Sonderabdruck

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND C. RUNGE IN GÖTTINGEN

60. BAND. 1. HEFT.

MIT EINER TAFEL UND 22 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 10. Oktober 1911.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1911.

40

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart-Degerloch

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Wilhelmweberstr. 21, Sendungen für die Redaktion an.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

Seite

☛ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:
H. Blasius, L. Darapsky, K. Doehlemann, K. Federhofer, P. Fillunger, A. Francke, M. Gebbia, K. Goldziher, F. Haag, G. Majcen, R. Malmström, R. Mehmke, K. Menges, P. Pfeiffer, Th. Pöschl, C. Röhrich, C. Runge, L. v. Schrutka, E. Stübler, H. Wieleitner, C. W. Wirtz, E. Wölffing.

Sonderabdruck aus Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 60. Band. 1911. Heft 1.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Drei Gipsmodelle von Flächen konstanter Breite.[1]

Unter Mitwirkung von Professor Dr. Fr. Schilling in Danzig
herausgegeben von Prof. Dr. Ernst Meissner in Zürich.

Flächen konstanter Breite b sind konvexe, geschlossene Flächen von der Art, daß je zwei parallele Stützebenen den Abstand b besitzen. Sie können daher zwischen zwei festen, parallelen Ebenen noch (mit fünf Freiheitsgeraden) so bewegt werden, daß sie dieselben stets berühren.

Der von einer Fläche konstanter Breite umschlossene Raum heiße *Körper konstanter Breite.* Für ihn ergibt sich folgende einfache Definition[2]):

α) *Eine Punktmenge Π habe die Distanzschranke b,* d. h. für irgend zwei Punkte P und Q von Π sei Distanz $(P, Q) \leqq b$.

β) *Die Punktmenge Π sei vollständig,* d. h. es sei unmöglich Π durch neue Punkte so zu ergänzen, daß die Eigenschaft (α) erhalten bleibt.

Die Punktmenge Π erfüllt dann einen Körper konstanter Breite b, und umgekehrt repräsentiert jeder solche eine Punktmenge Π.

Die Definition von Π kann für Räume beliebiger Dimensionszahl beibehalten werden. Auch kann an Stelle der gewöhnlichen eine Minkowskische Geometrie treten[2]), in der die Maßbestimmung durch eine konvexe Eichfläche vermittelt wird.[3]) (Strahldistanzen.)

Liegt z. B. Π in der zweidimensionalen, euklidischen Ebene, so bilden die Randpunkte von Π eine *Kurve konstanter Breite.* Ihre Eigenschaften sind von A. Hurwitz[4]) untersucht und von E. Meißner[5]) verallgemeinert worden.

---

1) Diese Modelle sind inzwischen im Verlage des Herrn Martin Schilling in Leipzig erschienen.

2) E. Meißner, Punktmengen konstanter Breite. Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. Zürich 1911.

3) H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896. S. 1.

4) A. Hurwitz, Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. de l'école norm. 1902 T. XIX.

5) E. Meißner, Über die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik. Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. Zürich 1909.

Flächen konstanter Breite im gewöhnlichen Raum, wie die herausgegebenen Modelle sie darstellen, können die Singularitäten eigentlich konvexer Flächen besitzen, nämlich

1. Kantenpunkte mit einem Büschel von Stützebenen.
2. Eckpunkte mit einem Bündel von Stützebenen.

Für die Größe der Kanten und Ecken existieren obere Grenzen, die bei der Rotationsfläche des Reuleauxschen Kreisbogendreiecks erreicht werden. (Modell 2).

Außer der Kugel gibt es keine von lauter Kugelflächen begrenzte Fläche konstanter Breite.[1])

Normale in einem Punkte P einer konvexen Fläche soll jede Gerade heißen, die normal zu einer Stützebene der Fläche in P steht. Es gilt dann der Satz:

Jede Normale einer Fläche konstanter Breite ist Binormale, d. h. tritt eine Gerade auf der einen Seite der Fläche normal in sie ein, so tritt sie auf der entgegengesetzten Seite auch normal aus.

Unter dem Profil einer Fläche aus gegebener Richtung soll die Umrißkurve der Orthogonalprojektion der Fläche aus dieser Richtung verstanden werden.

Minkowski[2]) hat folgenden schönen Satz entdeckt: Jede Fläche konstanter Profillänge ist auch konstanter Breite und umgekehrt.

Man kann also aus vollkommen biegsamem Material einen Zylinder herstellen, der sich in jeder Richtung so über die Fläche stülpen läßt, daß er sich längs seines ganzen Umfangs an die Fläche anschließt.

Das Modell No. 1 ist eine algebraische Rotationsfläche konstanter Breite und entsteht durch Rotation einer symmetrischen Kurve konstanter Breite um ihre Symmetrieachse.

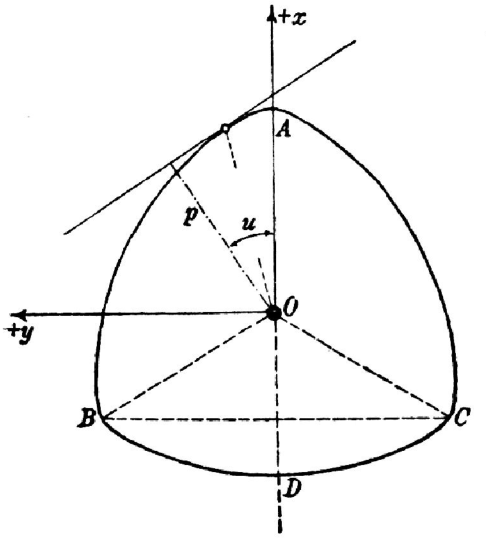
Ist
$$x \cos u + y \sin u - p(u) = 0$$
die auf rechtwinklige Koordinaten bezogene Gleichung der Tangente des Meridians, so ist für das Modell
$$p(u) = \frac{b}{2}\left(1 + \tfrac{1}{8} \cos(3u)\right)$$
gesetzt worden. Der Krümmungsradius $\varrho(u)$ im Berührungspunkte ist:
$$\varrho(u) = \frac{b}{2}\left(1 - \cos(3u)\right).$$

---

1) E. Meißner, Punktmengen konstanter Breite. Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges Zürich 1911.

2) H. Minkowski, Über die Körper konstanter Breite. In russischer Sprache erschienen in: Mathematičesky Sbornik Moskau, Bd. 25; deutsch in den „Gesammelten Abhandlungen“ Minkowskis, Bd. II, S. 277—279.

Er wird in den drei Scheiteln A, B, C der Kurve gleich Null. Rotiert man um AD, so wird in A und längs des Breitenkreises BC die Gaußsche Krümmung der Rotationsfläche unendlich. Die Gleichungen des Meridians in Parameterform lauten:



$$x = p(u) \cos u - p'(u) \sin u,$$
$$y = p(u) \cdot \sin u + p'(u) \cos u,$$

wo $\quad p'(u) = \frac{dp(u)}{du} = -\frac{3b}{16} \sin(3u)$

ist.

Das Modell 2 ist die *Rotationsfläche des Reuleauxschen Kreisbogendreiecks.*

Man beschreibe um jeden Eckpunkt eines gleichseitigen Dreiecks ABC als Mittelpunkt den die zwei andern Ecken verbindenden Kreisbogen. Das so entstehende Kreisbogendreieck hat konstante Breite.[1]) Läßt man es um die von A ausgehende Dreieckshöhe rotieren, so entsteht die im Modell 2 dargestellte Fläche konstanter Breite. Sie hat in A eine Ecke, längs des Parallelkreises BC eine Kante maximaler Größe, und besteht aus einer Torus- und einer Kugelfläche.

Das Modell 3 gibt ein Beispiel einer Fläche konstanter Breite, die nicht Rotationsfläche ist. Sie ist von vier Kugel- und drei Torusflächen begrenzt und entsteht folgenderweise:

Um jeden Eckpunkt eines regulären Tetraeders $ABCD$ als Zentrum lege man die Kugel durch die drei übrigen Ecken. Der den vier Kugeln gemeinsame Raum kann zu einem Körper konstanter Breite gemacht werden, indem man drei seiner sechs Kanten durch Ringflächen abstutzt, etwa die drei Kanten AB, AC, AD. Dabei entsteht die Ringfläche, die z. B. die Kante AB abrundet, wenn man den Kreis durch A und B und vom Zentrum C um AB als Achse dreht.

Bei allen drei Modellen ist die Breite b gleich 12 cm gewählt. Beigegeben wird ihnen ein Meßapparat für diese Breite, der aus einem mit Tuch überzogenen Holzuntersatz mit zwei vertikalen Stützen in der Entfernung 12 cm besteht; ferner sechs biegsame Zylinder aus Pausleinen, die der konstanten Profillänge entsprechend, beliebig um die Modelle herumgelegt werden können.

1) Reuleaux, Theoretische Kinematik. Bd. I. Braunschweig 1875, Seite 130 ff.

33 346

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Vollständig liegen vor:

HERMANN GRASSMANNs

Gesammelte mathematische und physikalische Werke.

Auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften herausgegeben von

Friedrich Engel, Professor an der Universität Greifswald.

In 3 Bänden. gr. 8. Geheftet.

I. Band. I. Teil: **Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse.** Mit dem Bildnis Graßmanns in Holzschnitt und 35 Figuren. [XVI u. 435 S.] 1894. ℳ 12.—

I. Band. II. Teil: **Die Ausdehnungslehre von 1862.** Mit 37 Figuren. [VIII u. 511 S.] 1896. ℳ 16.—

II. Band. I. Teil: **Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis.** Mit 45 Figuren. [X u. 452 S.] 1904. ℳ 16.—

II. Band. II. Teil: **Die Abhandlungen zur Mechanik und mathematischen Physik.** Mit 51 Figuren. [VIII u. 266 S.] 1902. ℳ 14.—

III. Band. I. Teil: **Prüfungsarbeit über Ebbe und Flut (1840); Abhandlungen zur mathematischen Physik aus dem Nachlaß.** Mit 16 Figuren. [VI u. 354 S.] 1911. ℳ 18.—

III. Band. II. Teil: **Graßmanns Leben.** Geschildert von Friedrich Engel. Nebst einem Verzeichnisse der von Graßmann veröffentlichten Schriften und einer Übersicht des handschriftlichen Nachlasses. Mit 3 Figuren. [XVI u. 400 S.] 1911. ℳ 18.—

Das große Unternehmen der Herausgabe der gesammelten mathematischen und physikalischen Werke Hermann Graßmanns liegt jetzt mit dem Erscheinen des II. Teiles des III. Bandes abgeschlossen vor. Die Bedeutung dieser Gesamtausgabe liegt nicht nur darin, daß die sonst schwer zugänglichen Schriften wieder ans Tageslicht gezogen worden sind, sondern hauptsächlich auch darin, daß neben einer vollständigen textkritischen Behandlung in einer umfangreichen Reihe von Anmerkungen ein Kommentar geliefert ist, wie er gewissenhafter und zweckdienlicher nicht gedacht werden kann.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Theorie der linearen Differenzengleichungen

Unter Mitwirkung von **Alf Guldberg** (Kristiania)
von **Georg Wallenberg** (Charlottenburg)

Mit 5 Figuren. [XIV u. 288 S.] gr. 8. 1911. Geh. ℳ 10.—, in Leinw. geb. ℳ 11.—

In dem vorliegenden Buche ist zum ersten Male der Versuch unternommen, auf Grund der bisherigen Forschungen auf diesem Gebiete eine zusammenhängende Theorie der linearen Differenzengleichungen aufzubauen, in dem Bestreben, dieselbe über das Niveau der rekurrenten Reihen zu erheben und sie an die Seite der Theorie der linearen Differentialgleichungen zu stellen; dementsprechend wird die unabhängige Veränderliche als stetig variabel betrachtet, zum Teil sogar im komplexen Gebiete. — Das Buch besteht aus zwei Teilen: der erste enthält die grundlegenden Begriffe und die formalen Theorien, an deren Aufbau neben Pincherle und seinen Schülern auch die beiden Verfasser in ausgedehntem Maße beteiligt sind: der zweite, funktionentheoretische Teil behandelt die eigentliche Integration der linearen Differenzengleichungen durch analytische Ausdrücke, wobei auch die neuesten Arbeiten auf diesem Gebiete berücksichtigt werden.

Hierzu als Beilage ein Prospekt über Kinodiaphragmatische Projektionsapparate von Prof. Dr. **Papperitz** in **Freiberg** i. Sa., Beilagen von **S. Hirzel** in **Leipzig** und **B. G. Teubner** in **Leipzig** und **Berlin**, die der Beachtung der Leser empfohlen werden.