c_1\mu\ (\mu > 0) = w_1, \quad T_0 = -\frac{s_0 p_0}{2}(2a_1 + \cos 2\varphi_0),$$

$$T_1 = \frac{s_0 p_0}{2c_1}(c_1 + 2);$$ und damit

135 b $$\begin{cases} \eta_{i0} = -\dfrac{s_0\nu_1}{2w_1}(2a_1 + \cos 2\varphi_0) = -s_0\dfrac{A_1 P}{2C_1^2\mu^2}\dfrac{2A_1 + C_1\cos 2\varphi_0}{C_1} \\ \eta_{i2} = +\dfrac{s_0\nu_1}{2w_1}\dfrac{c_1}{c_1 - 2} = +s_0\dfrac{A_1 P}{2C_1^2\mu^2}\dfrac{C_1}{C_1 - 2A_1} \\ \xi_1 = \eta_{i1}s_0, \quad \xi_2 = \dfrac{c_1\eta_{i2}}{s_0} - \dfrac{\nu}{4\mu} = +\dfrac{A_1 P}{2C_1^2\mu^2}\dfrac{C_1}{C_1 - 2A_1} \\ \nu_1 = -a_1\nu = -\dfrac{A_1 P}{C_1^2\mu}. \end{cases}$$

Resonanz tritt ein, wenn $C_1 = 2A_1$. Die Perioden und Amplituden der beiden Teilschwingungen nehmen mit wachsender Grösse der anfänglichen $\measuredangle$-Geschw. um die F-A ab, und zwar die Perioden im einfachen, die Amplituden im quadratischen, reziproken Verhältnisse dieser Zahl.

Nachbarbewegung zur pseudoregulären Präzession.

B. Ueber die aus der pseudoregulären Präzession abgeleitete Bewegung.

Wir untersuchen jetzt die Bewegung bei grossem Eigenimpuls, präzis, wenn AP/N^2 und ν/μ kleine Zahlen sind, so dass der Impulsvektor während der Bewegung beständig in der Nähe der F-A verweilt. Der Quotient AP/N^2 bedeutet für den symmetrischen Kreisel das Periodenverhältnis der Nutation zur Präzession und wird mit den eingeführten Bezeichnungen p_0/w_1^2 geschrieben. Die Nutation wird mit einer in allen praktischen Fällen befriedigenden Annäherung durch einen einfachen harmo-

*Sie enthalten 2 trigonometrische Funktionen, weil zwar der zu μ, ν gehörige konstante Impulsvektor des Mutterkreisels vertikal steht, nicht aber der des asymmetrischen Kreisels.

nischen Schwingungsvorgang dargestellt. Die Formeln von KS (II p. 297 und 303) eignen sich hier nicht, weil sie die Nickbewegungen nicht auf den Anfangswert ϑ_0, sondern auf eine Mittellage der F-A beziehen. Sie lauten aber, unseren Zwecken leicht angepasst:

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta_\sigma &= \vartheta_0 + \delta(1-\cos \overline{w}_1 t) \\ \psi'_\sigma &= \nu_1 - \nu_2 \cos \overline{w}_1 t \\ \varphi_\sigma &= \varphi_1 - \frac{\delta u_0}{s_0} \sin \overline{w}_1 t, \qquad \varphi_1 = \varphi_0 + \overline{\mu} t. \end{aligned}\right. \tag{136 a}$$

Es bedeuten in (136 a):

$$\nu_1 = p_0/w_1 \qquad \nu_2 = \nu_1 - \nu \qquad \delta = \nu_2 s_0/w_1 \tag{136 b}$$

ν/μ, ν/w_1, ν_1/w_1 und mithin δ sind Grössen, deren Quadrate wir vernachlässigen müssen. Ferner:

$$\left\{\begin{aligned} \overline{w}_1^2 &= w_1^2\{1-(3\nu+\nu_1)u_0/w_1\} \text{ oder } u_0 \text{ durch den cos der Mittellage } \vartheta_m \text{ ersetzt:} \\ \overline{w}_1^2 &= w_1^2\{1-4\nu_1 u_m/w_1\}, \qquad \overline{\mu} = \mu\{1+\nu_2 u_0/\mu\}. \end{aligned}\right. \tag{136 c}$$

Die Faktoren $\{\}$ können wir vielfach als unbeträchtliche Grössen weglassen, indem wir kürzer $\overline{w}_1 = w_1$, $\overline{\mu} = \mu$ nehmen.

Aus (136) folgt:

$$\left\{\begin{aligned} u_\sigma &= u_0 - \delta s_0(1-\cos \overline{w}_1 t) \qquad s_\sigma = s_0 + \delta u_0(1-\cos \overline{w}_1 t) \\ p_\sigma + iq_\sigma &= is_0\{\nu_1 e^{-i\varphi_1} - \nu_2 e^{i(\overline{w}_1 t - \varphi_1)}\}. \end{aligned}\right. \tag{136 d}$$

Die Anwendung der vorstehenden Formeln auf die Diff.-Gl. (103) ergiebt nun: (104) $\Omega^2 = -\vartheta'''_\sigma/\vartheta'_\sigma = \overline{w}_1^2$. In W erscheinen mehrere Glieder mit $\cos \overline{w}_1 t$ z. B. in $W_2 = \{q_\sigma \sin \varphi_\sigma\}'$, wie man nach (136 d) leicht bemerkt. Da die Teilschwingung, welche dem Gesetz $\tau_l'' + \overline{w}_1^2 \tau_l = H \cos \overline{w}_1 t$ gehorcht, wegen Resonanz divergiert, so enthalten die endlichen Gleichungen der Bewegung säkulare Glieder der zweiten Art (p. 48).

Wir können aber in dem vorliegenden Falle die säkularen Glieder durch die folgende Abänderung der Näherungsmethode vermeiden. Es werden die gefährlichen Glieder, d. h. alle, welche durch die allgemeine Methode Resonanz veranlassen würden, gesammelt und zunächst ungeändert gelassen.

Diff.-Gl. (88): $\vartheta'' - \varepsilon\{q \sin \varphi\}' = p_0 - \overline{m}\psi'$, $\psi' = \frac{g}{s^2} - \frac{\varepsilon q}{s} \cos \varphi =$ $\frac{g}{s^2} - \varepsilon'\psi' + \varepsilon'\left\{\frac{\vartheta'}{s} \sin 2\varphi - \psi' \cos 2\varphi\right\}$, $\varepsilon'\psi'$ als gefährliches Glied ab-

gesondert (136 a). Nun

137 $$\overline{m}\psi' = \frac{g\overline{g}}{s^3}(1-\varepsilon') - \frac{\varepsilon'\overline{g}_\sigma}{s_\sigma^2}\{-\vartheta'_\sigma \sin 2\varphi_\sigma + \psi'_\sigma s_\sigma \cos 2\varphi_\sigma\}$$

138 $$\begin{cases} g = g_0 - \varepsilon u_\sigma \overline{w}, & \text{wo } g_0 = n_0 - uw_0 \equiv g_0(\vartheta) \\ \overline{g} = \overline{g}_0 + \varepsilon\overline{w}, & \text{wo } \overline{g}_0 = w_0 - un_0 \equiv \overline{g}_0(\vartheta); \text{ f.} \end{cases}$$

139 $$\frac{g\overline{g}}{s^3}(1-\varepsilon') = \frac{g_0\overline{g}_0}{s^3}(1+\varepsilon') + \varepsilon\overline{w}\frac{g_\sigma - u_\sigma\overline{g}_\sigma}{s_\sigma^3}.$$

Ebenso $q \sin\varphi = -\frac{\vartheta'}{2} + \{\vartheta' \cos 2\varphi + \psi' s \sin 2\varphi\}$, $\vartheta'/2 =$ gef. Glied!

140 $$\varepsilon'\{q \sin\varphi\}' = -\varepsilon'\vartheta'' + \varepsilon'\{\vartheta'_\sigma \cos 2\varphi_\sigma + \psi'_\sigma s_\sigma \sin 2\varphi_\sigma\}'.$$

Mit den Ausdrücken (137, 139, 140) verwandelt sich die strenge Diff.-Gl. (88) in die angenäherte:

141 $$\vartheta''(1+\varepsilon') = p_0 s - \frac{g_0\overline{g}_0}{s^3}(1-\varepsilon') + \varepsilon F_1;$$

F_1 ist Abkürzung für den Ausdruck

$$\frac{p'_\sigma(2)}{2} + \frac{\overline{g}_\sigma q_\sigma(2)}{2s_\sigma^2} - \frac{\overline{w}}{s_\sigma^3}(g_\sigma - u_\sigma\overline{g}_\sigma).$$

$p_\sigma(2)$ und $q_\sigma(2)$ unterscheiden sich von p_σ, q_σ, dass $2\varphi_\sigma$ an Stelle von φ_σ tritt.

Wenn wir in F_1 die in (136 a—d) aufgestellten Funktionen der Zeit explizit einführen, erscheint kein periodisches Glied mehr mit dem Argument $\overline{w}_1 t$. Wir erhalten:

142 (94 b, 136 d)
$$\overline{w} = -\frac{\nu_1\nu_2 s_0^2}{w_1 - 2\mu}\{\cos 2\varphi_0 - \cos(2\varphi_1 - \overline{w}_1 t)\} + \frac{\nu_2^2 s_0^2}{4(w_1-\mu)}\{\cos 2\varphi_0 - \cos(2\varphi_1 - 2\overline{w}_1 t)\}.$$

$\overline{w}$ ist zu vernachlässigen, solange w_1 weder nahe an μ noch an 2μ liegt, das erste Glied von $\overline{w}$, wenn w_1 nahe an μ, das zweite, wenn w_1 nahe an 2μ liegt. Schliesslich gestaltet sich F_1 durch Zerlegung in eine trigonometrische Reihe folgendermassen:

143 a $$F_1(t) = E_0 + \sum_1^3{}_k E_k \cos(\mu_k t + 2\varphi_0)$$

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{s_0 \nu_1}{2}(w_1 + 2\mu) & \mu_1 = 2\overline{\mu} \\ E_2 = -s_0 \nu_2 \left(\mu + \dfrac{w_1 \nu_1 u_0}{2\mu - w_1}\right) & \mu_2 = 2\overline{\mu} - \overline{w}_1 \\ E_3 = \dfrac{s_0 u_0 \nu_2^2 w_1}{4(\mu - w_1)} & \mu_3 = 2\overline{\mu} - 2\overline{w}_1 \\ E_0 = w_1 \nu_2 s_0 u_0 \cos 2\varphi_0 \left\{ \dfrac{\nu_1}{2\mu - w_1} - \dfrac{\nu_2}{4(\mu - w_1)} \right\}. \end{cases} \qquad 143\,b$$

Die Diff.-Gl. (141) werde nach Division mit $1+\varepsilon'$ geschrieben:

$$\vartheta'' = F_0(\vartheta) + \varepsilon F_1(t), \qquad 144\,a$$

und es ist:

$$F_0(\vartheta) = p_0 s(1-\varepsilon') - \frac{g_0 \overline{g}_0}{s^3}(1-\varepsilon). \qquad 144\,b$$

εF_1 ist wieder die Störung. Da die ungestörte Bewegung in einer kleinen Schwingung um $\vartheta = \vartheta_0$ besteht, so auch im Allgemeinen die gestörte. Man setze deshalb $\vartheta = \vartheta_0 + \Theta$ in (144a) ein und entwickle nach Θ bis zur ersten Potenz dieser Grösse, so kommt:

$$\Theta'' = F_0(\vartheta_0) + F_0'(\vartheta_0)\,\Theta + \varepsilon F_1(t);$$

oder anders geordnet:

$$\Theta'' + \omega^2 \Theta = F_0 + \varepsilon F_1, \qquad \omega^2 = -F_0'(\vartheta_0). \qquad 145$$

Mit Unterdrückung aller Zwischenrechnungen ergiebt sich:

$$F_0(\vartheta_0) = w_1^2 \delta - \varepsilon s_0 w_1 \left\{ \tfrac{1}{2}\nu_1 + \nu(a_1 - \sin^2\varphi_0) \right\} \qquad 146$$

$$F_0'(\vartheta_0) = p_0 u_0 (1-\varepsilon') + (1-\varepsilon)\left\{ \frac{3 g_0 \overline{g}_0 u_0}{s_0^4} - \frac{w_0 \overline{g}_0 + n_0 g_0}{s_0^2} \right\}, \qquad 147$$

f. $\omega^2 = \overline{w}_1^2 + \varepsilon \left\{ w_1^2(2a_1 - 1) + u_0 w_1 [\tfrac{1}{2}\nu_1 + \nu(2 + 3\sin^2\varphi_0)] \right\}$. Hieraus durch Radizierung:

$$\begin{cases} \omega = \overline{w}_1 (1 + \varepsilon H) \\ H = \dfrac{2A_1 - C_1}{2C_1} + \dfrac{u_0}{2w_1}\left\{ \dfrac{4A_1 - C_1}{2C_1}\nu_1 + \dfrac{6A_1 - C_1(1 - 3\sin^2\varphi_0)}{C_1}\nu \right\}. \end{cases} \qquad 148\,a$$

Der Erfolg des abgeänderten Näherungsverfahrens besteht darin, dass auch die Frequenz der Eigenschwingungen $(\omega/2\pi)$ ein Glied mit dem Faktor ε besitzt. Dies ist der Grund, warum das säkulare Glied, wenigstens im Allgemeinen, verschwunden ist.

Ersetzen wir, wie p. 59 vorgesehen ist, $\overline{w}_1$ durch w_1, so wird einfacher

148 b
$$\omega = w_1\left(1+\varepsilon\frac{2A_1-C_1}{2C_1}\right).$$

Das vollständige Integral der Diff.-Gl. (145) wird wieder durch die Superposition einer einfachen freien Schwingung $\Theta_f = \Theta_4\cos(\omega t+\chi_0)$ und der zusammengesetzten gezwungenen Schwingung $\Theta_g = \Theta_0 + \sum_1^3{}_k\Theta_k\cos(\mu_k t+2\varphi_0)$ homolog der Gestalt von $F_1(t)$ dargestellt. Demzufolge ist

149 a
$$\vartheta = \vartheta_0+\Theta+\sum_1^3{}_k\Theta_k\cos(\mu_k t+2\varphi_0)+\Theta_4\cos(\omega t+\chi_0).$$

Die willkürlichen Konstanten Θ_4, χ_0 werden durch Θ, $\Theta' = 0$ für $t = 0$ (nämlich $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta' = 0$) bestimmt. Durch Substitution von $\Theta_f+\Theta_g$ für Θ in (145) ergiebt sich:

149 b
$$\begin{cases} \Theta_0 = \dfrac{F_0+\varepsilon E_0}{\omega^2} & \Theta_4\cos\chi_0 = -\Theta_0-(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3)\cos 2\varphi_0 \\ \Theta_k = \dfrac{\varepsilon E_k}{\omega^2-\mu_k^2} & \Theta_4\sin\chi_0 = -\dfrac{\Theta_1\mu_1+\Theta_2\mu_2+\Theta_3\mu_3}{\omega}\sin 2\varphi_0; \end{cases}$$

oder indem wir konsequent vernachlässigen:

150
$$\begin{cases} \Theta_0 = \delta+\varepsilon\delta_1, \text{ wo } \delta_1 = \dfrac{E_0}{w_1^2}+\dfrac{s_0}{w_1}\left\{-\dfrac{4a_1-1}{2}\nu_1+(a_1-\cos^2\varphi_0)\nu\right\} \\ \Theta_1 = \varepsilon s_0\dfrac{\nu_1}{2(w_1-2\mu)} \\ \Theta_2 = \varepsilon s_0\dfrac{\nu_2(2\mu-w_1+c_1\nu_1 u_0)}{4(w_1-\mu)(w_1-2\mu)} \\ \Theta_3 = \varepsilon s_0\dfrac{\nu_2^2 w_1 u_0}{4(w_1-\mu)(w_1-2\mu)(3w_1-2\mu)}. \end{cases}$$

Die Berechnung von ψ ist jetzt mit der Kenntnis von ϑ sehr einfach. Die streng richtige Gl. (88) $\psi' = \dfrac{g}{s^2}-\dfrac{\varepsilon q\cos\varphi}{s}$ werde in die Form $\psi'(1+\varepsilon') = \dfrac{g}{s^2}-\dfrac{\varepsilon' q(2)^*}{s}$ gesetzt. Nun angenähert:

$$\psi'(1+\varepsilon') = \frac{g}{s^2}-\frac{\varepsilon' q_\sigma(2)}{s_\sigma} \quad \text{und} \quad \vartheta = \vartheta_0+\Theta$$

eingesetzt, die rechte Seite nach Θ bis zur 1. Potenz entwickelt, und da $w = w_0+\varepsilon\bar{w}$ nach (94 b), so kommt

* Bezeichnet: In q ersetze φ durch 2φ.

$$\psi'(1+\varepsilon') = \frac{g_0}{s_0^2} + \frac{\overline{g}_0 - u_0 g_0}{s_0^3}\Theta - \varepsilon\frac{u_\sigma \overline{w}}{s_\sigma^2} - \varepsilon'\frac{q_\sigma(2)}{s_\sigma}. \qquad 151$$

Beim Beginn der Bewegung ist $\psi' = \nu$; denn für $t = 0$ sind Θ und $\overline{w}$ gleich 0, $\varepsilon'\frac{q_\sigma(2)}{s_\sigma} = \gamma'\psi'$, f. (151, 60) $\psi_0' = \frac{g_0}{s_0^2(1+\varepsilon'+\gamma')} = \nu$ q. e. d. Aus (151) ergiebt sich mit Rücksicht auf die Ausdrücke für Θ, $\overline{w}$ (142), $q_\sigma(2)$ und nach Division mit $1+\varepsilon'$:

$$\psi' = \nu(1+\varepsilon'\cos 2\varphi_0) + \frac{w_1\Theta(1-\varepsilon')}{s_0} - \frac{\varepsilon u_0 \overline{w}}{s_0^2} - \varepsilon'\frac{q_\sigma(2)}{s_0}. \qquad 152$$

Durch Quadratur nach t nimmt ψ die Form an:

$$\psi = \Psi_0 + Nt + \sum_1^3{}_k \Psi_k \sin(\mu_k t + 2\varphi_0) + \Psi_4 \sin(\omega t + \chi_0) \qquad 153\,a$$

$$\begin{cases} N &= \nu_1 + \varepsilon a_1(\nu - 2\nu_1) \\ \Psi_1 &= \dfrac{2w_1\Theta_1 - \varepsilon\nu_1 s_0}{4\mu s_0} \\ \Psi_2 &= \dfrac{2w_1\Theta_2 + \varepsilon\nu_2 s_0}{2(2\mu - w_1)s_0} + \dfrac{\varepsilon\nu_1\nu_2 u_0}{(w_1 - 2\mu)^2} \\ \Psi_3 &= \dfrac{w_1\Theta_3}{2(\mu - w_1)s_0} - \dfrac{\varepsilon\nu_2^2 u_0}{8(w_1-\mu)^2}. \end{cases} \qquad 153\,b$$

Ausserdem:

$$\Psi_4 = \frac{\Theta_4}{s_0}(1-\varepsilon') \qquad \Psi_0 = -(\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3)\sin 2\varphi_0 - \Psi_4 \sin\chi_0. \qquad 153\,c$$

Die Integrationskonstante Ψ_0 ist durch die Anfangsbedingung $\psi_0 = 0$ bestimmt.

Gleichungen der reduzierten Bahnkurve.

Wir stellen noch einmal die Gleichungen der reduzierten Bahnkurve in den Kugelkoordinaten ϑ, ψ zusammen, wobei für die Argumente der trigonometrischen Glieder die einfachsten statthaften Werte gesetzt sind, insbesondere auch in ω der mit ε behaftete Teil vernachlässigt ist:

$$\begin{cases} \vartheta = \vartheta_0 + \Theta_0 + \Theta_4\cos\left(\dfrac{C_1}{A_1}\mu t + \chi_0\right) + \Theta_1\cos(2\mu t + 2\varphi_0) \\ \qquad + \Theta_2\cos\left(\dfrac{2A_1 - C_1}{A_1}\mu t + 2\varphi_0\right) + \Theta_3\cos\left(\dfrac{A_1 - C_1}{A_1}2\mu t + 2\varphi_0\right) \\ \psi = \Psi_0 + Nt + \Psi_4\sin\left(\dfrac{C_1}{A_1}\mu t + \chi_0\right) + \Psi_1\sin(2\mu t + 2\varphi_0) \\ \qquad + \Psi_2\sin\left(\dfrac{2A_1 - C_1}{A_1}\mu t + 2\varphi_0\right) + \Psi_3\sin\left(\dfrac{A_1 - C_1}{A_1}2\mu t + 2\varphi_0\right). \end{cases} \qquad 154\,a$$

154 b
$$\begin{cases} \Theta_1 = -\dfrac{\varepsilon s_0 \nu_1}{2\mu} \cdot \dfrac{A_1}{2A_1 - C_1} \\ \Theta_2 = +\dfrac{\varepsilon s_0 \nu_2}{4\mu} \cdot \dfrac{A_1}{A_1 - C_1} + \dfrac{\varepsilon s_0 u_0 \nu_1 \nu_2}{4\mu^2} \dfrac{A_1 C_1}{(A_1 - C_1)(2A_1 - C_1)} \\ \Theta_3 = -\dfrac{\varepsilon s_0 u_0 \nu_2^2}{4\mu^2} \dfrac{A_1^2 C_1}{(A_1 - C_1)(2A_1 - C_1)(2A_1 - 3C_1)}; \end{cases}$$

Θ_0, Θ_4, χ_0 wie (149 b).

154 c
$$\begin{cases} \Psi_1 = -\dfrac{\varepsilon \nu_1}{4\mu} \cdot \dfrac{A_1}{2A_1 - C_1} \\ \Psi_2 = +\dfrac{\varepsilon \nu_2}{4\mu} \dfrac{A_1}{A_1 - C_1} + \dfrac{\varepsilon \nu_1 \nu_2 u_0}{4\mu^2} \dfrac{A_1}{A_1 - C_1} \\ \Psi_3 = -\dfrac{\varepsilon \nu_2^2 u_0}{2\mu^2} \cdot \dfrac{A_1^2}{(2A_1 - C_1)(2A_1 - 3C_1)}; \end{cases}$$

N, Ψ_0, Ψ_4 wie (153 b, c).

Die Bewegung der F-A besteht in einem Akkord von 4 einfachen harmonischen Schwingungen, nämlich aus 2 Partialschwingungen mit den Frequenzen $C_1\mu/2\pi A_1$, μ/π und ihren beiden Differenzschwingungen erster und zweiter Ordnung; doch wird die der zweiten Ordnung im Allgemeinen nur sehr schwach erregt und zwar erst um so intensiver, je näher C_1/A_1 einem der Werte $^2/_3$, 1, 2 kommt. Wird einer dieser Werte von C_1/A_1 wirklich angenommen, so tauchen säkulare Glieder auf. Sämtliche Amplituden und Perioden nehmen mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels ab.

Vier spezielle Fälle.

Vier besondere Fälle (die ersten beiden als Proben):

1) $\varepsilon = 0$ (symmetrischer Kreisel). (148 a) $\omega = \overline{w}_1$; (150, 153 b) $\Theta_k, \Psi_k = 0$, $\Theta_0 = \delta$, $N = \nu_1$; (149 b, 153 c) $\chi_0 = 0$, $\Theta_4 = -\Theta_0 = -\delta$, $\Psi_0 = 0$, $\Psi_4 = \Theta_4/s_0 = -\nu_2/w_1$. Damit Rückkehr zu den Formeln (136 a—c) bestätigt.

2) $\nu_2 = 0$ oder $\nu_1 = \nu$ oder $p_0 = w_1 \nu$ (Nachbarbewegung zur langsamen reg. Präz.). Also $\delta = 0$, $\Theta_2 = \Theta_3 = 0$ und $\Psi_2 = \Psi_3 = 0$ (die beiden Differenzschwingungen, welche die aus der pseudoreg. Präz. abgeleitete Bewegung auszeichnen, verschwinden); $\Theta_4 \cos\chi_0 = -\Theta_0 - \Theta_1 \cos 2\varphi_0$, $\Theta_4 \sin\chi_0 = -\dfrac{2\mu}{\omega}\Theta_1 \sin 2\varphi_0$; $\Theta_0 = \varepsilon\delta_1 = -\dfrac{\varepsilon s_0 \nu}{2w_1}(2a_1 + \cos 2\varphi_0)$, $\Theta_1 = \dfrac{\varepsilon s_0 \nu_1}{2w_1} \dfrac{c_1}{c_1 - 2}$, $\Psi_1 = \dfrac{c_1 \Theta_1}{2s_0} - \dfrac{\varepsilon\nu}{4\mu}$, $\Psi_4 = \dfrac{\Theta_4}{s_0}$, $\Psi_0 = -\Psi_1 \sin 2\varphi_0 - \Psi_4 \sin\chi_0$, $N = \nu - \varepsilon a_1 \nu$. Durch Vergleich mit (135 b, 121 b, 123 b) erkennen wir die Uebereinstimmung

von: Θ_0 mit $\varepsilon\eta_{10}$, Θ_1 mit $\varepsilon\eta_{12}$, Θ_4 mit $\varepsilon\eta_{11}$, χ_0 mit X_0, Ψ_0 mit $\varepsilon\xi_0$, Ψ_1 mit $\varepsilon\xi_2$, Ψ_4 mit $\varepsilon\xi_1$, N mit $\overline{\nu}$.

Endlich ist auch ω, wenn εH vernachlässigt wird, mit Ω identisch.

3) $u_0 = 0$ (Horizontale Anfangslage der F-A). $s_0 = 1$, $E_0 = 0$, und ferner:

$$\begin{cases} \Theta_1 = -\dfrac{\varepsilon\nu_1}{2\mu}\dfrac{A_1}{2A_1 - C_1} & \Psi_1 = \Theta_1 \\ \Theta_2 = +\dfrac{\varepsilon\nu_2}{4\mu}\dfrac{A_1}{A_1 - C_1} & \Psi_2 = \Theta_2 \\ \Theta_3 = 0 & \Psi_3 = 0. \end{cases} \qquad 155$$

Hier ist die Differenzschwingung 2. Ordnung nicht vorhanden.

4) $\nu = 0$ (Kein seitlicher Anstoss; beim Beginn der Bewegung fällt der Impulsvektor exakt mit der F-A zusammen) $\nu_2 = \nu_1$ $N = \nu_1(1 - 2\varepsilon a_1)$, $H = \dfrac{2A_1 - C_1}{2C_1} + \dfrac{u_0\nu_1}{w_1}\dfrac{4A_1 - C_1}{4C_1}$. Die Amplituden aller Teilschwingungen werden ν_1 proportional, verschwinden somit für $p_0 = 0$, wie es sein muss.

Charakter der Bahnkurve. Stereographisch Projektion

Wünschen wir aber die Aenderung, welche die pseudoreguläre Präzession durch den Einfluss der Asymmetrie des Kreisels erfährt, aufzufassen, so müssen wir setzen:

$$\begin{cases} \mu_1 = \overline{w}_1 + \omega_1 \text{ f. ist } \omega_1 = 2\overline{\mu} - \overline{w}_1 \text{ oder gekürzt } = \dfrac{2A_1 - C_1}{A_1}\mu \\ \mu_2 = \overline{w}_1 + \omega_2 \qquad \omega_2 = 2\overline{\mu} - 2\overline{w}_1 \qquad = \dfrac{2A_1 - 2C_1}{A_1}\mu \\ \mu_3 = \overline{w}_1 + \omega_3 \qquad \omega_3 = 2\overline{\mu} - 3\overline{w}_1 \qquad = \dfrac{2A_1 - 3C_1}{A_1}\mu, \end{cases} \qquad 156\,a$$

und ferner die durch entsprechende Zerlegung der trigonometrischen Reihe für ϑ (149a) entstehenden Koeffizienten von $\cos \overline{w}_1 t$ und $\sin \overline{w}_1 t$:

$$\begin{cases} \Theta_4 \cos(\varepsilon\overline{w}_1 Ht + \chi_0) + \sum_1^3{}^k \Theta_k \cos(\omega_k t + 2\varphi_0) = \Theta_r \cos\vartheta_r \text{ resp.} \\ \Theta_4 \sin(\varepsilon\overline{w}_1 Ht + \chi_0) + \sum_1^3{}^k \Theta_k \sin(\omega_k t + 2\varphi_0) = \Theta_r \sin\vartheta_r; \end{cases} \qquad 156\,b$$

analog in der Reihe für ψ (153a), es tritt Ψ an Stelle von Θ, ψ_r statt ϑ_r. Wir erhalten:

$$\begin{cases} \vartheta = \vartheta_0 + \Theta_0 + \Theta_r \cos(\overline{w}_1 t + \vartheta_r) \\ \psi = \Psi_0 + Nt + \Psi_r \sin(\overline{w}_1 t + \psi_r). \end{cases} \qquad 156\,c$$

Die Modifikation besteht also darin, dass die auch jetzt vorhandene Nutation $\Theta_n = \Theta_r \cos(\overline{w}_1 t + \vartheta_r)$, $\Psi_n = \Psi_r \sin(\overline{w}_1 t + \psi_r)$ zeitlich veränderliche Amplituden Θ_r, Ψ_r und ebensolche „Phasenkonstanten“ ϑ_r, ψ_r hat, deren kompliziertes Gesetz (156 b) angiebt. Uebrigens ist die Ellipse der Nutation (Θ_n, Ψ_n als rechtwinklige Koordinaten einer Kurve) allgemein zu reden, in eine nach der Periode $2\pi/\overline{w}_1$ noch nicht geschlossene Figur verwandelt, die aber dauernd in der Nachbarschaft der Nutations-Ellipse des symmetrischen Kreisels verharrt.

Die Gestalt der reduzierten Bahnkurve studieren wir am besten in ihrer stereographischen Projektion auf die Horizontalebene. Sei das Centrum derselben im Zenith, ferner

157a $$\Theta/s_0 = \overline{\Theta}, \qquad \psi - Nt = \overline{\Psi},$$

so wird sie mit der laufenden komplexen Variabeln

157b $$\lambda = \cot\vartheta_0/2 \; e^{iNt}\{1 + i(\overline{\Psi} + i\overline{\Theta})\}.$$

Wir heben Folgendes hervor:

Die Gestalt der Bahn hängt wesentlich von dem Verhältnis C_1/A_1 ab. Solange es den Werten 1, 2, $^2/_3$ fern bleibt, sind die Glieder in $\overline{\Theta}$ und $\overline{\Psi}$, welche in ν, ν_1 von quadratischer Ordnung sind, unerheblich, und wir haben die einfacheren Werte

158 $$\overline{\Theta}_1 = \Psi_1 = -\frac{\varepsilon\nu_1}{2\mu}\frac{A_1}{2A_1 - C_1} \qquad \overline{\Theta}_2 = \Psi_2 = +\frac{\varepsilon\nu_2}{2\mu}\frac{A_1}{2A_1 - 2C_1}.$$

$\overline{\Theta}_4 = \Psi_4$ (ε' unterdrückt), $\overline{\Theta}_3 = \Psi_3 = 0$. Mithin $\overline{\Theta}_r = \Psi_r$, $\vartheta_r = \psi_r$; die Nutationsfigur wird eine Ellipse mit in der Zeit veränderlichen Achsen, in der stereographischen Projektion ein Kreis mit in der Zeit veränderlichem Radius. Die Nutationen haben wechselnde Grösse, gemessen durch Θ_r oder $\overline{\Theta}_r$, und die veränderliche Frequenz, gemessen durch $(\overline{w} + \vartheta_r')/2\pi$, folgen also bald weiter bald enger aufeinander. Das Gesetz dieser Aenderungen geht aus (156 b, 158) hervor.

Sobald aber C_1/A_1 einer der Zahlen 1, 2, $^2/_3$ nahe kommt, wird die Gestalt der Bahn übersichtlicher durch das wieder auftretende Phänomen der Schwebungen. Die Erscheinung wird in den drei möglichen Fällen so verschieden, dass ich sie einzeln beschreiben muss. Doch soll der Kürze wegen nur die Koordinate ϑ betrachtet, $\varphi_0 = 0$ (f. $\chi_0 = 0$, $\Theta_4 = -\Theta_0 - \Theta_1 - \Theta_2 - \Theta_3$) angenommen und das einfachere Formelsystem (154) benutzt werden. Es bezeichnet α im Folgenden stets eine kleine Grösse.

1) $C_1 = A_1(1+\alpha)$. Die Partialschwingung mit der Frequenz

μ/π und der Intensität Θ_1 ist gegen alle übrigen unerheblich. Deshalb

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Theta_0 + \Theta_4 \cos \mu(1+\alpha)t + \Theta_2 \cos \mu(1-\alpha)t + \Theta_3 \cos 2\alpha\mu t. \qquad \textbf{159 a}$$

Die Schwebungen entstehen durch Interferenz der Schwingungen mit den Amplituden Θ_2, Θ_4. Ausserdem die langsame Oscillation $\Theta_3 \cos 2\alpha\mu t$. Die allgemeine Transformation (156 b, c) ist hier unpraktisch; besser sei

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Theta_2 + \Theta_4) \cos \alpha\mu t = \Theta_r \cos \vartheta_r \\ (\Theta_2 - \Theta_4) \sin \alpha\mu t = \Theta_r \sin \vartheta_r \end{array} \right. \qquad \textbf{159 b}$$

eingeführt, so dass (159 a)

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Theta_0 + \Theta_3 \cos 2\alpha\mu t + \Theta_r \cos(\mu t + \vartheta_r) \qquad \textbf{159 c}$$

wird. Die in Schwebung befindlichen Nutationen superponieren sich nicht dem Präzessionskreis $\vartheta = \vartheta_0$, sondern einer ihm benachbarten Kurve $\vartheta = \vartheta_0 + \Theta_3 \cos 2\alpha\mu t$, $\psi = Nt + \Psi_3 \sin 2\alpha\mu t$, welche ihn immer nach einem Stundenwinkel $\psi_s = \frac{N\pi}{2\alpha\mu} \pm 2\Psi_3$, die Werte $\pm$ abwechselnd, schneidet. Schläge und Pausen fallen immer genau mit diesen Schnittpunkten zusammen; die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schwebungen beträgt $\pi/2\alpha\mu$.

2) $C_1 = A_1(2+\alpha)$. Alle vier Teilschwingungen sind stark:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Theta_0 + \Theta_4 \cos \mu(2+\alpha)t + \Theta_1 \cos 2\mu t + \Theta_2 \cos \alpha\mu t + \Theta_3 \cos \mu(2+2\alpha)t. \qquad \textbf{160 a}$$

Wir setzen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_1 + \Theta_4 \cos \alpha\mu t + \Theta_3 \cos 2\alpha\mu t = \Theta_r \cos \vartheta_r \\ \Theta_1 + \Theta_4 \sin \alpha\mu t + \Theta_3 \sin 2\alpha\mu t = \Theta_r \sin \vartheta_r \end{array} \right. \qquad \textbf{160 b}$$

und verwandeln dadurch (160 a) in die Gl.

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Theta_0 + \Theta_2 \cos \alpha\mu t + \Theta_r \cos(2\mu t + \vartheta_r). \qquad \textbf{160 c}$$

Die Schwebungen entstehen durch Interferenz der drei Schwingungen mit den Amplituden Θ_1, Θ_3, Θ_4. Infolgedessen sind sie erheblich komplizierter als im ersten Falle; doch wiederholt sich das Spiel zwischen Schlägen und Pausen immer nach der Zeit $2\pi/\alpha\mu$. Die schnellen Nickbewegungen überlagern sich der langsamen Schwingung $\Theta_2 \cos \alpha\mu t$, sodass die Nutationen nicht dem Präzessionskreis $\vartheta = \vartheta_0$ aufgesetzt sind, sondern der ihm benachbarten Kurve $\vartheta = \vartheta_0 + \Theta_2 \cos \alpha\mu t$, $\psi = Nt + \Psi_2 \sin \alpha\mu t$, welche ihn immer nach einem Stundenwinkel $\psi_s = \frac{N\pi}{\alpha\mu} \pm 2\Psi_3$, die beiden Werte alternierend, schneidet.

3) $C_1 = A_1(\frac{2}{3} + \alpha)$. Die Teilschwingungen mit den Frequenzen μ/π, $(4-3\alpha)\,\mu/6\pi$ und den Intensitäten Θ_1 bez. Θ_2 sind schwach gegen die beiden anderen. Deshalb:

161a $$\vartheta = \vartheta_0 + \Theta_0 + \Theta_4 \cos \mu(\tfrac{2}{3} + \alpha)t + \Theta_3 \cos \mu(\tfrac{2}{3} - 2\alpha)t.$$

Die Schwebungen entstehen durch Interferenz der beiden allein beträchtlichen Schwingungen mit den Amplituden Θ_3, Θ_4. Hier wird gesetzt:

161b $$\begin{cases} \Theta_4 \cos \alpha\mu t + \Theta_3 \cos 2\alpha\mu t = \Theta_r \cos \vartheta_r \\ \Theta_4 \sin \alpha\mu t + \Theta_3 \sin 2\alpha\mu t = \Theta_r \sin \vartheta_r \end{cases}$$

und dadurch wird (161a):

161c $$\vartheta = \vartheta_0 + \Theta_0 + \Theta_r \cos\left(\frac{2\mu}{3} t + \vartheta_r\right).$$

Dieser dritte Fall ist der einfachste. Die Nutationen setzen auf den Präzessionskreis $\vartheta = \vartheta_0$ mit gewöhnlichen Schwebungen auf, die mit der Periode $2\pi/3\alpha\mu$ aufeinander folgen.

Die spezielle Gestalt der Nutationsbogen (Zacken, Schleifen oder Buchten) hängt von dem Verhalten des Diff.-Quot. $d\vartheta/d\psi$ ab; hierüber lässt sich infolge der zusammengesetzten Form der Ausdrücke eine allgemeine Aussage ohne Umstände nicht machen, und es wird Angelegenheit des besonderen Falles, sie zu diskutieren. So können dort, wo in der pseudoregulären Präzession des symmetrischen Kreisels Zacken (Spitzen) auftreten ($\nu = 0$, p. 65, 4. Fall), in der abgeleiteten Bewegung diese Zacken verschwinden, oder Spitzen mit Schleifen in scheinbar mehr oder minder regelloser Weise miteinander abwechseln.

IV.

Ueber die Schwingungen um den stationären Zustand.

Schliesslich können wir noch die Oscillationen um den stationären Bewegungsvorgang, welcher im II. Abschnitt ausführlich behandelt ist, nach der Methode der kleinen Schwingungen studieren, d. h. erstens die aufrechte Kreiselbewegung, zweitens die Nachbarbewegung zu der als konisches Pendel bezeichneten Bewegungs-

form. Die Kenntnis derselben hängt enge mit der Frage nach der Stabilität des stationären Zustandes zusammen; doch ist hier keine erschöpfende Behandlung des Gegenstandes beabsichtigt.

Ueber die aufrechte Kreiselbewegung.

Aufrechter Kreisel.

Die Beschränkung auf geringe Elliptizität heben wir auf; im Uebrigen gebrauchen wir A und B jetzt praktischer als gleichberechtigte Grössen nebeneinander. Ausserdem werde ein Wechsel der (freien) Koordinaten vorgenommen: An Stelle von ϑ, ψ, φ treten x, y, χ, durch die folgenden Transformations-Gl. zusammenhängend:

Neue Koordinate

$$x + iy = se^{i\psi} \qquad \chi = \varphi + \psi. \tag{162, 163}$$

Die Komplexe $x + iy$ liefert offenbar sogleich die orthographische Projektion der reduzierten Bahnkurve auf die im Zenith die Einheitskugel berührende Horizontal- oder auf irgend eine ihr parallele Ebene. Sie werde im Kalkül wieder bevorzugt. χ misst die Drehung des Kreisels um die F-A.

Die Schwingungen um den stationären Zustand denkt man sich am besten durch einen relativ schwachen Stoss auf die F-A aus der gleichförmigen Drehung um deren vertikale Stellung (sleeping top!) erzeugt. x, y sind als kleine Grössen anzusehen. Die Diff.-Gl. der Bewegung stellen wir aus Lagrange's Gleichungen der zweiten Form her:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Doppelte kinetische Energie:} & 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \\ \text{Potentielle Energie:} & U = Pu \\ \text{Lagrange'sche Funktion:} & \mathrm{L} = T - U. \end{array}\right. \tag{164}$$

Aus (163) fliesst genau:

$$\left\{\begin{array}{ll} s = \sqrt{x^2 + y^2}\,^* & \vartheta' = \dfrac{xx' + yy'}{su} \\ u = \underset{+}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} & \psi' = \dfrac{xy' - yx'}{s^2} \\ tg\,\psi = \dfrac{y}{x} & \varphi' = \chi' - \psi'; \end{array}\right. \tag{165}$$

aus (165) angenähert:

$$p + iq = e^{-i\chi}(x' + iy'), \tag{166a}$$

oder Reelles von Imaginärem getrennt:

---

*Passieren x, y gleichzeitig die 0-Stelle, so geht $+\sqrt{}$ in $-\sqrt{}$ über.

166 b
$$\begin{cases} p = x'\cos\chi + y'\sin\chi \\ q = y'\cos\chi - x'\sin\chi \text{ und dazu} \\ r = \chi' + \dfrac{yx' - xy'}{2}. \end{cases}$$

Die drei Diff.-Gl. lauten in der symbolischen Form von Lagrange:

167
$$L'_{x'} = L_x \qquad L'_{y'} = L_y \qquad L'_{\chi'} = L_\chi.$$

Der Index bezeichnet die nach der jeweiligen Variabeln zu bildende partielle Ableitung von L. Wenn wir nunmehr konsequent alle Glieder, welche in x, y oder deren Zeitderivierten von der 2. Ordnung sind, vernichten, kommt zunächst aus der 3. Gl. (167):

168 a
$$C\chi'' = 0, \qquad C\chi' = \text{const} = N, \quad \chi = \chi_0 + \frac{N}{C}t$$

χ = angenähert cyklische Koordinate. Aus den beiden ersten Gl. (167) wird:

168 b
$$\begin{cases} \{Ap\cos\chi - Bq\sin\chi\}' + Ny' - Px = 0 \\ \{Ap\sin\chi + Bq\cos\chi\}' - Nx' - Py = 0. \end{cases}$$

Simultane Diff.-Gl. für x, y. Umformung und Integration derselben.

Nachdem hierin p, q nach (166 b) durch die Ausdrücke in den neuen Koordinaten ersetzt sind, und die Differentiation nach der Zeit ausgeführt ist, erhalten wir in (168 b) mit Rücksicht auf (168 a) ein System von zwei simultanen linearen Diff.-Gl. 2. Ordnung mit reell periodischen Koeffizienten. Dieses lässt sich auf die folgende zierliche Art weiter traktieren: Es war $Ap = L$, $Bq = M$; seien $L + iM = K$ und $x + iy = \zeta$ gesetzt, so verwandeln wir das System (168 b) durch komplexe Addition formal in die einzige Gleichung:

169
$$\{e^{i\chi}K\}' - iN\zeta' - P\zeta = 0.$$

$-iN\zeta'$ ist das „gyroskopische Glied". Wir wollen

170
$$\frac{A+B}{2C} = \mathfrak{s} \qquad \frac{A-B}{2C} = \mathfrak{d} \qquad \frac{N}{C} = w \qquad \frac{P}{C} = p_0$$

setzen und die zu K, ζ konjugierten Komplexen $\overline{K}, \overline{\zeta}$ einführen. Alsdann ist

171
$$\frac{K}{C} = \mathfrak{s}(p+iq) + \mathfrak{d}(p-iq) = \mathfrak{s}\zeta' e^{-i\chi} + \mathfrak{d}\overline{\zeta}' e^{+i\chi}$$
$$\frac{K'}{C} = \mathfrak{s}e^{-i\chi}(-iw\zeta' + \zeta'') + \mathfrak{d}e^{+i\chi}(iw\overline{\zeta}' + \overline{\zeta}'')$$
$$\left\{e^{i\chi}\frac{K}{C}\right\}' = e^{i\chi}\frac{iwK + K'}{C} = \mathfrak{s}\zeta'' + \mathfrak{d}e^{2i\chi}(\overline{\zeta}'' + 2iw\overline{\zeta}').$$

Daher wird die Diff.-Gl. (169) nach Division mit C:

$$\left\{\begin{array}{l} \{\mathfrak{s}\zeta''-iw\zeta'-p_0\zeta\}+\mathfrak{d}e^{+2i\chi}\{\overline{\zeta}''+2iw\overline{\zeta}'\}=0 \\ \text{und durch } i|-i \text{ die konjugierte Gl.:} \\ \{\mathfrak{s}\overline{\zeta}''+iw\overline{\zeta}'-p_0\overline{\zeta}\}+\mathfrak{d}e^{-2i\chi}\{\zeta''-2iw\zeta'\}=0. \end{array}\right. \qquad 172$$

Es genügt aber jetzt die Substitution

$$\zeta = e^{i\chi}\mathfrak{z}, \qquad \mathfrak{z}=\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}, \quad \text{f.} \quad \overline{\zeta}=e^{-i\chi}\overline{\mathfrak{z}}, \qquad \overline{\mathfrak{z}}=\mathfrak{x}-i\mathfrak{y}, \qquad 173$$

um in (172) die Koeffizienten von dem zeitlich veränderlichen Glied zu befreien und die Diff.-Gl. auf das System zweier linearer Simultangleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu reduzieren:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{s}\mathfrak{z}''+iw(2\mathfrak{s}-1)\mathfrak{z}'+[w^2(1-\mathfrak{s})-p_0]\mathfrak{z}+\mathfrak{d}\overline{\mathfrak{z}}''+\mathfrak{d}w^2\overline{\mathfrak{z}}=0 \\ \mathfrak{s}\overline{\mathfrak{z}}''-iw(2\mathfrak{s}-1)\overline{\mathfrak{z}}'+[w^2(1-\mathfrak{s})-p_0]\overline{\mathfrak{z}}+\mathfrak{d}\mathfrak{z}''+\mathfrak{d}w^2\mathfrak{z}=0, \end{array}\right. \qquad 174$$

womit jede Schwierigkeit der Integration verschwunden ist. Es mögen noch

$$w(2\mathfrak{s}-1) \text{ mit } \mathfrak{s}' \qquad w^2(1-\mathfrak{s})-p_0 \text{ mit } \mathfrak{s}'' \qquad 175$$

abgekürzt und durch D symbolisch die Derivierte nach der Zeit bezeichnet werden; dadurch schreiben sich die Gl. (174) nach der Vorschrift des englischen Operationskalküls*

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathfrak{s}D^2+i\mathfrak{s}'D+\mathfrak{s}'')\mathfrak{z}+\mathfrak{d}(D^2+w^2)\overline{\mathfrak{z}}=0 \\ (\mathfrak{s}D^2-i\mathfrak{s}'D+\mathfrak{s}'')\overline{\mathfrak{z}}+\mathfrak{d}(D^2+w^2)\mathfrak{z}=0. \end{array}\right. \qquad 176$$

$\overline{\mathfrak{z}}$ wird durch Bildung der Eliminations-Determinante aus den vier Operationskoeffizienten entfernt, und wir bekommen für $\mathfrak{z}$ eine lineare Diff.-Gl. 4. Ordnung:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta(D)\mathfrak{z}=0, \quad \text{wo} \\ \Delta(D)=(\mathfrak{s}D^2+i\mathfrak{s}'D+\mathfrak{s}'')(\mathfrak{s}D^2-i\mathfrak{s}'D+\mathfrak{s}'')-\mathfrak{d}^2(D^2+w^2)^2 \\ \quad\;\; =(\mathfrak{s}D^2+\mathfrak{s}'')^2+\mathfrak{s}'^2D^2-\mathfrak{d}^2(D^2+w^2)^2. \end{array}\right. \qquad 177$$

Δ ist demnach gerade Funktion von D; $\Delta \equiv \Delta(D^2)$. Die vollständige Lösung der Diff.-Gl. (177) erscheint, wie bekannt, als lineare Zusammensetzung aus 4 Exponentialfunktionen von der Form e^{ikt}. Nun ist $\Delta(D^2)e^{ikt}=\Delta(-k^2)e^{ikt}$, mithin genügt k der Gleichung 4. Grades: $\Delta(-k^2)=0$. Ausführlich mit den ursprünglichen Grössen lautet sie: 178

*Diese schöne Methode ist z. B. in Forsyth, A Treatise on Differential Equations ausführlich auseinandergesetzt.

179 a $\{Ak^2+(B-C)w^2+P\}\{Bk^2+(A-C)w^2+P\} = k^2w^2(A+B-C)^2,$

e determinierende Gleichung.

also quadratisch in k^2; die 4 Wurzeln von k haben paarweis denselben absoluten Betrag. Es existiert eine dauernde „aufrechte" Bewegung, wenn k^2 reell positiv ausfällt. Damit dies eintrete, müssen die Koeffizienten der Gl. (179 a) folgende drei Ungleichungen zugleich erfüllen:

1) Damit k^2 eine reelle Grösse ist,

179 b $\{w^2(AB+C-A.C-B)-P(A+B)\}^2 > 4AB\{(A-C)w^2+P\}\{(B-C)w^2+P\}.$

2) Damit k^2 eine positive Grösse ist,

a. muss der rationale Teil der beiden Wurzeln von k^2 positiv sein:

179 c $$w^2(AB+C-A.C-B) > P(A+B),$$

b. müssen beide Wurzeln von k^2 dasselbe Vorzeichen haben:

179 d $$\{(A-C)w^2+P\}\{(B-C)w^2+P\} > 0.$$

Als Anfangsbedingungen schreiben wir etwa entweder

180 $$\mathfrak{z} = 0, \quad \mathfrak{z}' = \mathfrak{z}_0' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0, \quad \mathfrak{z}' = 0$$

vor; im ersteren Falle erzeugt ein Stoss auf die vertikale Kreiselachse die Bewegung, im letzteren Falle die Entfernung der Kreiselachse aus der vertikalen Stellung ohne Anfangsgeschwindigkeit. Die vollständige Lösung wird (im ersteren Falle) — allgemeine Regel entwickelt bei Routh II, Chapter VIII — erhalten in zwei Summanden von der Form:

181 a $$\mathfrak{z} = \{R\mathfrak{x}_0'+iS\mathfrak{y}_0'\}\sin kt - \mathfrak{z}'\{S'\mathfrak{y}_0'+iR'\mathfrak{x}_0'\}\cos kt,$$

indem für k nach einander die Quadratwurzeln der beiden Werte von k^2 aus (179 a) gesetzt werden (ähnlich im zweiten Falle). R, S und R', S' hängen von k ab. Wir können (181 a) auch auf die Form

181 b $$\mathfrak{z} = Z_1 \sin k(t-\tau_1) + iZ_2 \sin k(t-\tau_2)$$

bringen, wo Z_{12} reell. Dies verbunden mit (173):

181 c $$\zeta = \mathfrak{z}\, e^{i(\chi_0+wt)}$$

gestattet uns, den Satz auszusprechen:

Charakter der Bewegung.

Die orthographische Projektion der reduzierten Bahnkurve auf eine Horizontalebene kann dadurch entstanden gedacht sein, dass der pro-

fizierte Stern eine aus zwei zusammengesetzten Lissajous-Figuren gebildete Bahn durchläuft, während diese mit gleichförmiger ∢-Geschwindigkeit um die Vertikale rotiert.

Wenn wir uns auf C als Einheit beziehen, hängt k von 4 Parametern ab: $w, p_0, A/C, B/C$. Doch ist vor allem die Kenntnis der Abhängigkeit von w wichtig, geometrisch durch Konstruktion des Kegelschnitts, den (179a) darstellt, sofern k^2 als Ordinate, w^2 als Abscisse im rechtwinkligen Koord.-System abgetragen wird. Nur der erste Quadrant ist zu betrachten. Zwei Grenzfälle:

Die Rotat ist null.

A) $w = 0$. Die determinierende Gleichung wird:

$$(Ak^2 + P)(Bk^2 + P) = 0; \qquad 182$$

f. die beiden Wurzeln $k^2 = -P/A,\ -P/B$ *. Für die Realität von k genügt $P < 0$, d. h. Schwerpunkt unter dem Stützpunkt. Bekanntlich ist dies ja der stabile Fall der beiden Gleichgewichtslagen des Kreisels. Die beiden Schwingungen, aus welchen sich die Bewegung des Kreisels bei Störung dieser Lage zusammensetzt, sind die beiden Hauptschwingungen (Fundamentalschwingungen, Principal Oscillations) der Bewegung; denn jede der Gl. (176) zerfällt durch Trennung des Reellen vom Imaginären in das System:

$$\begin{cases} \{(\mathfrak{s}+\mathfrak{d})D^2 - p_0\}\,\mathfrak{x} = 0 \\ \{(\mathfrak{s}-\mathfrak{d})D^2 - p_0\}\,\mathfrak{y} = 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} A\mathfrak{x}'' &= P\mathfrak{x} \\ B\mathfrak{y}'' &= P\mathfrak{y}. \end{aligned} \qquad 183$$

Jede Koordinate schwingt unabhängig von der anderen.

Die Rotat ist unendl

B) $w = \infty$. Setze zunächst $k^2/w^2 = \mathfrak{k}$, und solange $A, B \neq 0$

$$\frac{B - C + P/w^2}{A} = \mathfrak{a},\quad \frac{A - C + P/w^2}{B} = \mathfrak{b},\quad \frac{(A+B-C)^2}{AB} = \mathfrak{c},\ \text{dann} \qquad 184$$

wird Gl. (179a): $(\mathfrak{k}+\mathfrak{a})(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}) = \mathfrak{c}\mathfrak{k}$. Wächst w ins Unendliche, so nähern sich $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ den Werten $\frac{B-C}{A}, \frac{A-C}{B}$ resp., die beiden Wurzeln von (184) den Grenzwerten

$$\mathfrak{k}_1 = 1, \qquad \mathfrak{k}_2 = \frac{C-A\,.\,C-B}{AB}. \qquad 185$$

$\mathfrak{k}_2 > 0$, wenn $C \gtrless A, B$. Die (hinreichend starke) Rotation um die F-A stabiliert die aufrechte Stellung des Kreisels solange, als C nicht mittleres H-T ist**.

---

* Treffpunkte des Kegelschnitts mit der Ordinatenachse.

** Scheiben, Ringe oder dergl. Objekte mit überwiegend ebenen Dimensionen von beliebiger Gestalt können immer durch eine hinreichend starke Rotation um die Vertikale stabil balanziert werden, wenn sie in einem Punkte ihres Randes (es

Der Einfluss einer starken Rotation ist derselbe wie der eines verschwindenden P, weshalb der Satz mit dem entsprechenden über die Stabilität der permanenten Drehachsen eines äquilibrierten Körpers übereinstimmen muss.

Ist aber $A = 0$, so auch $B = C$ und (179a) $k^2 = \frac{Cw^2 - P}{C}$. Sphärisches, einfaches oder stabförmiges Pendel in Horizontalbewegung ($k_{(w=\infty)} = 1$).

Spezielle Fälle.

Es sollen endlich noch einige spezielle Fälle kurz erörtert werden.

1. $A = B$. Mithin $\mathfrak{s} = A/C$, $\mathfrak{d} = 0$ und (177) $\Delta(-k^2) = (\mathfrak{s}'' - \mathfrak{s}k^2)^2 - \mathfrak{s}'^2 k^2 = 0$, oder $\mathfrak{s}'' - \mathfrak{s}k^2 = \pm \mathfrak{s}' k$. Vom Doppelzeichen gilt aber nur das obere, wie aus den Gl. (176) erhellt, aus welchen jetzt nur die eine wesentliche Gleichung $(\mathfrak{s}D^2 + i\mathfrak{s}' D + \mathfrak{s}'')\zeta = 0$ geworden ist. Das $-$Zeichen kann abgehen und die vorletzte Gleichung geschrieben werden:

186a $$\mathfrak{s}(k+w)^2 - w(k+w) + p_0 = 0,$$

deren Wurzeln in $k+w$ sind:

186b $$k+w = \frac{w}{2\mathfrak{s}} \pm \sqrt{\frac{w^2 - 4\mathfrak{s}p_0}{4\mathfrak{s}^2}} = \frac{N}{2A} \pm \sqrt{\frac{N^2 - 4AP}{4A^2}}.$$

187 Folglich $\zeta = Ze^{i\chi_0 + \frac{N}{2A}t} \sin \sqrt{\frac{N^2 - 4AP}{4A^2}}\,(t-\tau)$, wo Z, τ die beiden Integrationskonstanten sind. Wir sind damit zu den Gleichungen der aufrechten Bewegung des symmetrischen Kreisels zurückgekehrt (vgl. KS II p. 331).

188 2. A wenig von B verschieden. Es sei $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{s}} = \frac{A-B}{A+B} = \delta$ so klein, dass wir nur die niedrigste vorkommende Potenz von δ zu behalten brauchen. Wie eben gezeigt, dürfen wir $(\mathfrak{s}'' - \mathfrak{s}k^2)^2 - \mathfrak{s}'^2 k^2$ in das Produkt $\mathfrak{s}^2(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2)$ zerlegen, worin

189 $$k_{12} = \frac{w(1-2\mathfrak{s}) \pm \sqrt{w^2 - 4\mathfrak{s}p_0}}{2\mathfrak{s}},$$

also $\Delta(-k^2) = (\mathfrak{s}'' - \mathfrak{s}k^2)^2 - \mathfrak{s}'^2 k^2 - \mathfrak{d}^2(k^2 - w^2)^2 = 0$ umgestalten in:

190 $$(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2) = \delta^2(k^2 - w^2)^2.$$

---

giebt deren wenigstens 2 auf einer durch den Schwerpunkt gehenden Geraden) unterstützt werden, dessen Verbindungslinie mit dem Schwerpunkt des Körpers zugleich die H-A mit dem kleinsten Trägheitsmoment ist.

Setzen wir nun $k^2 = k_1^2 + \delta^2 \mathfrak{k}$ resp. $= k_2^2 + \delta^2 \mathfrak{k}$, so kommen näherungsweise ($k_1^2 \neq k_2^2$) aus (190) für $\mathfrak{k}$ die Werte

$$\frac{(k_1^2 - w^2)^2}{k_1^2 - k_2^2} \quad \text{resp.} \quad \frac{(k_2^2 - w^2)^2}{k_2^2 - k_1^2},$$

oder mit gleicher Annäherung:

$$k = \pm k_1 \left\{1 + \frac{\delta^2 (k_1^2 - w^2)^2}{2 k_1^2 (k_1^2 - k_2^2)}\right\} \quad \text{resp.} \quad = \pm k_2 \left\{1 - \frac{\delta^2 (k_2^2 - w^2)^2}{2 k_2^2 (k_1^2 - k_2^2)}\right\}. \qquad 191$$

Der Einfluss einer geringen Asymmetrie auf die Frequenz der Schwingungen ist hiernach unmittelbar ersichtlich.

Ist dagegen $k_1 = k_2$, was eintritt, wenn $w^2 = 4\mathfrak{s}p_0$ oder $N^2 = 2(A+B)P$, so ist genau: 192

$$k^2 = \frac{w^2(1-4\mathfrak{s})}{4\mathfrak{s}(\mathfrak{s} \pm \mathfrak{d})} = \frac{p_0(1-4\mathfrak{s})}{\mathfrak{s} \pm \mathfrak{d}}$$

oder

$$\begin{cases} k^{(1)} = \pm\sqrt{\dfrac{C(C-2A-2B)}{2A(A+B)}} = \pm\sqrt{\dfrac{P}{C}\dfrac{C-2A-2B}{A}} \\ k^{(2)} = \pm\sqrt{\dfrac{C(C-2A-2B)}{2B(A+B)}} = \pm\sqrt{\dfrac{P}{C}\dfrac{C-2A-2B}{B}}. \end{cases} \qquad 193$$

3. $C = A+B$. Dann notwendig $P = 0$. (184) $\mathfrak{c} = 0$, 194
$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = -1$, $(k-1)^2 = 0$, oder die Doppelwurzel $\mathfrak{k} = 1$, $k = \pm w$. Hier verschwinden aber zugleich die Unterdeterminanten von $\Delta(-w^2)$ d. h. deren Elemente selbst; denn $2\mathfrak{s} = 1$, $\mathfrak{s}' = 0$, $\mathfrak{s}'' = w^2/2$. Das Gl.-System (176) selbst lautet:

$$\begin{cases} (D^2 + w^2)(\mathfrak{z} + 2\mathfrak{d}\overline{\mathfrak{z}}) = 0 \\ (D^2 + w^2)(\overline{\mathfrak{z}} + 2\mathfrak{d}\mathfrak{z}) = 0, \end{cases} \qquad 195$$

aus dem, abgesehen von dem Fall $2\mathfrak{d} = \pm 1$ (stabförmiger Körper im Schwerpunkt unterstützt), den ich unterdrücke, durch Zerlegung der komplexen Grössen $\mathfrak{z}$, $\overline{\mathfrak{z}}$ sich ergiebt:

$$\mathfrak{x}'' + w^2\mathfrak{x} = 0, \qquad \mathfrak{y}'' + w^2\mathfrak{y} = 0. \qquad 196$$

$\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ führen harmonische Hauptschwingungen mit der Periode $w/2\pi$ aus. Die Horizontalprojektion der reduzierten Bahnkurve ist ein Kreis, der vom Bildpunkt des Sterns mit der gleichförmigen χ-Geschwindigkeit $2w$ durchlaufen wird. — Wenn Platten, die in ihrem Schwerpunkt fixiert werden, sich in ihrer eigenen Ebene drehen, so ist diese Rotation immer stabil.

Die Betrachtung derjenigen Fälle, in welchen k^2 Doppelwurzel der determinierenden Gleichung ist oder imaginäre Perioden auf-

treten, will ich unterlassen. Ein sicheres und vollständiges Urteil über sie wird man doch erst durch Berücksichtigung der vernachlässigten höheren Potenzen von x, y gewinnen.

Historische Notiz.

Das Problem des aufrechten, asymmetrischen Kreisels ist schon in der klassischen Periode der Mechanik, wie es scheint zuerst, von Lagrange gelöst worden. Siehe: Mécanique Analytique (1815) II, Section IX Art. 36—39. Eine von den Euler'schen Gleichungen ausgehende Behandlung ist angedeutet bei Routh, Rigid Dynamics II Art. 212. Dennoch schien es mir nicht überflüssig, für die Lösung desselben Problems eine Methode zu beschreiben, die sich durch ihre Kürze und Durchsichtigkeit empfiehlt.

emerkung zum konischen Pendel.

Die Ermittelung der Nachbarbewegung zum konischen Pendel bietet keine prinzipielle Schwierigkeit dar. Eine Transformation der Koordinaten ϑ, ψ, φ ist nicht notwendig; und die Methode der kleinen Schwingungen wird am besten auf eines der Gleichungssysteme (48), (50) angewandt. Da aber dieselbe Bewegungsart auch beim allgemeinen Kreisel vermöge der Staude'schen Rotation vorhanden ist, so möge an dieser Stelle die Ausführung des speziellen Falles unterbleiben.

Zusammenfassung.

1) Die vorstehende Untersuchung soll zur Vorbereitung messender Versuche mit dem Maxwell'schen Kreisel einen Beitrag liefern. Es war deshalb vor allem nötig, die ideelle Konstruktion des Instruments theoretisch durchsichtig zu machen. Die im ersten Abschnitt aufgestellten Formeln können als die Grundlagen nicht nur für die Massbestimmungen eines zu bauenden Modells, sondern auch für die planmässige numerische Berechnung seiner Trägheitsmomente nach physikalischen Methoden betrachtet werden. Es zeigt ferner die Betrachtung dieser Formeln, welches ausserordentlich geschmeidige Universalinstrument der Maxwell'sche Kreisel ist.

2) Als Beispiel wird die Bewegung eines asymmetrischen Kreisels, dessen F-A mit der S-A vereinigt ist, unter dem Einfluss der Schwere eingehender untersucht. Die konsequente Anwendung des Impulsbegriffes macht uns die mechanische Bedeutung

der Differentialgleichungen der Bewegung klarer, als es aus der blossen Entwicklung derselben nach der Lagrange'schen Vorschrift möglich ist. Drei besonders einfache, geometrisch leicht zu findende, Bewegungsfälle werden als Partikularlösungen dieser Gleichungen ausgeschieden; das ausgezeichnete Verhalten des Impulsvektors stellt das Verhältnis dieser Bewegungen zu den allgemeinen fest.

3) Wir können die Differentialgleichungen der Bewegung näherungsweise allgemein integrieren, wenn wir den Unterschied der äquatorialen H-T des Kreisels, oder exacter seine Elliptizität, als kleine Grösse voraussetzen. Es stellt sich eine Verwandschaft des hierbei angewandten Näherungsverfahrens mit einer Methode der theoretischen Astronomie heraus, die man als die Methode der allgemeinen Störungen bezeichnet. Die wünschenswerte Fehlerabschätzung der gemachten Annäherung scheint verwickelt zu sein. Gelingt es für den bei geringer Elliptizität langsam veränderlichen Parameter w Grenzen zu finden, so kann z. B. die Veränderliche u (d. h. ϑ) leicht zwischen Grenzen eingeschlossen werden, wenn man hierzu Gl. (63) benutzt. Dann aber können wir auch die übrigen beiden Koordinaten des Kreisels eingrenzen.

Die allgemeinen Näherungsformeln werden auf den wichtigen Fall der Präzession angewandt. Die Nutationen, welche sich beim asymmetrischen Kreisel dann stets der regulären Präzession überlagern, können unter besonderen Umständen Schwebungen zeigen. Einen solchen Fall habe ich durch eine Figur zu veranschaulichen gesucht. Man beobachtet an gewöhnlichen, angeblich symmetrischen Kreiseln nicht selten Schwebungserscheinungen; doch wäre erst durch sorgfältige Versuche zu entscheiden, ob sie, wie hier gezeigt, kinetischen oder kinematischen Ursprungs sind (etwa dadurch entstanden, dass man nicht die Bahnkurve der F-A, sondern einer unter kleinem Winkel gegen sie geneigten Achse eines symmetrischen Kreisels sieht).

4) Die Bewegung des aufrechten Kreisels erfordert eine besondere Behandlung, da in der Nähe des Zeniths ϑ, ψ ungeeignete Koordinaten sind. Es sind schliesslich interessante Einzelfälle und insbesondere der eigentümliche Einfluss einer hinreichend starken Rotation um die F-A auf die Stabilität der Bewegung besprochen worden.

Lebenslauf.

Ich, Max Winkelmann, wurde als Sohn des verstorbenen Kaufmanns Paul Winkelmann und seiner Frau Martha geb. Grundt am 10. Januar 1879 in Berlin geboren und bin evangelischen Bekenntnisses. Nach 12jährigem Besuch des Luisenstädtischen Realgymnasiums, zuletzt für das spätere Studium von Lehrern vorbereitet, denen ich ein unauslöschliches Andenken bewahren muss, bezog ich, um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren, die Universitäten Würzburg: Michaelis 1897, Berlin: Ostern 1899 und Göttingen: Ostern 1900. Hier bin ich dauernd Mitglied des math.-phys. Seminars gewesen, und zwar habe ich mit W.-S. 1901/02 an den Uebungen des Herrn Prof. Hilbert, von S.-S. 1901 mit S.-S. 1903 an den Uebungen des Herrn Geh.-Rat Klein teilgenommen. Seit Michaelis 1903 bin ich exmatrikuliert.

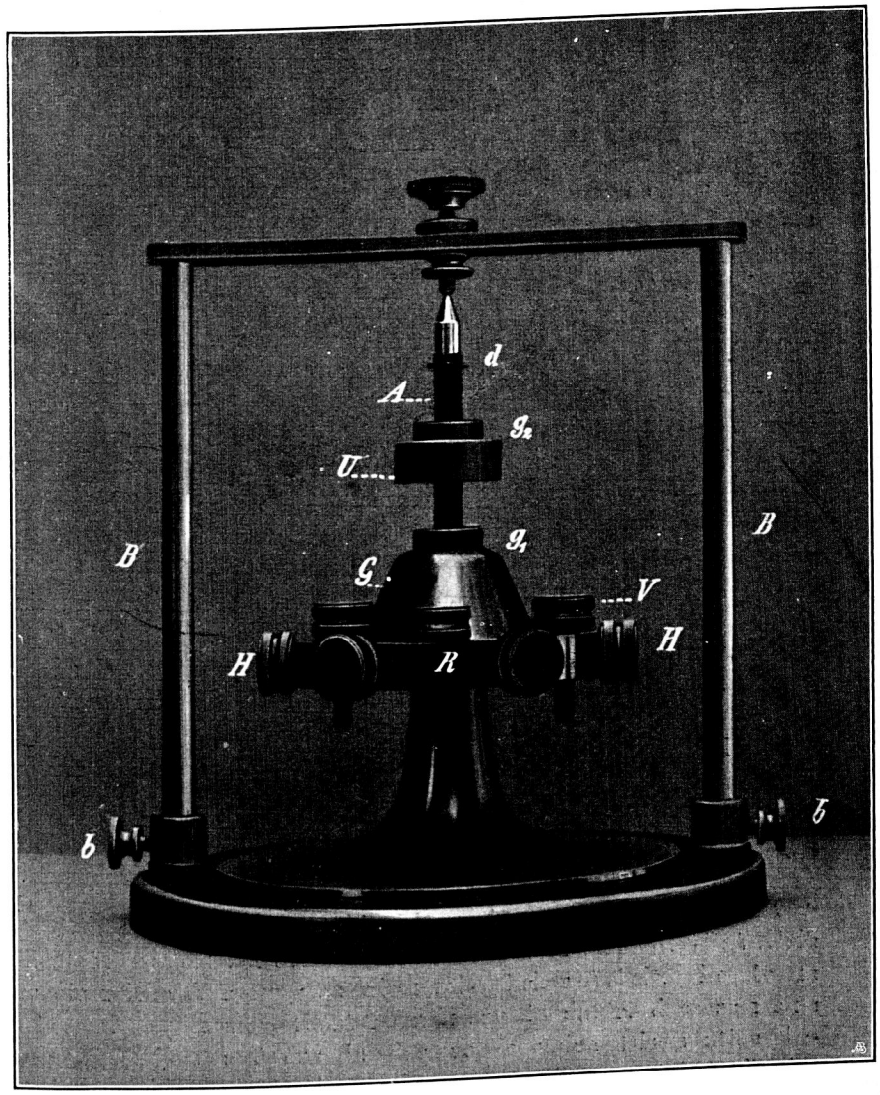
Meine akademischen Lehrer waren:

In Würzburg: Prym, Röntgen, Selling, Stölzle, Voss.

In Berlin: Fuchs †, Hettner, Knoblauch, Paulsen, Planck.

In Göttingen: Abraham, Baumann, Berthold, Blumenthal, Des Coudres, Ehlers, Hilbert, Klein, Lorenz, Müller, Peter, Rhumbler, Riecke, Schilling, Schwarzschild, Voigt, Wiechert.

Den genannten Herren bin ich zu dauernder Dankbarkeit verpflichtet; namentlich den Herren Prof. Hilbert und Geh.-Rat Klein für die reiche Anregung zu wissenschaftlicher Arbeit. Letzterem insbesondere gilt mein tiefster Dank sowohl dafür, dass er meine Aufmerksamkeit auf das in der vorliegenden Dissertation behandelte Gebiet gelenkt hat, als auch für das persönliche Wohlwollen, mit welchem er meine, zuletzt der Mechanik gewidmeten, Studien geleitet und unterstützt hat.



Massstab 10 : 28.

Maxwell'scher Kreisel, Göttingen 1903.