

Sonderabdruck

ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE,
H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE UND C. RUNGE
IN STUTTGART IN GÖTTINGEN

60. BAND. 1. HEFT.

MIT EINER TAFEL UND 22 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 10. Oktober 1911.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1911.

Generalregister zu Band 1—50 der Zeitschrift für Mathematik und Physik.
Bearbeitet von Professor Dr. E. Wölffing, Stuttgart. [XII u. 308 S.] gr. 8. geh.
n. M. 15.—, in Leinwand geb. n. M. 16.—

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.
 HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
 DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart-Degerloch

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Wilhelmweberstr. 21, Sendungen für die Redaktion an.

Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Hefen und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

| | Seite |
|--|-------|
| <i>Die Methode der charakteristischen Kurven, als Beitrag zur graphischen Auswertung mehrfacher Integrale.</i> Von L. Assur in St. Petersburg. Mit 17 Figuren im Text und einer Tafel | 1 |
| <i>Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. I. II.</i> Von Wilhelm Blaschke in Greifswald. Mit 4 Figuren. | 61 |
| <i>Drei Gipsmodelle von Flächen konstanter Breite.</i> Unter Mitwirkung von Professor Dr. Fr. Schilling in Danzig herausgegeben von Professor Dr. Ernst Meißner in Zürich. Mit 1 Figur | 92 |
| <i>Kleinere Mitteilungen</i> | 95 |
| <i>Bücherschau</i> | 96 |
| E. Sommerfeld, Die Kristallgruppen nebst ihren Beziehungen zu den Raumgittern. Von F. Haag | 96 |
| Guido Hauck, Lehrbuch der malerischen Perspektive mit Einschluß der Schattenkonstruktionen. Von K. Doehlemann | 96 |
| <i>Neue Bücher</i> | 98 |
| <i>Eingelaufene Schriften</i> | 102 |
| <i>Abhandlungsregister 1909—1910.</i> Von Ernst Wölffing in Stuttgart | 106 |

Zum Abdruck in den nächsten Hefen gelangen Beiträge der Herren: H. Blasius, L. Darapsky, K. Doehlemann, K. Federhofer, P. Fillunger, A. Francke, M. Gebbia, K. Goldzher, F. Haag, G. Majcen, R. Malmström, R. Mehmke, K. Menges, P. Pfeiffer, Th. Pöschl, C. Röhrich, C. Runge, L. v. Schrutka, E. Stübler, H. Wieleitner, C. W. Wirtz, E. Wölffing.

Ein unentbehrlicher Ratgeber für Mathematiker, Physiker, Astronomen usw.

**TASCHENBUCH
 FÜR MATHEMATIKER UND PHYSIKER**

Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben von
Felix Auerbach und **Rudolf Rothe**

II. Jahrgang 1910/11. Mit einem Bildnis Hermann Minkowskis
 In Leinwand gebunden *N* 7.—

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG und BERLIN

Drei Gipsmodelle von Flächen konstanter Breite.¹⁾

Unter Mitwirkung von Professor Dr. Fr. Schilling in Danzig
herausgegeben von Prof. Dr. ERNST MEISSNER in Zürich.

Flächen konstanter Breite b sind konvexe, geschlossene Flächen von der Art, daß je zwei parallele Stützebenen den Abstand b besitzen. Sie können daher zwischen zwei festen, parallelen Ebenen noch (mit fünf Freiheitsgeraden) so bewegt werden, daß sie dieselben stets berühren.

Der von einer Fläche konstanter Breite umschlossene Raum heiße *Körper konstanter Breite*. Für ihn ergibt sich folgende einfache Definition²⁾:

- $\alpha)$ Eine Punktmenge Π habe die Distanzschranke b , d. h. für irgend zwei Punkte P und Q von Π sei Distanz $(P, Q) \leq b$.
- $\beta)$ Die Punktmenge Π sei vollständig, d. h. es sei unmöglich Π durch neue Punkte so zu ergänzen, daß die Eigenschaft (α) erhalten bleibt.

Die Punktmenge Π erfüllt dann einen Körper konstanter Breite b , und umgekehrt repräsentiert jeder solche eine Punktmenge Π .

Die Definition von Π kann für Räume beliebiger Dimensionszahl beibehalten werden. Auch kann an Stelle der gewöhnlichen euklidischen Geometrie die Minkowskische Geometrie treten³⁾, in der die Maßbestimmung durch eine konvexe Eichfläche vermittelt wird.³⁾ (Strahldistanzen.)

Liegt z. B. Π in der zweidimensionalen, euklidischen Ebene, so bilden die Randpunkte von Π eine *Kurve konstanter Breite*. Ihre Eigenschaften sind von A. Hurwitz⁴⁾ untersucht und von E. Meißner⁵⁾ verallgemeinert worden.

1) Diese Modelle sind inzwischen im Verlage des Herrn Martin Schilling in Leipzig erschienen.

2) E. Meißner, Punktmengen konstanter Breite. Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. Zürich 1911.

3) H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896. S. 1.

4) A. Hurwitz, Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. de l'école norm. 1902 T. XIX.

5) E. Meißner, Über die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik. Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. Zürich 1909.

Flächen konstanter Breite im gewöhnlichen Raum, wie die herausgegebenen Modelle sie darstellen, können die Singularitäten eigentlich konvexer Flächen besitzen, nämlich

1. Kantenpunkte mit einem Büschel von Stützebenen.
2. Eckpunkte mit einem Bündel von Stützebenen.

Für die Größe der Kanten und Ecken existieren obere Grenzen, die bei der Rotationsfläche des Reuleauxschen Kreisbogendreiecks erreicht werden. (Modell 2).

Außer der Kugel gibt es keine von lauter Kugelflächen begrenzte Fläche konstanter Breite.¹⁾

Normale in einem Punkte P einer konvexen Fläche soll jede Gerade heißen, die normal zu einer Stützebene der Fläche in P steht. Es gilt dann der Satz:

Jede Normale einer Fläche konstanter Breite ist Binormale, d. h. tritt eine Gerade auf der einen Seite der Fläche normal in sie ein, so tritt sie auf der entgegengesetzten Seite auch normal aus.

Unter dem Profil einer Fläche aus gegebener Richtung soll die Umrißkurve der Orthogonalprojektion der Fläche aus dieser Richtung verstanden werden.

Minkowski²⁾ hat folgenden schönen Satz entdeckt: Jede Fläche konstanter Profillänge ist auch konstanter Breite und umgekehrt.

Man kann also aus vollkommen biegsamem Material einen Zylinder herstellen, der sich in jeder Richtung so über die Fläche stülpen läßt, daß er sich längs seines ganzen Umfangs an die Fläche anschließt.

Das Modell No. 1 ist eine algebraische Rotationsfläche konstanter Breite und entsteht durch Rotation einer symmetrischen Kurve konstanter Breite um ihre Symmetrieachse.

Ist
$$x \cos u + y \sin u - p(u) = 0$$

die auf rechtwinklige Koordinaten bezogene Gleichung der Tangente des Meridians, so ist für das Modell

$$p(u) = \frac{b}{2} (1 + \frac{1}{3} \cos(3u))$$

gesetzt worden. Der Krümmungsradius $\rho(u)$ im Berührungspunkte ist:

$$\rho(u) = \frac{b}{2} (1 - \cos(3u)).$$

1) E. Meißner, Punktmengen konstanter Breite. Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. Zürich 1911.

2) H. Minkowski, Über die Körper konstanter Breite. In russischer Sprache erschienen in: *Mathematičesky Sbornik* Moskau, Bd. 25; deutsch in den „Gesammelten Abhandlungen“ Minkowskis, Bd. II, S. 277—279.

Er wird in den drei Scheiteln A, B, C der Kurve gleich Null. Rotiert man um AD , so wird in A und längs des Breitenkreises BC die Gaußsche Krümmung der Rotationsfläche unendlich. Die Gleichungen des Meridians in Parameterform lauten:

$$x = p(u) \cos u - p'(u) \sin u,$$

$$y = p(u) \cdot \sin u + p'(u) \cos u,$$

$$\text{wo } p'(u) = \frac{dp(u)}{du} = -\frac{3b}{16} \sin(3u)$$

ist.

Das Modell 2 ist die Rotationsfläche des Reuleauxschen Kreisbogendreiecks.

Man beschreibe um jeden Eckpunkt eines gleichseitigen Dreiecks ABC als Mittelpunkt den die zwei andern Ecken verbindenden Kreisbogen. Das so entstehende Kreisbogen-

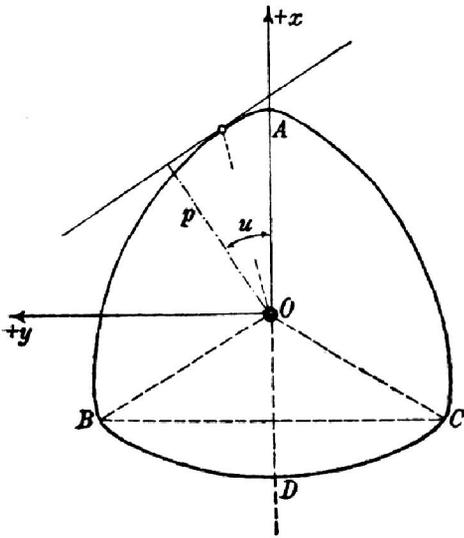
dreieck hat konstante Breite.¹⁾ Läßt man es um die von A ausgehende Dreieckshöhe rotieren, so entsteht die im Modell 2 dargestellte Fläche konstanter Breite. Sie hat in A eine Ecke, längs des Parallelkreises BC eine Kante maximaler Größe, und besteht aus einer Torus- und einer Kugelfläche.

Das Modell 3 gibt ein Beispiel einer Fläche konstanter Breite, die nicht Rotationsfläche ist. Sie ist von vier Kugel- und drei Torusflächen begrenzt und entsteht folgenderweise:

Um jeden Eckpunkt eines regulären Tetraeders $ABCD$ als Zentrum lege man die Kugel durch die drei übrigen Ecken. Der den vier Kugeln gemeinsame Raum kann zu einem Körper konstanter Breite gemacht werden, indem man drei seiner sechs Kanten durch Ringflächen abstutzt, etwa die drei Kanten AB, AC, AD . Dabei entsteht die Ringfläche, die z. B. die Kante AB abrundet, wenn man den Kreis durch A und B und vom Zentrum C um AB als Achse dreht.

Bei allen drei Modellen ist die Breite b gleich 12 cm gewählt. Beigegeben wird ihnen ein Meßapparat für diese Breite, der aus einem mit Tuch überzogenen Holzuntersatz mit zwei vertikalen Stützen in der Entfernung 12 cm besteht; ferner sechs biegsame Zylinder aus Pausleinen, die der konstanten Profillänge entsprechend, beliebig um die Modelle herumgelegt werden können.

1) Reuleaux, Theoretische Kinematik. Bd. I. Braunschweig 1875, Seite 130 ff.



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA.

Sub auspiciis societatis scientiarum naturalium Helveticae.

Edenda curaverunt F. Rudio, A. Krazer et P. Stäckel.

45 Bände in 3 Serien.

SERIE I, BAND I

Vollständige Anleitung zur Algebra

mit den Zusätzen von Joseph Louis Lagrange.

Herausgegeben von
Heinrich Weber.

Mit einem Bilde von Euler nach dem Stiche von Mechel, einem Vorwort zur Eulerausgabe und der Lobrede von Nicolaus Fuss. [XCVI u. 651 S.] 4. kart. M 28.50.

Die „Vollständige Anleitung zur Algebra“ ist zuerst 1770 in 2 Teilen in Petersburg erschienen. Sie gehörte wegen der meisterhaften Klarheit, mit der sie geschrieben ist, zu den bedeutendsten Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts. Sie wird aber auch heute noch mit großem Gewinn gelesen werden, da sie trotz ihres elementaren Charakters zu tiefliegenden Problemen der Algebra und der Zahlentheorie führt. Der erste Teil handelt „Von den verschiedenen Rechnungsarten, Verhältnissen und Proportionen“, der zweite „Von Auflösung algebraischer Gleichungen und der unbestimmten Analytik“. Diesem letzten Abschnitt des zweiten Teiles gelten die berühmten „Additions“ von Lagrange, durch deren Aufnahme der Band eine wesentliche Bereicherung erfahren hat.

Unter der Presse:

Serie I, Vol. 14: **Abhandlungen über elliptische Integrale.** Herausgeg. von A. Krazer.

Serie II, Vol. 1: **Mechanik I.** Herausgegeben von P. Stäckel.

Serie III, Vol. 3: **Dioptrik I.** Vol. 4: **Dioptrik II.** Herausgegeben von E. Cherbuliez.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Elemente der Funktionentheorie

Vorlesungen, gehalten an der Universität Kopenhagen von

Dr. Niels Nielsen

Orientlichem Professor der reinen Mathematik

[X u. 520 S.] gr. 8. 1911. In Leinwand gebunden M 15.—

Das vorliegende Lehrbuch ist hervorgegangen aus der dritten Vorlesungsreihe über Analysis, die der Verfasser an der Universität Kopenhagen hielt. Der Hauptzweck des Werkes, die Fundamentaltheorien der Analysis in organischer Verbindung darzustellen, wird erreicht, indem im ersten Hauptabschnitte die Funktionen reeller Veränderlicher, dann die Funktionen komplexer Veränderlicher, im letzten Abschnitt schließlich die elementaren Funktionen behandelt werden. Seine Erfahrung als akademischer Lehrer führt den Verfasser dazu, sich nicht mit der systematischen Darstellung der Theorie zu begnügen, sondern überall, wo es nur möglich war, Übungsaufgaben einzuschalten, um den angehenden Mathematiker zum Selbstdenken, zu eigenen Forschungen zu zwingen. Ebenso wollen die recht zahlreichen Quellenzitate den Leser anregen, die Originalarbeiten der großen Meister selbst zu studieren.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Vollständig liegen vor:

HERMANN GRASSMANN'S

Gesammelte mathematische und physikalische Werke.

Auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften herausgegeben von Friedrich Engel, Professor an der Universität Greifswald.

In 3 Bänden. gr. 8. Geheftet.

- I. Band. I. Teil: Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse. Mit dem Bildnis Grassmanns in Holzschnitt und 35 Figuren. [XVI u. 435 S.] 1894. M 12.—
- I. Band. II. Teil: Die Ausdehnungslehre von 1862. Mit 37 Figuren. [VIII u. 511 S.] 1896. M 16.—
- II. Band. I. Teil: Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis. Mit 45 Figuren. [X u. 452 S.] 1904. M 16.—
- II. Band. II. Teil: Die Abhandlungen zur Mechanik und mathematischen Physik. Mit 51 Figuren. [VIII u. 266 S.] 1902. M 14.—
- III. Band. I. Teil: Prüfungsarbeit über Ebbe und Flut (1840); Abhandlungen zur mathematischen Physik aus dem Nachlaß. Mit 16 Figuren. [VI u. 354 S.] 1911. M 18.—
- III. Band. II. Teil: Grassmanns Leben. Geschildert von Friedrich Engel. Nebst einem Verzeichnisse der von Grassmann veröffentlichten Schriften und einer Übersicht des handschriftlichen Nachlasses. Mit 3 Figuren. [XVI u. 400 S.] 1911. M 18.—

Das große Unternehmen der Herausgabe der gesammelten mathematischen und physikalischen Werke Hermann Grassmanns liegt jetzt mit dem Erscheinen des II. Teiles des III. Bandes abgeschlossen vor. Die Bedeutung dieser Gesamtausgabe liegt nicht nur darin, daß die sonst schwer zugänglichen Schriften wieder ans Tageslicht gezogen worden sind, sondern hauptsächlich auch darin, daß neben einer vollständigen textkritischen Behandlung in einer umfangreichen Reihe von Anmerkungen ein Kommentar geliefert ist, wie er gewissenhafter und zweckdienlicher nicht gedacht werden kann.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Theorie der linearen Differenzgleichungen

Unter Mitwirkung von Alf Guldberg (Kristiania)
von Georg Wallenberg (Charlottenburg)

Mit 5 Figuren. [XIV u. 288 S.] gr. 8. 1911. Geh. M 10.—, in Leinw. geb. M 11.—

In dem vorliegenden Buche ist zum ersten Male der Versuch unternommen, auf Grund der bisherigen Forschungen auf diesem Gebiete eine zusammenhängende Theorie der linearen Differenzgleichungen aufzubauen, in dem Bestreben, dieselbe über das Niveau der rekurrenten Reihen zu erheben und sie an die Seite der Theorie der linearen Differentialgleichungen zu stellen; dementsprechend wird die unabhängige Veränderliche als stetig variabel betrachtet, zum Teil sogar im komplexen Gebiete. — Das Buch besteht aus zwei Teilen: der erste enthält die grundlegenden Begriffe und die formalen Theorien, an deren Aufbau neben Pincherle und seinen Schülern auch die beiden Verfasser in ausgedehntem Maße beteiligt sind; der zweite, funktionentheoretische Teil behandelt die eigentliche Integration der linearen Differenzgleichungen durch analytische Ausdrücke, wobei auch die neuesten Arbeiten auf diesem Gebiete berücksichtigt werden.

Hierzu als Beilage ein Prospekt über Kinodiaphragmatische Projektionsapparate von Prof. Dr. Papperitz in Freiberg i. Sa., Beilagen von S. Hirzel in Leipzig und B. G. Teubner in Leipzig und Berlin, die der Beachtung der Leser empfohlen werden.