Mathematische Modelle

angefertigt

an der Grossh. badischen technischen Hochschule zu Karlsruhe

unter Leitung von Geh. Hofrath Prof. Dr. **Wiener**.

(Zu Serie XX.)

Modelle der abwickelbaren, der verschlungenen und der geschweiften Regelschraubenfläche.

Von **C. Tesch**,
Assistent an der Grossh. technischen Hochschule in Karlsruhe.

Eine Schraubenfläche entsteht allgemein dadurch, dass eine beliebige Linie, die Erzeugende, eine Schraubenbewegung um eine feste Axe, die Axe der Schraubenfläche, ausführt, oder dass eine beliebige Linie mit der Schraubenlinie eines Kreiscylinders fest verbunden ist, während sich diese in sich selbst bewegt. Es beschreiben dabei sämmtliche Punkte der Erzeugenden Schraubenlinien von derselben Ganghöhe aber verschiedenem Halbmesser. Schneidet die Erzeugende die Axe, so heisst die entstehende Schraubenfläche geschlossen, im anderen Falle offen. Im ersteren Falle gehört die Axe selbst der Fläche an, im zweiten dagegen nicht. Im letzteren Falle beschreibt der der Axe zunächst liegende Punht der Erzeugenden eine Schraubenlinie vom kleinsten Halbmesser, die sogenannte Kehlschraubenlinie.

Ist die Erzeugende im besonderen Falle eine Gerade, so entsteht die Regelschraubenfläche, welche im allgemeinen windschief ist. Es berührt dabei die Erzeugende immer den Kehlschraubencylinder.

Es kann also die Regelschraubenfläche dadurch entstanden gedacht werden, dass die gerade Erzeugende e stets einen Cylinder vom Halbmesser r berührt, während ihr Berührungspunkt auf einer Schraubenlinie mit dem Steigungswinkel σ fortrückt, und die Erzeugende mit einer zu der Cylinderaxe normalen Ebene den konstanten Winkel ε bildet. Die Berührungspunkte bilden dann die Kehlschraubenlinie, deren Ganghöhe ist

$$h = 2\pi r \,.\, \mathrm{tg}\,\sigma.$$

316

Es sind nun die drei Fälle zu unterscheiden

$$\varepsilon = \sigma \text{ und } \varepsilon \gtrless \sigma.$$

Ist $\varepsilon = \sigma$, so bildet die Erzeugende eine Tangente der Kehlschraubenlinie. Es schneiden sich mithin zwei benachbarte Erzeugende, die Fläche ist daher abwickelbar, und die Kehlschraubenlinie ist ihre Rückkehrkante. Für $\varepsilon \gtrless \sigma$ dagegen ist die Fläche windschief.

Der Richtkegel der Regelschraubenfläche ist ein Umdrehungskegel, mit einer zur Schraubenaxe parallelen Axe, dessen Weite $2\,(90^\circ - \varepsilon)$ beträgt. Die asymptotische Ebene für eine gewisse Erzeugende der Fläche ist parallel der Berührungsebene des Richtkegels längs der entsprechenden Erzeugenden. Die Centralebene dieser Erzeugenden steht senkrecht auf der asymptotischen Ebene, muss also parallel zur Schraubenaxe sein, und berührt daher die Schraubenfläche in der Kehlschraubenlinie, da sie ausser der Erzeugenden auch die Tangente der Kehlschraubenlinie enthält. Es ist also diese Kehlschraubenlinie gleichzeitig Striktionslinie der Fläche.

Zieht man in der asymptotischen Ebene einer jeden Erzeugenden e eine zu dieser parallele Gerade e_1 in einem Abstande r_1 von der Axe und stets auf derselben Seite der Axe in Bezug auf e, so bildet die Gesamtheit dieser Parallelen ebenfalls eine Schraubenfläche von derselben Ganghöhe h, und von dem Kehlschraubenhalbmesser r_1.

Macht man $r_1 = \dfrac{h}{2\pi \operatorname{tg} \varepsilon}$, so gilt für den Steigungswinkel σ_1 der zugehörigen Kehlschraubenlinie

$$\operatorname{tg} \sigma_1 = \frac{h}{2\pi r_1} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi \operatorname{tg} \varepsilon}{h} = \operatorname{tg} \varepsilon,$$

es wird also $\sigma_1 = \varepsilon$ und damit die Fläche abwickelbar. Sie ist daher die asymptotische abwickelbare Fläche aller der bezeichneten Schraubenflächen mit demselben h und ε, aber verschiedenen Kehlschraubenhalbmessern r.

Der Normalschnitt der Regelschraubenfläche ist eine Kreisevolvente, wie man durch folgende Ueberlegung erkennt.

Die Projektion der Erzeugenden auf die Normalebene ist Tangente des Kreises, in welchem der Kehlschraubencylinder von dieser Ebene geschnitten wird. Die Kehlschraubenlinie schneide die Normalebene in dem Punkte A. Es sei B ein zweiter Punkt der Kehlschraubenlinie, B' seine Projektion auf die Normalebene, und sei, wenn O der Schnittpunkt der Axe, also Mittelpunkt des Kreises ist, $\sphericalangle AOB' = \omega$. Es ist dann $BB' = r\,\omega \operatorname{tg} \sigma$. Die Erzeugende im Punkte B schneidet die Normalebene in P und ergibt sich, da P auf der Tangente in B' liegen muss, durch

$$B'P = B'B \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon}$$

$$B'P = r\,\omega \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg} \varepsilon},$$

wonach $B'P$ proportional dem Bogen $AB' = r\omega$. Es bilden also die Punkte P ein Kreisevolvente, und zwar eine gemeine, verschlungene oder geschweifte, je nachdem $\varepsilon = \sigma$ oder $\varepsilon \lessgtr \sigma$ ist.

Für $\varepsilon = \sigma$ ist die Fläche abwickelbar, es ist also der Normalschnitt der abwickelbaren Schraubenfläche eine gemeine Kreisevolvente. Die beiden windschiefen Schraubenflächen werden nach der Gestalt ihres Normalschnittes selbst als verschlungen und geschweift unterschieden.

Alle Normalschnitte sind untereinander congruent; es kann daher auch die Regelschraubenfläche durch die Schraubenbewegung einer Kreisevolvente um die im Mittelpunkte des Wälzungskreises zu ihm senkrecht stehende Axe entstehen. Die Kreisevolvente besitzt unendlich viele Doppelpunkte, und diese erzeugen Doppellinien der Schraubenfläche. Es besitzt also die Regelschraubenfläche unendlich viele Doppellinien, welche koaxiale Schraubenlinien von derselben Ganghöhe und demselben Sinne darstellen.

Die Gleichung der Regelschraubenfläche enthält man unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen auf folgende Weise:

Es sei die Schraubenaxe zur z-Axe des rechtwinkeligen Koordinatensystems gewählt, die x-Axe schneide die Kehlschraubenlinie selbst in dem Punkte A. $P\,(x\,y\,z)$ sei ein beliebiger Punkt der Fläche, und es berühre die durch ihn gehende Erzeugende den Kehlschraubencylinder in dem Punkte B, so ist dieser auch ein Punkt der Kehlschraubenlinie. Ist B' die Projektion des B auf die xy-Ebene, so sei $\sphericalangle AOB' = \omega$.

Es ist dann B bestimmt durch seine Koordinaten

$$x_1 = r \cos \omega, \quad y_1 = r \sin \omega, \quad z_1 = r\,\omega \operatorname{tg} \sigma.$$

Es liegt ferner P auf einer den Kehlschraubencylinder in B berührenden Geraden, es müssen also seine Koordinaten der Gleichung genügen

$$x \cos \omega + y \sin \omega = r.$$

Ist P' die Projektion des P auf die xy-Ebene, so ist

$$B'P' = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - r\cos\omega)^2 + (y - r\sin\omega)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}.$$

Ist ferner B'' die Projektion des B auf $P'P$, so ist

$$z = P'P = P'B'' + B''P = B'B + B''P \quad \text{oder}$$

$$z = r\,\omega \operatorname{tg} \sigma + B''P.$$

Es ist aber $B''P = B'P' \operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \varepsilon \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}$, also

$$z = r\,\omega \operatorname{tg} \sigma + \operatorname{tg} \varepsilon \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}, \quad \text{woraus}$$

$$\omega = \frac{z - \operatorname{tg} \varepsilon \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{r \operatorname{tg} \sigma}.$$

118

Dieser Werth in die Gleichung $x \cos \omega + y \sin \omega = r$ eingesetzt, liefert

$$x \cos \frac{z - \operatorname{tg} \varepsilon \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{r \operatorname{tg} \sigma} + y \sin \frac{z - \operatorname{tg} \varepsilon \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{r \operatorname{tg} \sigma} - r = 0$$

als Gleichung der Regelschraubenfläche.

Karlsruhe, im Mai 1891.