Mathematische Abhandlungen aus dem Verlage mathematischer Modelle von Martin Schilling in Halle a. S.

Neue Folge Nr. 2.

Die

Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung

in 13 Gattungen.

Von

Dr. Hermann Wiener,

Professor an der Grossh. Techn. Hochschule zu Darmstadt.

Abhandlung zu den Modellen der Serie XXV, Nr. 1—7.

Halle a. S.

Verlag von Martin Schilling.

1901.

Die

Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung

in 13 Gattungen.

Von

Dr. Hermann Wiener,
Professor an der Grossh. Techn. Hochschule zu Darmstadt.

Mit zwei Figuren:

I. Die Konfiguration der neun Wendepunkte einer ebenen Kurve dritter Ordnung.
II. Der syzygetische Büschel von Kurven dritter Ordnung.

Halle a. S.
Verlag von Martin Schilling.
1901.

Inhalt.

		Seite
	Einleitung	1
	Ziel und Methode der Abhandlung	1
I.	**Bisherige Einteilungen der ebenen Kurven dritter Ordnung**	2
	Newton, Euler, Plücker, Cayley	2
	Möbius, Salmon	3
II.	**Möbius' Plan der Kurveneinteilung und ein geordnetes System aller möglichen Einteilungen**	4
	Ein System von Einteilungen bei Berücksichtigung der unendlich fernen Geraden	4
	Möbius' Unterscheidungen in Arten und Gattungen vermittelst affiner und kollinearer Abbildungen	5
III.	**Geschlecht, Klasse und Singularitäten der ebenen Kurven dritter Ordnung**	6
IV.	**Kollineationen, die eine Kurve dritter Ordnung vom Geschlecht null in sich oder in eine andere Kurve abbilden**	7
	Harmonische perspektive Kollineationen, die eine Kurve dritter Ordnung in sich abbilden	7
	Kurven dritter Ordnung dritter Klasse	8
	Kurven dritter Ordnung vierter Klasse	9
	Reellitätsunterschiede	10
V.	**Kollineationen, die eine Kurve dritter Ordnung vom Geschlecht eins in sich oder in eine andere Kurve abbilden**	11
	Der syzygetische Büschel	11
	Die gegenseitige Lage der 9 Wendepunkte; 12 Wendepunktsgeraden; 4 Wendepunktsdreiseite, cyklisch-perspektive Kollineation, 6-fach perspektive Dreiseite	11
	Kollineationen, die die 9 Wendepunkte in sich abbilden. Gruppe von 216 Kollineationen	13
VI.	**Fortsetzung: Die sechs Arten von Kollineationen und die in ihnen festbleibenden Kurven**	14
	Kollineationen, die jede Kurve des Büschels in sich abbilden (1. u. 2. Art)	14
	Cyklisch perspektive Kollineationen von der Periode drei (3. Art)	15
	Die vier äquianharmonischen Kurven	17
	Kollineationen, die sich aus solchen der 1. oder 2. Art mit denen der 3. Art zusammensetzen (4. und 5. Art)	17
	Kollineationen, die sich aus zweien der 3. Art zusammensetzen (6. Art)	19
	Invariante Untergruppen der Gruppe von 216 Kollineationen	20
	Die sechs harmonischen Kurven	20
	Zusammenfassung	21

		Seite
VII.	**Fortsetzung: Unterscheidung nach der Reellität**	21
	Die zwei reellen äquianharmonischen und die zwei reellen harmonischen Kurven	21
	Die reellen Kollineationen, die den syzygetischen Büschel in sich abbilden	22
	Die imaginären Kollineationen, die eine reelle Kurve des Büschels in eine reelle abbilden	23
VIII.	**Die Vervollständigung der Möbius'schen Einteilung**	24
	Der Möbius'sche Einteilungsgrundsatz und die eine äquianharmonische Kurve als Möbius'sche Grenzkurve	25
	Schärfere Fassung des Einteilungsgrundsatzes	27
	Ergänzung der Grenzkurve durch die andre reelle äquianharmonische und die beiden reellen harmonischen Kurven	28
IX.	**Die 13 Gattungen der ebenen Kurven dritter Ordnung**	29
X.	**Über die Möglichkeit der Weiterführung der Einteilung**	29
XI.	**Erklärung der Figuren**	30
	Die Konfiguration der neun Wendepunkte	30
	Der syzygetische Büschel	32

Figur 1 steht auf Seite 30, Figur 2 am Schluss der Abhandlungen.

Einleitung.

Während die Kegelschnitte von Alters her und heute noch in die drei Arten Ellipse, Hyperbel und Parabel eingeteilt werden, sind bei den Kurven dritter Ordnung die gestaltlichen Unterschiede so mannigfacher Natur, dass ihre Einteilung in Arten und Unterarten immer wieder neue Bearbeiter gefunden hat. Unter den vielerlei bestehenden hat die Einteilung dieser Kurven durch Möbius in fünf, oder bei feinerer Unterscheidung in sieben Gattungen wohl den Vorzug grösster Übersichtlichkeit; Möbius fasst von vornherein alle diejenigen Kurven, die ebene Schnitte eines und desselben Kegels sein können, als gleichartig auf, und wählt überdies aus allen denkbaren nicht kollinearen Kegeln dritter Ordnung nur gewisse leicht unterscheidbare als Vertreter einer Gattung aus.

Legt man die Möbius'sche Einteilung der Kurven zu Grunde, so ist es auch leicht, sich über die vielfachen Gestalten zu unterrichten, die aus jedem der Kegel durch ebene Schnitte hervorgehen. Am bequemsten gewinnt man eine Übersicht an der Hand von Fadenmodellen dieser Kegel.[1] Durch den Scheitel eines solchen kann man Ebenen legen, die ihn auf sehr verschiedene Arten schneiden oder berühren können, und jede solche Ebene gibt parallel verschoben zu einer Schar unter einander ähnlicher und in ihrer Gestalt durch die Lage der Ausgangsebene völlig bestimmter Schnittkurven Anlass. Diese Scheitelebenen nach verschiedenen Gesichtspunkten auszuwählen, ist eine auch für den Anfänger leichte und lohnende Aufgabe, die ganz besonders geeignet ist, ihm den so wichtigen Begriff der kollinearen Abbildung näher zu bringen. Wenn so diese Modelle mancherlei unmittelbar abzulesen gestatten, so regen sie andrerseits Fragen an, deren Beantwortung ein tieferes Eindringen verlangt. Hierher gehört z. B. die Untersuchung der Beziehungen zwischen der ausserordentlich weitgehenden Plücker'schen Einteilung zu der von Möbius. Dabei wird die Frage aufzuwerfen sein, ob die Möbius'schen Kegel ausreichen, um aus ihnen durch verschieden gelegte ebene Schnitte alle Plücker'sche Kurven entstehen zu lassen, und ob die Möbius'sche Einteilung einer Erweiterung fähig

[1] Solche Modelle sind in dem Verlage von Martin Schilling in Halle a. S. (Serie XXV) erschienen.

sei, und die einschneidendere Frage, ob sie nicht etwa anfechtbar sei. Man bedenke, dass sich seit Möbius' Untersuchungen unsere Kenntnisse über die Eigenschaften der Kurven dritter Ordnung wesentlich erweitert haben, dass insbesondere die Kenntnis der neun Wendepunkte und ihrer gegenseitigen Lage, sowie des durch sie hindurchgehenden „syzygetischen“ Büschels von Kurven dritter Ordnung uns wichtige Aufklärungen gebracht hat.

Die vorliegende Abhandlung beabsichtigt, die Möbius'sche Einteilung an der Hand jener neuen Gesichtspunkte nachzuprüfen. Abgesehen von diesen schliesse ich mich völlig an Möbius an, indem ich vor allem seinen Einteilungsgrund beibehalte und dann die von ihm zuerst in ihrer Allgemeinheit erkannte und gerade auf die Untersuchung der Kurven dritter Ordnung angewandte kollineare Abbildung benütze; aber ich komme dabei zu dem Ergebnis, dass die von Möbius aufgestellten sieben Gattungen der Kurven dritter Ordnung noch eine Ergänzung von sechs weiteren Gattungen zu erfahren haben, dass aber diese neue Einteilung in 13 Gattungen ohne völliges Aufgeben des Einteilungsgrundes nicht weiter abgeändert werden könne.

Immerhin behält die Möbius'sche Siebenteilung insofern noch Bedeutung, als sie schon bei Einzeichnung der drei reellen Wendepunktstangenten augenfällige Unterschiede der Formen liefert, während unsere Gliederung zur Feststellung der Unterschiede weiterer Konstruktionslinien bedarf.

Wenn ich in der vorliegenden Arbeit mich ausschliesslich geometrischer Methoden bedient habe, so liegt das einmal in der Natur der Aufgabe, aber ausserdem lege ich besonderen Wert darauf, die wichtigen Sätze über die Lage der Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung und über den syzygetischen Büschel, die den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bilden, gerade den geometrisch Denkenden näher zu bringen; denn diese werden sich am ersten mit gestaltlichen Verhältnissen und ihrer Darstellung durch Modelle beschäftigen. Demselben Zwecke dienen zwei, so viel mir bekannt, bisher noch nicht veröffentlichte Figuren, die ich der Arbeit beifüge, von denen die eine in v. Staudt'scher Darstellung die neun Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung und zugleich die Lage zweier sechsfach perspektiv liegender Dreiecke, die andere den syzygetischen Büschel wiedergibt.

I. Bisherige Einteilungen der ebenen Kurven dritter Ordnung.

Dass man bei der Einteilung von Kurven in Klassen von sehr verschiedenartigen Gesichtspunkten ausgehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und es ist gewiss lehrreich, einmal an einem vielseitig behandelten Beispiel, wie dies die Kurven dritter Ordnung sind, auf die verschiedenen Möglichkeiten der Einteilung einzugehen. Von vornherein lässt sich sagen, dass bei einer solchen Einteilung entweder ein geometrisches oder ein analytisches Verfahren möglich ist, je nachdem man nämlich entweder von bestimmten geometrischen Eigenschaften der Kurve, vielleicht auch einer bestimmten geometrischen Erzeugung ausgeht, oder aber von ihrer Gleichung. Nachdem Descartes durch seine neuen analytischen Methoden den Ausblick auf ein weites Gebiet von Kurven eröffnet hatte, war das analytische Verfahren für die Kurveneinteilung näher liegend. Und so ist in der That die Einteilung der Kurven in algebraische und transcendente und die der algebraischen Kurven nach ihrer Ordnung der Form ihrer Gleichung entnommen; und die erste Einteilung der Kurven dritter Ordnung in 72 Arten hat Newton [1]) durch Behandlung ihrer Gleichungen gewonnen, und auf demselben Wege gelangt Euler [2]) zu einer vereinfachten Einteilung in 16 Arten. Von den späteren Bearbeitern wird Plücker [3]) ebenfalls durch die Form der Gleichung auf eine weitgehende Einteilung in 216 Kurvenarten geführt. Trotz des analytischen Ausgangspunktes kann seine Einteilung auch den geometrischen zugerechnet werden, da er jeder Form der Gleichung eine geometrische Deutung gibt. Geometrisch gesprochen beruht seine Einteilung auf der gegenseitigen Lage der Kurve und gewisser hauptsächlich durch ihr Verhalten im Unendlichen bestimmten Punkte, Geraden und Kegelschnitte. Es seien hier noch die Einteilungen von Cayley [4]) erwähnt, der in Anlehnung an Newton und Euler zuerst 7 und dann weitergehend 13 Arten aufstellt, und hierauf in einer sehr eingehenden Untersuchung die Plücker'schen Arten zu den Newton'schen in Beziehung setzt.

Allen genannten Entwürfen einer Einteilung ist gemeinsam, dass sie einmal von der Gleichung der Kurve ausgehen und dass sie ferner geometrisch gesprochen, die verschiedenartigen Lagen der unendlich fernen Geraden gegen die Kurve berücksichtigen. Ihnen tritt Möbius [5]) mit zwei wichtigen neuen Gedanken gegenüber; erstens sieht er von der Lage der Kurve gegenüber dem Unendlichfernen völlig ab und lässt nur diejenigen Formen als von einander wesentlich verschieden gelten, von denen die eine nicht in die andere projicirt werden kann; und zweitens

---

1) Newton, „Enumeratio linearum tertii ordinis" (1706). Die Newton'sche Einteilung ist, wie mir Herr Stäckel mitteilt, einer Prüfung unterzogen und ergänzt worden in einer Schrift von J. Stirling: „Lineae tertii ordinis Newtonianae", Oxford 1717.

2) Euler, „Analysis des Unendlichen", 2. Buch, 9. Kap.

3) Plücker, „System der analytischen Geometrie", 1835, 3. Abschnitt.

4) Cayley, „On the classification of cubic curves", Cambr. Phil. Trans. XI, S. 81 (in den Coll. Math. Pap. von Cayley, V. Bd., S. 354 ff.)

5) Möbius, „Über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung" 1852, Ges. Werke, Bd. II, S. 90.

unternimmt er es zum ersten Mal allein auf Grundlage von Lagenbeziehungen, also rein geometrisch, die gestaltlichen Verhältnisse der Kurve dritter Ordnung festzustellen. Indem er von der Kurve nicht mehr voraussetzt, als dass sie mit einer Geraden nur drei Schnittpunkte gemein haben kann, weist er fünferlei Gestalten für die Kurve als möglich nach. Erst zum Beweise des thatsächlichen Auftretens der fünf Gestalten bedarf er einer genaueren durch eine Gleichung gegebenen Definition der Kurve und anderer daraus abgeleiteter Eigenschaften und wird dann auf eine weitere Gliederung einer dieser Formen in drei geführt, so dass er schliesslich sieben Gattungen unterscheidet. Jene fünf Formen decken sich mit den fünf „divergirenden Parabeln", von denen Newton den Satz ausspricht, dass sich eine jede Kurve dritter Ordnung in eine von ihnen projiciren lasse.

Den Möbius'schen Standpunkt hat dann Salmon [1]) in sehr übersichtlicher Weise mit den Beziehungen zum Unendlichfernen verknüpft, indem er von der Newton-Möbius'schen Fünfteilung als Haupteinteilung ausgeht, und jede dieser fünf Gattungen nach ihrem Verhalten im Unendlichen in Species gliedert. So kommt man im ganzen zu 30 Species, denen sich mit Rücksicht auf unendlich ferne Wendepunkte noch 26 Varietäten zugesellen.

Unter den genannten Zahlen kehrt nur die fünf öfter wieder, während ausser ihr die Zahlen 7 (in zwei völlig verschiedenen Bedeutungen), 13, 16, 30, 56, 72, 216 vorkommen, und wir werden im folgenden eine neue 13-Teilung den vorhandenen Einteilungen hinzufügen. Schon die grosse Verschiedenheit dieser Zahlen zeigt, dass bei ihrer Aufstellung eine gewisse Willkürlichkeit, oder wenigstens eine grosse Mannigfaltigkeit von Gesichtspunkten herrsche, nach denen die Einteilung vorgenommen werden kann.

II. Möbius' Plan der Kurveneinteilung und ein geordnetes System aller möglichen Einteilungen.

Will man die bisher gegebenen Einteilungen in eine gewisse Ordnung bringen, so dürfte es sich empfehlen, wie Salmon dies unternommen, von der Möbius'schen Fünf- oder Siebenteilung auszugehen und für jeden dieser Fälle das Verhalten gegenüber dem Unendlichfernen zu untersuchen. Die bisher unternommenen Einteilungen weisen darauf hin, dass man hierin mehr oder weniger weit gehen kann; es käme aber darauf an, die bisherigen, und womöglich auch alle denkbaren weiteren Einteilungen so in

[1]) Salmon, „A treatise on the higher plane curves", 2. Auflage, 1873, Nr. 206 ff., deutsch von Fiedler, „Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven". 2. Auflage, 1882. Bei Salmon ist in der 3. Species der 5. Gattung eine Varietät zu streichen, und in der deutschen Ausgabe ausserdem in der 2. Species der 1. Gattung (und entsprechend in der 2. und 3. Gattung) eine Varietät (3 unendlich ferne Wendepunkte) hinzuzufügen.

ein System zu bringen, dass einer jeden Einteilung eine bestimmte Stelle in dem System eingeräumt würde. Ich möchte mich hier darauf beschränken, an einem Beispiel zu zeigen, wie es schon beim vor-Möbius'schen Standpunkt, von dem aus die Kurven nach ihrem Verhalten im Unendlichfernen beurteilt werden, möglich ist, eine derartige Anordnung aller Einteilungen unter Umständen bis ins Unendliche fortzusetzen. Ein wesentlicher Einteilungsgrund ist bei Plücker die Lage der Begleiterin der unendlich fernen Geraden. Zieht man nämlich in drei beliebigen in einer Geraden gelegenen Kurvenpunkten die Tangenten, so liegen deren weitere drei Schnittpunkte mit der Kurve abermals in einer Geraden, die die Begleiterin der ersten heisst. Um eine weitergehende Einteilung zu bekommen, könnte man zur Begleiterin der unendlich fernen Geraden abermals die Begleiterin suchen und auch deren Lage berücksichtigen u. s. f. Wenn nicht die unendlich ferne Gerade ganz besondere Lagen hat (die sich sprungweise über die Kurve verteilen), so wird man diese Einteilung sogar bis ins Unendliche fortsetzen können. Dabei wäre die Forderung erfüllt, die Möbius bei seiner Siebenteilung aufgestellt hat (a. a. O. § 48, 2. Absatz), dass es sich, ohne erst eine Messung vorzunehmen, erkennen lässt, welcher Art eine Kurve zuzurechnen sei.

Ob nun die Möbius'sche Fünf- oder Siebenteilung (oder die aus der Möbius'schen gewonnene 13-Teilung), die über jener das Unendlichferne berücksichtigenden Einteilung steht, vollkommen abgeschlossen oder auch einer Fortsetzung fähig ist, lässt sich nur beurteilen, wenn man auf die Möbius'schen Grundgedanken und auf die wichtigsten Eigenschaften der Kurven dritter Ordnung näher eingeht.

Möbius geht in der genannten Abhandlung von der Unterscheidung der Kurven zweiter Ordnung in Ellipse, Hyperbel und Parabel aus, um dann durch Verallgemeinerung Merkmale zu gewinnen, die auch zur Unterscheidung der Kurven dritter Ordnung brauchbar sind. Zwei gleichartige dieser Kurven, also z. B. zwei Ellipsen, lassen sich stets durch affine Abbildung in einander überführen, während zweierlei Kurven, wie Ellipse und Hyperbel, keine solche affine Abbildung ineinander gestatten. Dagegen lässt sich durch kollineare Abbildung eine Kurve zweiter Ordnung in jede beliebige andere überführen, oder was auf dasselbe hinaus kommt, zwei beliebige von den Kurven lassen sich stets auf einen Kegel zweiter Ordnung legen, so dass die eine die Projektion der anderen aus dem Scheitel des Kegels wird.

Untersucht man das Verhalten der Kurven dritter Ordnung gegenüber den Kollineationen, so findet man, dass nicht jede zwei solche Kurven einem einzigen Kegel als ebene Schnitte angehören, und es liegt deshalb nahe, alle diejenigen Kurven, bei denen dies möglich ist, in eine besondere Gattung zusammenzuschliessen, während die Kurven zweiter Ordnung hier-nach nur eine einzige Gattung bilden; jede Gattung will Möbius dann wieder so in Arten geteilt wissen, dass eine Art nur Kurven umfasst, die einander affin sind (vgl. § 2 der erwähnten Abhandlung, am Schluss des ersten Absatzes), ohne aber selbst näher darauf einzugehen.

Man sieht, dass die Einteilung der Kurven in Gattungen mit der Bestimmung der verschieden gestalteten Kegel dritter Ordnung übereinkommt, und der Bestimmung dieser Kegel (oder ihrer Schnittkurven mit einer koncentrischen Kugel) ist der Hauptteil der genannten Möbius'schen Arbeit gewidmet. Wir werden statt der Kegel die ebene Kurve selbst betrachten, indem wir zu jeder Kurve alle ihre kollinearen Bilder als gleichberechtigt hinzudenken.

Es sei aber gleich hier erwähnt, dass sowohl der Grundsatz der kollinearen Abbildbarkeit gleichartiger Kurven, wie auch der Grundsatz der Affinität für die Unterteilungen, auf eine Einteilung in unendlich viele Fälle führt, und dass Möbius deshalb auf die strenge Durchführung des ersten Grundsatzes verzichtet, während ihm die Unmöglichkeit der Durchführung des zweiten Grundsatzes entgangen zu sein scheint.

III. Geschlecht, Klasse und Singularitäten der ebenen Kurven dritter Ordnung.

Durch den Möbius'schen Plan werden wir mit Notwendigkeit auf die Frage geführt, unter welchen Umständen eine Kurve dritter Ordnung kollinear in sich selbst oder in eine andere solche Kurve abgebildet werden könne. Damit hängen innig zusammen einige Begriffe, die sich auf gewisse invariante Anzahlen beziehen, d. h. auf Anzahlen, die so mit den Kurven verknüpft sind, dass sie durch Projektion nicht verloren gehen; sind in zwei Kurven diese Anzahlen verschieden, so können beide sicher nicht in einander projicirt werden, und dürfen deshalb nach Möbius' Forderung nicht derselben Gattung zugerechnet werden. Dahin gehört das Geschlecht der Kurven, das zu der Anzahl von Punkten in Beziehung steht, die bei stetiger Erzeugung der Kurven durch die Konstruktion gleichzeitig erhalten werden; ferner die Klasse, die die Anzahl der von einem beliebigen Punkte gezogenen Kurventangenten angibt, und endlich die Zahl der vorhandenen Singularitäten. Nur insofern kann eine gewisse Unsicherheit bei Berücksichtigung dieser Zahlen herrschen, als sie sich stets auf die Gesamtheit der reellen und imaginären Elemente beziehen, so dass z. B. zwei solche Kurven, die von verschiedener Klasse sind, gleichwohl dieselbe Anzahl reeller Tangenten aufweisen können. Es dürfte sich empfehlen die Gesamtheit der reellen und imaginären Elemente als einen höheren Einteilungsgrund anzusehen, also z. B. Kurven mit neun Wendepunkten, von denen stets drei reell sind, und Kurven mit drei Wendepunkten, die in einem Fall alle drei reell sind, nicht als gleichartig zu behandeln.

Das Geschlecht der Kurven dritter Ordnung kann entweder null oder eins sein. Vom Geschlecht null sind diejenigen Kurven, die einen Doppelpunkt haben; sie lassen sich punktweise stetig konstruiren und durch Geraden, die durch den Doppelpunkt gezogen sind und die Kurve deshalb in je einem weiteren Punkte treffen, projektiv auf eine Gerade beziehen. Ihnen gegenüber stehen die Kurven ohne Doppelpunkt vom Geschlecht eins. Ihre Punkte lassen sich bei stetiger Erzeugung der Kurve nur paarweise konstruiren, d. h. eine stetige lineare Erzeugung dieser Kurven ist ausgeschlossen.

Der Klasse nach sind bei den Kurven vom Geschlecht null zwei Fälle zu unterscheiden. Fallen die zwei Tangenten des Doppelpunktes zusammen, so dass er zur Spitze wird, so ist die Klasse drei, im andern Falle vier. Die Kurve vom Geschlecht eins hat die Klasse sechs.

An singulären Punkten sind ausser dem schon erwähnten Doppelpunkt nur noch Wendepunkte vorhanden und zwar bei den Kurven dritter Klasse ein einziger stets reeller. Bei den Kurven vierter Klasse sind drei Wendepunkte vorhanden, die Kurve weist aber nach der Reellität der beiden Tangenten im Doppelpunkte und der drei Wendepunkte zwei Fälle auf: Entweder sind die beiden Doppelpunktstangenten reell, d. h. die Kurve besitzt einen Selbstschnitt; dann sind zwei von den drei Wendepunkten imaginär. Oder die beiden Doppelpunktstangenten sind imaginär, der Doppelpunkt also isolirt, dann sind alle drei Wendepunkte reell.

Die Kurven von der Klasse sechs haben neun Wendepunkte, von denen stets drei reell, die übrigen paarweise konjugirt imaginär sind.

IV. Kollineationen, die eine Kurve dritter Ordnung vom Geschlecht null in sich oder in eine andere Kurve abbilden.

Zieht man durch einen Wendepunkt der Kurve sämtliche Strahlen und sucht auf jedem den harmonischen Punkt des Wendepunktes zu den beiden weiteren Schnittpunkten mit der Kurve, so liegen diese alle in einer Geraden, der harmonischen Polare des Wendepunktes.

Daher ist durch jeden Wendepunkt als Centrum und seine harmonische Polare als Axe eine harmonische perspektive Kollineation (kollineare Spiegelung) gegeben, die die Kurve in sich selbst abbildet. Hat die Kurve einen Doppelpunkt, so geht die harmonische Polare des Wendepunktes durch ihn und durch den Berührungspunkt der einzigen aus ihm an die Kurve noch möglichen Tangente hindurch, so dass sich durch die perspektive Kollineation der Doppelpunkt in sich selbst abbildet und seine beiden Tangenten sich unter einander vertauschen. Aber auch jeder Wendepunkt muss wieder einen solchen zum Bilde haben; daher wird jede Gerade, die aus einem als Centrum gegebenen Wendepunkt nach einem zweiten Wendepunkt gezogen ist, noch einen dritten Wendepunkt enthalten.

Diese Gerade heisst dann eine Wendepunktsgerade, und es liegen insbesondere die drei reellen Wendepunkte der Kurve auf einer solchen.

Führt man zwei oder mehr von diesen perspektiven Kollineationen hintereinander aus, so erhält man immer eine Kollineation der Ebene, die die Kurve in sich, den Doppelpunkt in sich und jeden Wendepunkt in einen Wendepunkt abbildet.

Im allgemeinen sind dadurch alle Möglichkeiten, eine Kurve dritter Ordnung kollinear in sich abzubilden, erschöpft. Eine Ausnahme hiervon bilden die Kurven dritter Klasse, die durch unendlich viele, und gewisse ausgezeichnete Kurven sechster Klasse, die durch eine endliche Zahl weiterer Kollineationen in sich abgebildet werden.

Wir betrachten für jede Kurvenart diese Kollineationen, beschränken uns aber in diesem Abschnitte auf die Kurven vom Geschlecht null, während die vom Geschlecht eins in den drei folgenden Abschnitten erledigt werden.

Soll eine Kurve dritter Ordnung dritter Klasse kollinear in sich abgebildet werden, so müssen dabei der einzig vorhandene Wendepunkt und seine Tangente, sowie die Spitze und ihre Tangente ihre Bilder in sich selbst haben. Wendepunkt und Spitze mit ihrer Verbindungsgeraden, sowie die Tangenten beider mit ihrem Schnittpunkt bilden die sechs Stücke (Ecken und Seiten) des Doppelpunkts-Dreiecks einer jeden Kollineation, die die Kurve in sich abbildet. Durch die singulären Elemente ist daher in diesem Fall die Kollineation noch nicht bestimmt, und man kann zu ihrer völligen Bestimmung etwa einem Punkte der Kurve einen beliebigen zweiten als Bild zuordnen. Man findet dann, dass sich in der so bestimmten Kollineation die ganze Kurve in sich selbst abbildet; daraus folgt:

a) Die Kurve dritter Ordnung dritter Klasse besitzt ∞^1 Kollineationen, die die Kurve in sich abbilden.

In der gleichen Weise ergibt sich, dass wenn man eine Kurve dritter Ordnung dritter Klasse in eine andere solche Kurve kollinear abbilden soll, man den Wendepunkt und die Spitze mit ihren Tangenten in die gleichartigen Elemente der Bildkurven abzubilden hat und ausserdem irgend einem weiteren Punkte der Kurve einen ganz beliebigen weiteren Punkt der anderen als Bild zuordnen kann. Also:

b) Jede solche Kurve lässt sich auf jede andere durch ∞^1 Kollineationen abbilden.

Für die Kurven dritter Ordnung vierter Klasse lassen sich dieselben Fragen am einfachsten beantworten, wenn man sich die Punkte der Kurve erzeugt denkt als Schnitt der entsprechenden Geraden eines Strahlenbüschels und eines projektiv darauf bezogenen Tangentenbüschels einer Kurve zweiter Klasse. Jede rationale Kurve dritter Ordnung lässt sich auf unendlich viele Arten so erzeugen; ist sie aber von der vierten Klasse, so ist darunter eine Erzeugung — und zwar eine einzige — bei der die singulären Elemente der Kurve eine besonders einfache Lage haben. Es giebt nämlich drei Tangenten jener Kurven zweiter Klasse, die in ihrem Berührungspunkt den entsprechenden Strahl des Strahlenbüschels schneiden. Durch diese Punkte geht also die Kurve dritter Ordnung und wie man leicht sieht, berührt sie in ihnen die Kurve zweiter Klasse. Der Mittelpunkt des Strahlenbüschels ist, wie ebenso leicht ersichtlich, der Doppelpunkt der Kurve. Ist nun von dem Dreiseit jener drei Tangenten und dem dazu perspektiv liegenden Dreieck ihrer Berührungspunkte der Doppelpunkt das Perspektivitätscentrum, so findet die erwähnte Sonderlage statt. Sie kann in folgender Weise hergestellt werden:

Man nehme die Kurve zweiter Klasse an; wir nennen sie wegen gewisser Beziehungen, die sie zur Kurve dritter Ordnung hat, ihre Cayley'sche Kurve. Auf ihr wähle man drei Punkte als Berührungspunkte beider Kurven. Vom Dreieck dieser Punkte und dem dazu perspektiven Dreiseit ihrer Tangenten suche man die Axe und das Centrum der Perspektivität, so hat man in ihnen Wendepunktsgerade und Doppelpunkt. Dabei sind die Schnittpunkte entsprechender Seiten (d. h. je einer Seite des Tangentendreiseits mit der ihrem Berührungspunkt gegenüberliegenden Seite des Dreiecks) die drei Wendepunkte; und die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken sind die zu den Wendepunkten als Centren gehörigen Axen der früher erwähnten harmonischen perspektiven Kollineationen. Und endlich sind die Tangenten aus dem Doppelpunkt an den Cayley'schen Kegelschnitt die Doppelpunktstangenten der Kurve dritter Ordnung.

Da hierbei Centrum und Axe Pol und Polare zum Kegelschnitt, dieser aber und die Axe erste und zweite Polare des Centrums zum Dreieck (und ebenso der Kegelschnitt und das Centrum die dazu dualen Gebilde der Axe zum Dreiseit) sind, so kann man auch das Dreieck oder das Dreiseit beliebig annehmen und dazu noch entweder die Wendepunktsgerade oder auch den Doppelpunkt; die fehlenden Stücke lassen sich daraus hinzu konstruiren, insbesondere der Kegelschnitt, auf ihm die projektive Beziehung zum Strahlenbüschel des Doppelpunktes und somit auch die Kurve dritter Ordnung.

Das Dreieck der Berührungspunkte von Kegelschnitt und Kurve dritter Ordnung, und ebenso das Dreiseit der Tangenten in diesen Punkten haben hierbei eine ganz besondere Lage zu dem aus der Wendepunktsgeraden und den beiden Doppelpunktstangenten bestehenden Dreiseit. Sie liegen nämlich sechsfach perspektiv.

Soll nun eine Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt durch eine Kollineation in sich selbst abgebildet werden, so muss, wie erwähnt, jeder Wendepunkt in einen Wendepunkt, der Doppelpunkt in sich und jede Doppelpunktstangente in eine Doppelpunktstangente abgebildet werden. Dies ist nur durch eine solche Kollineation möglich, die auch den Kegelschnitt in sich überführt.

Es geschieht dies

1) durch Festhalten eines Wendepunktes, Vertauschen der beiden anderen Wendepunkte, womit sich auch die beiden Doppelpunktstangenten vertauschen. Auf diese Weise erhält man gerade die drei kollinearen Spiegelungen, die einen Wendepunkt zum Centrum und seine lineare Polare zur Axe haben.

2) durch cyklisches Vertauschen der drei Wendepunkte, wobei die beiden Doppelpunktstangenten festbleiben. Hierbei erhält man zwei Kollineationen, die sich als Folgen von je zweien der vorigen darstellen lassen. Da man durch Zusammensetzung irgend zweier dieser fünf Kollineationen nichts neues erhält, so hat man nur noch die Identität ihnen zuzufügen, um eine Gruppe von Kollineationen zu erhalten, d. h.:

c) Jede Kurve dritter Ordnung vierter Klasse geht durch eine Gruppe von sechs Kollineationen in sich über.

Ebenso wird man jede beliebige dieser Kurven in jede andere kollinear abbilden können, indem man den Cayley'schen Kegelschnitt der einen Kurve auf den der andern so bezieht, dass die drei Berührungspunkte des ersten Kegelschnitts mit seiner Kurve dritter Ordnung sich in die entsprechenden Berührungspunkte der Bildkurven abbilden, oder was dasselbe ist, dass das Dreieck der Berührungspunkte (oder das Tangentendreiseit) und die Wendepunktsgerade (oder der Doppelpunkt) der ersten Kurve in die gleichen Elemente der Bildkurve abgebildet werden.

d) Es ist stets auf sechs verschiedene Arten möglich, eine Kurve dritter Ordnung vierter Klasse auf eine andere solche Kurve kollinear abzubilden.

Berücksichtigt man aber dabei die Reellität der Gebilde und will man sich nur auf reelle Kollineationen beschränken, so muss man zweierlei Fälle unterscheiden. Entweder liegt der Doppelpunkt im Inneren des Cayley'schen Kegelschnitts, dann sind die drei Wendepunkte (also auch das Dreieck auf dem Kegelschnitt) reell, die Doppelpunktstangenten aber imaginär, der Doppelpunkt ist also isolirt. Oder der Doppelpunkt liegt ausserhalb, dann ist nur ein Wendepunkt (und nur eine Ecke jenes Dreiecks) und die beiden Doppelpunktstangenten reell; die Kurve besitzt also einen Selbstschnitt. Im ersten Fall gibt es im Reellen alle sechs Kollineationen, die die Kurve in sich abbilden, im zweiten Fall ausser der Identität nur eine reelle Kollineation, nämlich die Perspektivität, die den reellen Wendepunkt zum Centrum hat. Nun ist klar, dass zwei Kurven dritter Ordnung nur dann durch reelle Kollineationen in einander abgebildet werden können, wenn sie demselben Reellitätsfall angehören, wir erhalten also den Satz:

e) Eine Kurve dritter Ordnung mit isolirtem Doppelpunkt lässt sich durch sechs reelle Kollineationen, eine mit Selbstschnitt durch zwei reelle Kollineationen in sich selbst oder in jede andre solche Kurve abbilden.

V. Kollineationen, die eine Kurve dritter Ordnung vom Geschlecht eins in sich oder in eine andere Kurve abbilden.

Dass es Kollineationen gibt, die eine Kurve dritter Ordnung vom Geschlecht eins in sich abbilden, haben wir an dem Beispiel der perspektiven Kollineationen gesehen, die einen Wendepunkt zum Centrum und seine harmonische Polare zur Axe haben. Wie diese, muss auch jede andere solche Kollineation das System der neun Wendepunkte in sich abbilden. Aber nicht umgekehrt wird jede Kollineation, die das letzte bewirkt, auch die Kurve in sich abbilden. Durch die neun Wendepunkte geht nämlich nach einem bekannten Satze ein ganzer Büschel, der „syzygetische Büschel", von Kurven dritter Ordnung, deren jede dieselben Wendepunkte hat; und die Kollineationen können auch die eine Kurve in eine andere des Büschels abbilden. Werden in diesem Falle die Kurven des Büschels durch eine Kollineation einander zugeordnet, so können dabei wieder gewisse ausgezeichnete Kurven sich selbst zugeordnet sein. Alles dies führt zur Frage nach allen Kollineationen, die die neun Wendepunkte und damit auch den syzygetischen Büschel in sich abbilden.

Diese Kollineationen bilden eine Gruppe, die zuerst von C. Jordan[1]) aufgestellt worden ist und später wiederholt analytisch untersucht wurde. Sie lässt sich aber, wie ich zeigen werde, rein geometrisch gewinnen, und zwar ist zu ihrer Ableitung nur nötig die Kenntnis der perspektiven Kollineation aus einem Wendepunkt, die schon Newton besass, und die durch Plücker erwiesene Thatsache, dass unsere Kurve neun Wendepunkte besitzt. Die Methode, deren ich mich bediene, ist die für geometrische Behandlung wohl nächstliegende, nämlich erstens jede Kollineation aus möglichst einfachen Kollineationen zusammenzusetzen, und zweitens zur Bestimmung einer Kollineation vier Paare entsprechender Punkte oder Geraden auszuwählen; dies geht sehr leicht, da die ganze Figur thatsächlich durch vier Geraden bestimmt ist.

---

1) Wegen der Litteratur über diese Gruppe vergleiche man „Encykl. d. math. W." I. B 3 f 5. Die dortigen Angaben sind zu ergänzen durch die Inaug.-Diss. von P. Muth (Giessen 1890), in der die sechs verschiedenen Arten der in der Gruppe enthaltenen Kollineationen und die in ihnen festbleibenden Kurven behandelt sind. Die Betrachtungen stützen sich auf die Parameterdarstellung der Kurve dritter Ordnung, also auf elliptische Funktionen. Man vergleiche auch die folgende Fussnote.

Die gegenseitige Lage der neun Wendepunkte lässt sich unmittelbar aus der erwähnten perspektiven Kollineation herleiten.[1]) Zuerst folgt aus ihr der oben schon benutzte Satz, dass die Verbindungsgerade zweier Wendepunkte noch einen dritten Wendepunkt enthält. Daraus ergeben sich 12 „Wendepunktsgeraden“, von denen durch einen Wendepunkt immer vier gehen; und wählt man von diesen Geraden eine heraus, so gehen durch ihre drei Wendepunkte noch neun weitere Geraden, es bleiben also nur zwei übrig, die sich mit der ausgewählten in keinem Wendepunkt treffen, und wie aus der perspektiven Kollineation folgt, ebenso wenig unter einander einen Wendepunkt gemein haben. Diese drei Geraden bilden dann ein „Wendepunktsdreiseit“, und die 12 Geraden ordnen sich in vier solche Dreiseite an, von denen jedes alle neun Wendepunkte in sich enthält, von denen also je zwei sich in den neun Wendepunkten durchschneiden. In der That gehören diese Dreiseite, als zerfallende Kurven dritter Ordnung gerechnet, zum syzygetischen Büschel.

Durch eine perspektive Kollineation, die einen Wendepunkt zum Centrum und seine harmonische Polare zur Axe hat, wird von jedem Wendepunktsdreiseit eine Seite in sich abgebildet, nämlich die durch das Centrum gehende. Eine zweite Seite eines solchen Dreiseits trifft die Axe in einem Punkt, der nicht Wendepunkt ist, daher entspricht ihr in der perspektiven Kollineation die dritte Seite des Dreiseits, d. h. die perspektive Kollineation bildet jedes Wendepunktsdreiseit in sich ab, und zwar so, dass eine Seite durch das Centrum geht und ihre Gegenecke in der Axe liegt. So muss auf jeder harmonischen Polare eines Wendepunktes von allen vier Dreiseiten je eine Ecke liegen, während die Gegenseiten durch den Wendepunkt gehen. Dann werden durch eine beliebig herausgegriffene Ecke eines Dreiseits drei harmonische Polaren gehen, nämlich diejenigen, deren drei zugehörigen Wendepunkte auf der Gegenseite liegen. Daraus folgt, dass die drei übrigen Dreiseite von der herausgegriffenen Ecke aus gesehen perspektiv liegen, während die Gegenseite die Axe für die perspektiven Abbildungen von irgend zweien der drei übrigen Dreiseite ist. Da dies für jede Ecke gilt, so kommt man zu dem folgenden

---

[1]) Über die Lage der neun Wendepunkte und ihre Verteilung auf vier Dreiseite vergleiche man Plücker, System der anal. Geometrie (1835), S. 284 und Hesse's Arbeiten im Journal für reine und ang. Math. 28. Bd. (1844), S. 97 und 38. Bd. (1849), S. 257. Im 28. Bd. S. 95 u. 96 gibt Hesse dreierlei Substitutionen an, die das syzygetische Büschel in sich überführen. Die erste dieser stimmt mit den später abgeleiteten Kollineationen 6. Art, die beiden letzten mit den Kollineationen 3. Art überein.

Die Lage zweier sechsfach perspektiven Dreiecke hat zuerst Rosanes (Math. Ann., 2. Bd., S. 549) analytisch bestimmt, und dann hat Schröter (Math. Ann., 2. Bd., S. 553) sie geometrisch abgeleitet und die Figur durch eines der Dreiecke und eine weitere Gerade bestimmt. Der Satz, dass zwei solche Dreiecke stets als Wendepunktsdreiseite eines syzygetischen Büschels aufgefasst werden können, stammt von Gundelfinger (Math. Ann., VII, S. 252).

Satze, der die gegenseitige Lage der Wendepunktsgeraden übersichtlich angibt:[1])

a) Je zwei Wendepunktsdreiseite liegen auf sechs Arten perspektiv und zwar ist jede Ecke eines der beiden anderen Wendepunktsdreiseite das Centrum, ihre Gegenseite die Axe der Perspektivität. Die harmonischen Polaren der Wendepunkte sind die Perspektivitätsstrahlen entsprechender Ecken, die Wendepunkte Schnitte entsprechender Seiten.

Die Konstruktion der Figur der neun Wendepunkte ist nun nach den früheren Angaben über sechsfach perspektiv liegende Dreiseite (S. 8) leicht auszuführen. Man nehme irgend eines der vier Dreiseite als gegeben an, und von einem zweiten eine Seite. Die Gegenecke des zweiten Dreiseits ist der Pol der Seite zum ersten Dreiseit. Die beiden fehlenden Seiten sind dann durch die früher erwähnte Involution bestimmt. Aus diesen beiden Dreiseiten sind von den zwei übrigen die Ecken als Centren und die Gegenseiten als Axen der sechs perspektiven Kollineationen bestimmt, die das erste Dreiseit in das zweite abbilden.

Aus dieser Konstruktion folgt:

b) Durch ein Dreiseit und eine Seite eines zweiten ist die Figur der neun Wendepunkte eindeutig bestimmt.

c) Jede derartige Figur kann auf jede andere kollinear abgebildet werden, indem man ein Dreiseit und eine weitere Seite der einen Figur in ein Dreiseit und eine weitere Seite der anderen Figur abbildet.

In der That hat auch die Gegenecke der weiteren Seite ihr bestimmtes Bild in der zweiten Figur und ebenso jede der beiden fehlenden Seiten; denn auch dann, wenn diese Seiten imaginär sind, sind sie nach v. Staudt[2]) durch Festlegung des Sinnes der sie bestimmenden Involution eindeutig ihren Bildern zugeordnet. Da sich nach der Definition des Wendepunktsdreiseits ein solches nur wieder in eines kollinear abbilden kann, erhält man auf diese Weise auch alle gesuchten Kollineationen.

d) Jede derartige Figur lässt sich auch in sich selbst abbilden, und zwar so oft, als eines der vier Dreiseite einem der

[1]) Die Sätze über die Lage der sechsfach perspektiven Dreiecke, sowie der neun Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung lassen sich trotz der vorkommenden imaginären Elemente sehr leicht durch eine Figur wiedergeben, falls man die v. Staudt'sche Darstellung des Imaginären wählt. Diese Figur wird am Schluss dieser Abhandlung (Figur 1, S. 30) ihre Stelle finden. Es sind auf ihr die neun Wendepunkte und ihre neun harmonische Polaren, sowie die 12 Ecken und die 12 Seiten der vier Wendepunktsdreiseite eingetragen. Eine ausführliche Erklärung der Figur folgt im IX. Abschnitt.

[2]) Man vergleiche Fig. 1, S. 30.

vier Dreiseite, und eine weitere Seite einer weiteren Seite zugeordnet werden kann.

Ein beliebig herausgegriffenes Dreiseit lässt sich nun auf sechs verschiedene Arten einem Dreiseit zuordnen, und da es vier Dreiseite sind, so giebt es 4 . 6 derartige Zuordnungen. Ausserdem lässt sich eine beliebige weitere Seite irgend einer Seite der noch freien Dreiseite zuordnen, dies liefert für jeden der vorigen Fälle neun Möglichkeiten, also im ganzen 4 . 6 . 9 = 216 Möglichkeiten, d. h.:

e) Es gibt 216 Kollineationen, die die Figur der neun Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung in sich abbilden, und ebenso viele, die sie in eine andre solche Figur abbilden.

Diese Sätze sind für den Gang unserer Untersuchung von Bedeutung. Der Satz b) zeigt, dass jeder syzygetische Büschel mit jedem anderen projektiv ist, dass also in einem einzigen solchen Büschel alle denkbaren verschiedenen Formen von Kurven dritter Ordnung enthalten sind. Um aber ausgezeichnete Kurven zu erhalten, hat man noch diejenigen der 216 Kollineationen zu untersuchen, die nicht alle Kurven des Büschels, sondern nur einzelne von ihnen in sich überführen, und diese Kurven sind dann dadurch ausgezeichnet, dass sie eine vermehrte Anzahl von Kollineationen besitzen, durch die sie in sich abgebildet werden.

Um diese Kurven zu bestimmen, beachte man, dass jede Kurve des Büschels durch eine Tangente in einem Grundpunkt des Büschels, d. h. in einem Wendepunkt, bestimmt ist, und dass die Tangenten, die in verschiedenen Grundpunkten an dieselben Kurven des Büschels gelegt werden, projektive Strahlenbüschel bilden. Wird nun durch eine Kollineation ein Wendepunkt in einen anderen (oder auch in sich selbst) abgebildet, so entsteht hieraus eine zweite projektive Beziehung des einen Strahlenbüschels auf den anderen, und somit wird in dem zweiten Wendepunkt eine projektive Beziehung zwischen der Tangente an eine Kurve und der Tangente an diejenige Kurve entstehen, in die die erste vermöge der Kollineation übergeht. Die zwei Doppelstrahlen dieser projektiven Beziehungen liefern die Kurven, die durch die Kollineation in sich abgebildet werden; entsprechen aber drei von den Strahlen des Strahlenbüschels sich selbst, so bildet sich durch die Kollineation jede Kurve des Büschels in sich selbst ab.

VI. Fortsetzung: Die sechs Arten von Kollineationen und die in ihnen festbleibenden Kurven.

Die erste Art von Kollineationen, die die neun Wendepunkte in sich überführen, bildeten die perspektiven, die einen Wendepunkt zum Centrum und seine harmonische Polare zur Axe hatten (S. 7). Sie sind dadurch definirt, dass sie jedes der vier Dreiseite so in sich überführen, dass sich in jedem die eine Seite, die durch jenen Wendepunkt geht, in sich selbst abbildet, die beiden anderen Seiten aber vertauschen.

Zur Festlegung einer solchen Kollineation kann man ein Dreiseit in dieser Weise sich selbst zuordnen, was auf drei Weisen möglich ist, und in einem zweiten Dreiseite eine Seite in jede der drei Seiten desselben Dreiecks überführen, was für jeden der vorigen Fälle noch drei Möglichkeiten ergibt. Man erhält so $3 \cdot 3 = 9$ Kollineationen, wie es ja dem Vorhandensein von neun Wendepunkten entspricht.

Eine zweite Art solcher Kollineationen erhält man, wenn man die Folge zweier der ersten Art bildet.

Dabei bleibt die Verbindungsgerade der beiden Centren dieser Perspektivitäten fest, während die beiden anderen demselben Dreiseit angehörigen Wendepunktsgeraden sich bei der ersten Abbildung vertauschen, bei der zweiten ebenfalls, also bei der Folge beider fest bleiben. Auch jedes andere Dreiseit geht durch jede einzelne Abbildung, also auch durch ihre Folge in sich über; ginge dabei auch nur eine Seite in sich über, so blieben vier Geraden an der Stelle, so dass man die Identität hätte, daher werden in jedem der drei übrigen Dreiseite die drei Seiten cyklisch vertauscht. Eine solche Kollineation ist daher cyklisch von der Periode drei, und eine Seite wird durch die Kollineation in eine andere, durch ihre Umkehrung aber in die dritte Seite des Dreiseits abgebildet.

Zur Festlegung einer Kollineation der zweiten Art kann man daher (auf vier Arten) ein Dreiseit seitenweise in sich selbst abbilden und eine weitere Wendepunktsgerade in eine der beiden anderen Seiten desselben Dreiseits. Es giebt daher $4 \cdot 2 = 8$ solcher Kollineationen. Aus dem Gesagten ist auch leicht zu entnehmen, in welcher Weise man eine solche Kollineation in zwei der ersten Art zerlegen kann.

Will man alle Kollineationen bestimmen, die zwei von den vier Dreiseiten in sich abbilden, so kann man die Seiten des ersten auf sechs Arten in einander überführen, und eine Seite des zweiten auf drei Arten in eine Seite des zweiten. Es giebt also im ganzen nur $6 \cdot 3 = 18$ Kollineationen, die jedes von zwei Dreiseiten in sich abbilden. Da bei dieser Bestimmung auch die Identität mitgezählt ist, so finden wir, dass die Kollineationen erster (9) und zweiter Art (8), zusammen mit der Identität, alle derartigen Kollineationen bilden. Man hat also den Satz:

a) Werden durch eine Kollineation von den vier Dreiseiten zwei in sich selbst abgebildet, so wird jedes in sich selbst abgebildet.

b) Die Kollineationen der ersten und der zweiten Art bilden zusammen mit der Identität eine Gruppe von 18 Kollineationen, die jedes Dreiseit in sich überführen.

Dass es eine Gruppe ist, folgt ohne weiteres daraus, dass wenn zwei Kollineationen die vier Dreiseite in sich abbilden, ihre Folge dasselbe thut.

c) Durch die Kollineationen der Gruppe wird jede Kurve des Büschels in sich abgebildet.

Denn es entsprechen vier Kurven des Büschels, nämlich die in ein Dreiseit zerfallenden, sich selbst, und schon das Selbstentsprechen dreier Kurven hat (vgl. S. 14 unten) das der übrigen zur Folge.

In gleicher Weise schliesst man:

d) Eine Kollineation, die jede Kurve des Büschels in sich abbildet, gehört zu der Gruppe.

Eine dritte Art der gesuchten Kollineationen kennen wir in den perspektiven Kollineationen, die je eine Ecke eines Wendepunktsdreiseits zum Centrum, die Gegenseite zur Axe haben, und ein zweites Dreiseit in ein drittes abbilden. (Vgl. S. 14 oben). Da nämlich das erste Dreiseit in sich übergeht (u. zw. jede seiner Seiten in sich, die eine Seite als Axe, die beiden anderen als Perspektivitätsstrahlen) so gehen die neun Schnittpunkte des ersten und zweiten Dreiseits in die des ersten und dritten über, d. h. das System der neun Wendepunkte geht in sich über. Da diese Kollineation dann jedes Dreiseit in ein solches überführen muss, kann (nach S. 15a) das vierte nicht fest bleiben, es müssen sich daher die drei letzten Dreiseite cyklisch vertauschen. Dabei vertauschen sich je drei solche Seiten der drei Dreiseite, die in einem Punkte der Kollineationsaxe (also in einem Wendepunkte) zusammentreffen, so dass die Kollineation cyklisch von der Periode drei ist. Da jede Ecke eines Wendepunktsdreiseits als Centrum einer solchen Kollineation ausgewählt werden kann, und da es zwei cyklische Vertauschungen der drei übrigen Dreiseite gibt, so sind im ganzen 12 . 2 = 24 Kollineationen dritter Art vorhanden. Sie sind dadurch bezeichnet, dass in ihnen ein einziges Dreiseit festbleibt, und zwar mit allen drei Seiten. Denn zur Festlegung einer solchen Kollineation kann man ein Dreiseit als seitenweise festbleibendes auswählen (auf vier Weisen) und dann ausserdem eine weitere Seite in eine Seite der beiden übrigen Dreiseite übergehen lassen, (was auf sechsfache Weise geschehen kann). Man bekommt so 4 . 6 = 24 Kollineationen, d. h. genau die oben definirten perspektiven Kollineationen. Jedes Dreiseit geht durch sechs dieser Kollineationen in sich über.

Um zu erfahren, welche Kurven des Büschels durch eine solche Kollineation in sich abgebildet werden, betrachten wir einen Wendepunkt, der auf der Kollineationsaxe liegt, dessen Strahlenbüschel daher in sich übergeht. Von den vier Wendepunktsgeraden dieses Strahlenbüschels geht eine in sich über, die anderen vertauschen sich cyklisch. Der eine Doppelstrahl der Projektivität im Büschel ist die feste Wendepunktsgerade, der andre ist der nach dem Centrum der Kollineation gehende Strahl. Er ist Tangente einer ausgezeichneten Kurve des Büschels, während das feste Dreiseit eine zweite durch die Kollineation in sich abgebildete Kurve des Büschels ist. Die drei anderen von demselben Punkte nach den Gegenecken der Dreiseite gezogenen Geraden werden gleichfalls cyklisch vertauscht.

Von den vier Wendepunktsgeraden, die durch einen Wendepunkt gehen, kann in der gleichen Weise jeder als Doppelstrahl einer Projektivität aufgefasst werden, die die drei andern cyklisch vertauscht. Eine solche Projektivität der vier Strahlen ist nur bei einer ausgezeichneten Lage möglich, in der jeder der vier Strahlen dieselbe Lagenbeziehung gegen die drei übrigen hat, wie jeder andere. Man nennt sie **vier äquianharmonische Strahlen.** Aus dem Gesagten ergibt sich, dass auch die Strahlen aus dem Wendepunkt nach den Gegenecken der durch ihn gehenden Wendepunktsgeraden vier äquianharmonische Strahlen sind.[1])

Eine jede Kurve, die eine der vier letzten Strahlen zur Tangente hat, bleibt bei einer Kollineation dritter Art an der Stelle. In jedem Wendepunkt sind also vier solcher Kurven bestimmt und da die Konstruktion ihrer vier Tangenten sich projektiv auf jeden anderen Wendepunkt überträgt, so erhält man durch die vier entsprechend gefundenen Tangenten in einem anderen Wendepunkt dieselben Kurven. Sie heissen die **vier äquianharmonischen Kurven.**

Jede von den 24 Kollineationen dritter Art lässt eine äquianharmonische Kurve fest und vertauscht die drei anderen cyklisch, wie aus der vorhin betrachteten Projektivität innerhalb des Strahlenbüschels folgt. Jede von den vier äquianharmonischen Kurven wird also durch sechs von diesen Kollineationen in sich abgebildet, nämlich von denjenigen, deren Centner in den drei Ecken eines Dreiseits liegen. Hierdurch ist jedem Dreiseit eine äquianharmonische Kurve so zugeordnet, dass wenn das Dreiseit bei einer Kollineation dritter Art[2]) fest bleibt, auch die äquianharmonische Kurve fest bleibt.

Weitere der gesuchten Kollineationen erhält man, indem man die

---

[1]) Stellen die vier ersten Strahlen eine binäre Form dar, so stellen die vier letzten deren Hesse'sche Kovariante dar.

[2]) Dasselbe gilt, wie sich aus dem folgenden ergibt, auch für die übrigen Kollineationen.

der ersten oder der zweiten Art mit denen dritter Art zusammensetzt.[1])

Da bei den beiden ersten jedes Dreiseit, bei den letzten ein Dreiseit fest bleibt, so kann man daraus nur solche Kollineationen erhalten, bei denen ein Dreiseit fest bleibt. Dies gibt insofern neue Arten, als man durch Zusammensetzen der ersten und dritten Art solche Kollineationen erhält, die in dem festen Dreiseit eine Seite fest lassen, die beiden anderen aber vertauschen, — Kollineationen vierter Art — und durch Zusammensetzen der zweiten und dritten Art solche, die die Seiten des festen Dreiseits cyklisch vertauschen — Kollineationen fünfter Art —. Andere in sich abgebildete Kurven als bei der dritten Art, sind dadurch nicht zu erhalten, da die beiden ersten Arten jede Kurve in sich überführen. Eine Kollineation vierter oder fünfter Art wird daher, wie die dritter Art, von allen Kurven des Büschels je ein Dreiseit und je eine äquianharmonische Kurve in sich abbilden, die übrigen Dreiseite, und die übrigen äquianharmonischen Kurven cyklisch vertauschen. Ein näheres Eingehen auf diese Kollineationen ist deshalb nicht nötig, wir geben nur ihre bezeichnenden Eigenschaften an.

Zur Festlegung einer Kollineation vierter Art wähle man eines der Dreiseite und in ihm eine Gerade als fest bleibend aus, und ordne hierauf einer weiteren Geraden eines zweiten Dreiseits irgend eine Gerade der beiden letzten Dreiseite zu. Man erhält so 4 . 3 . 6 = 72 Kollineationen. Es ist leicht zu zeigen, dass sich thatsächlich jede so bestimmte Kollineation in eine der ersten und eine der dritten Art zerlegen lässt, und somit giebt es 72 Kollineationen vierter Art. Jedes Dreiseit geht durch 18 von ihnen in sich über. Ebenso einfach ist einzusehen, dass die Wiederholung (zweite Potenz) einer solchen Kollineation eine solche der dritten Art und ihre dritte Potenz eine solche der ersten Art ergibt; aus beidem folgt, dass sie selbst die Periode sechs besitzt.

Zur Festlegung einer Kollineation fünfter Art wähle man ein festes Dreiseit aus und in ihm eine der beiden möglichen cyklischen Vertauschungen, und ausserdem ordne man einer Seite eines zweiten Dreiseits irgend eine Seite eines der beiden übrigen Dreiseite zu. Dies ist auf 4 . 2 . 6 = 48 verschiedene Weisen möglich, und da man, wie leicht zu zeigen, auch umgekehrt jede so gewonnene Kollineation in eine der zweiten und dritten Art zerlegen kann, so erhält man 48 Kollineationen der fünften Art.

[1]) Man kann die folgenden Sätze auch aus dem Schema ableiten, das man erhält, indem man die 12 Wendepunktsgeraden nebeneinander schreibt und die ihnen in einer Kollineation erster, zweiter oder dritter Art entsprechenden darunter setzt. Daraus kann man dann die Folgen dieser Kollineationen leicht bilden und ebenso deren Quadrate u. s. w. Doch legt dieses formale Verfahren die Gründe für das Verhalten der Kollineationen weniger klar.

Jedes Dreiseit geht durch 12 von ihnen in sich über. Sie besitzen die Periode drei.

Mit den Kollineationen der dritten, vierten und fünften Art haben wir alle, die ein einziges Dreiseit festlassen. Denn zur Bestimmung solcher kann man von den vier Dreiseiten eines auswählen und auf sechs Weisen sich selbst zuordnen und ausserdem eine Seite eines zweiten einer der sechs Seiten der beiden letzten. Es ist dies auf $4 . 6 . 6 = 144$ Arten möglich, also sind durch die $24 + 72 + 48 = 144$ angegebenen alle erschöpft.

Wir haben die Kollineationen dritter Art mit denen der ersten und zweiten Art zusammengesetzt, aber noch nicht mit denen der dritten Art. Soll bei der Folge zweier solcher perspektiven Kollineationen von der Periode drei etwas neues herauskommen, so müssen sich die vier Dreiseite paarweise vertauschen. Man wähle dazu als Kollineationsaxen zwei Wendepunktsgeraden, die verschiedenen Dreiseiten angehören; sie treffen sich dann in einem Wendepunkt, der in der Folge der beiden perspektiven Kollineationen fest bleibt. Die vier Wendepunktsgeraden dieses Wendepunktes gehen dann jedesmal in der Weise projektiv in sich selbst über, dass eine fest bleibt, während sich die drei andern cyklisch vertauschen; man kann daher die beiden Kollineationen stets so auswählen, dass ihre Folge ein paarweises Vertauschen dieser vier Geraden bewirkt, also im Strahlenbüschel des Wendepunktes eine involutorische Projektivität erzeugt.

Eine derart durch Zusammensetzen zweier Kollineationen dritter Art gewonnene Kollineation ordnet die vier Dreiseite zu zwei Paaren und vertauscht die beiden eines jeden Paares. Es ist die sechste Art.

Die bezeichnenden Eigenschaften dieser Kollineationen sind aus ihrer Erzeugung sofort zu entnehmen. Zu dem festbleibenden Wendepunkt kommt noch als festbleibende Gerade die Verbindungsgerade der Centren der beiden erzeugenden Kollineationen, also die harmonische Polare des Wendepunktes. Auf ihr bleiben wieder zwei durch die involutorische Vertauschung von vier Dreiseitsecken bestimmte Punkte fest, die sicher keine Wendepunkte sind, da eine harmonische Polare keine solche enthält. Daraus folgt, dass ausser den beiden durch den festen Wendepunkt gehenden Geradenpaaren sich keine zwei Wendepunktsgeraden beim Vertauschen der Dreiseite mitvertauschen können, denn sonst bliebe ihr Schnittpunkt, der Wendepunkt ist, fest. Damit ist die Art der Zuordnung der Seiten bei der Vertauschung zweier Dreiseite genau angegeben. — Wiederholt man dann die Kollineation, so kehren nur die durch den festen Wendepunkt gehenden Geraden in sich zurück, die anderen Seiten eines Dreiseits vertauschen sich. Dies liefert die Sätze:

e) Die Wiederholung einer Kollineation der sechsten Art liefert eine Kollineation der ersten Art.

f) Die Kollineationen der sechsten Art haben die Periode vier.

Zu ihrer Festlegung ordne man zuerst ein Dreiseit einem der drei anderen kollinear zu, was auf drei mal sechs Arten möglich ist, und hierauf eine Seite des zweiten irgend einer Seite des ersten (drei Arten) also erhält man $3 . 6 . 3 = 54$ Kollineationen. Die Bestimmung zweier erzeugenden Kollineationen dritter Art für jede so festgelegte Kollineation ergibt sich aus den angegebenen Eigenschaften.

Führt man zwei beliebige Kollineationen sechster Art hinter einander aus, so erhält man zwei Mal eine Vertauschung der vier Dreiseite zu zwei Paaren, also wieder eine solche Vertauschung, oder eine Zurückführung jedes Dreiecks in sich. Daraus folgt, dass die 18 Kollineationen der Gruppe, die jedes Dreiseit in sich abbildet, zusammen mit den 54 Kollineationen der sechsten Art wieder eine Gruppe bilden, denn zwei von diesen 72 Kollineationen setzen sich stets wieder zu einer solchen zusammen.

Hieraus folgt der Satz:

g) Die Kollineationen erster, zweiter und sechster Art bilden zusammen eine invariante Untergruppe von 72 Kollineationen, in der die 18 Kollineationen erster und zweiter Art wieder als invariante Untergruppe enthalten ist.

Um die Kurven zu bestimmen, die durch eine Kollineation sechster Art in sich abgebildet werden, hat man nur im festen Wendepunkte die Doppelstrahlen der Involution aufzusuchen, die die vier Wendepunktsgeraden paarweise vertauscht. Da für die vier Geraden drei Anordnungen zu zwei Paaren möglich sind, so giebt es drei Involutionen, die drei Paare von Doppelstrahlen liefern, und zwar bekanntlich so, dass jedes dieser Paare zu jedem anderen harmonisch liegt.

Diese sechs Doppelstrahlen sind Tangenten von sechs ausgezeichneten Kurven, und da sich die Konstruktion auf jeden anderen Grundpunkt des Büschels, d. h. Wendepunkt projektiv überträgt, so können die Kollineationen, die einen anderen Wendepunkt fest lassen, auch keine anderen festen Kurven liefern, als die durch den ersten Wendepunkt gefundenen. Diese sechs Kurven heissen harmonische Kurven dritter Ordnung, die in drei Paare zerfallen. Bei jeder Kollineation sechster Art bleibt ein Paar fest, so dass von den 54 Kollineationen auf jedes Paar, also auch auf jede einzelne Kurve 18 fallen, die sie fest lassen. D. h.:

h) Jede der sechs harmonischen Kurven bleibt bei 18 Kollineationen der sechsten Art fest.

Mit den sechs Arten von Kollineationen haben wir, wenn wir die

Identität noch hinzufügen, sämtliche verlangten Kollineationen erschöpft. In der That ist $1 + 9 + 8 + 24 + 72 + 48 + 54 = 216$.

Wir fassen die Ergebnisse der bisherigen Betrachtungen zusammen:

i) Von den 216 Kollineationen, die den syzygetischen Büschel in sich überführen, bilden 18 jede Kurve des Büschels in sich ab. 36 weitere bilden je eine in ein Dreiseit zerfallende Kurve und eine äquianharmonische Kurve in sich ab und vertauschen sämtliche übrigen Kurven cyklisch zu je dreien. 54 Kollineationen bilden je ein Paar harmonischer Kurven in sich ab und vertauschen alle übrigen Kurven paarweise.

Eine ausgezeichnete Kurve kann nur in eine gleichartige kollinear abgebildet werden. Soll eine nicht ausgezeichnete in eine andere Kurve kollinear abgebildet werden, so kann dies auf 18 Arten geschehen, da 18 Kollineationen die zweite in sich überführen. Also kann sie durch sämtliche 216 Kollineationen des Büschels nur in $\frac{216}{18} = 12$ Kurven übergeführt werden, sie selbst eingerechnet. Also:

k) Durch die 216 Kollineationen kann ein Dreiseit und ebenso eine äquianharmonische Kurve nur in vier Kurven des Büschels abgebildet werden, nämlich in eines der vier Dreiseite und eine der vier äquianharmonischen Kurven; ebenso eine harmonische Kurve nur in sechs, nämlich in eine der sechs harmonischen Kurven. Dagegen wird eine nicht ausgezeichnete Kurve in 12 Kurven des Büschels kollinear abgebildet.

VII. Fortsetzung: Unterscheidungen nach der Reellität.

Wir müssen nun noch auf die Reellität der betrachteten Gebilde eingehen. Zwei von den vier Wendepunktsdreiseiten haben, als Kurven dritter Ordnung aufgefasst, reelle Polarsysteme (Gleichungen mit reellen Koefficienten), die beiden anderen sind einander konjugirt imaginär. Von den beiden ersteren hat aber nur eines drei reelle Seiten, von dem anderen ist eine Seite und die Gegenecke reell, während die beiden anderen Seiten, wie auch ihre Gegenecken, konjugirt imaginär sind. Daher sind von den neun Wendepunkten nur drei reell, nämlich die Schnittpunkte der drei Seiten des ersten mit der reellen Seite des zweiten Dreiseits. Die Bestimmung der sechs imaginären erfolgt nach v. Staudt'scher Methode durch Schnitt der drei reellen Seiten des ersten Dreiseits mit der Strahleninvolution, die die imaginären Seiten des zweiten Dreiseits festlegt. Und in analoger Weise werden die imaginären Wendepunktsgeraden bestimmt.

Um von den ausgezeichneten Kurven die reellen zu finden, geht man vom Strahlenbüschel eines der drei reellen Wendepunkte aus. Durch ihn gehen zwei reelle und zwei konjugirt imaginäre Wendepunktsgeraden. Die äquianharmonischen Kurven haben zu Tangenten die Strahlen, die nach den Gegenecken dieser vier Geraden gehen. Zwei dieser Ecken sind reell, die beiden anderen konjugirt imaginär. Daraus folgt:

a) Von den vier äquianharmonischen Kurven sind zwei reell, die beiden anderen konjugirt imaginär.

Die harmonischen Kurven haben zu Tangenten die Doppelstrahlen der Involutionen, in denen die vier im Wendepunkt zusammentreffenden Wendepunktsgeraden einander paarweise zugeordnet sind. Ordnet man die Strahlen des reellen Paares einander zu und ebenso die des konjugirt imaginären Paares, so erhält man reelle Doppelstrahlen, in jedem anderen Falle konjugirt imaginäre. Daraus folgt:

b) Von den sechs harmonischen Kurven sind zwei reell, die anderen imaginär.

Um zu erkennen, in welcher Weise eine Kurve des Büschels in sich oder in eine andre Kurve des Büschels abgebildet wird, bestimmen wir diejenigen Kollineationen, die eine reelle Kurve wieder in eine reelle überführen. Zur Festlegung einer reellen Kollineation kann man reellen Elementen nur reelle zuordnen, d. h. man muss die vier reellen Wendepunktsgeraden sich selbst zuordnen. Dies kann, da jedem der vier Dreiseite wieder ein solches entspricht, nur geschehen, wenn das erste Dreiseit sich selbst entspricht und das zweite ebenfalls, doch so, dass die reelle Gerade an der Stelle bleibt. Man kann daher vom zweiten Dreiseit entweder eine Seite festlassen und die beiden andern vertauschen, und vom ersten Dreiseit irgend eine Seite einer anderen zuordnen, und erhält so drei Kollineationen erster Art, nämlich die drei perspektiven Kollineationen, deren Centren die drei reellen Wendepunkte sind; oder aber man lässt jede Seite des zweiten Dreiseits sich selbst entsprechen und kann dann eine Seite des ersten Dreiseits irgend einer der drei Seiten zuordnen und erhält so die Identität und zwei cyklische Kollineationen, die als Folgen je zweier der vorigen zu erzeugen sind, also Kollineationen zweiter Art. D. h.:

c) Von allen Kollineationen, die den syzygetischen Büschel in sich abbilden, ist eine Gruppe von sechs reell, nämlich ausser der Identität die perspektiven Kollineationen mit je einem der drei reellen Wendepunkte als Centrum und ihrer harmonischen Polare als Axe, und die beiden aus diesen zu erzeugenden cyklischen Kollineationen von der Periode drei.

Daraus folgt:

d) Jedes syzygetische Büschel lässt sich in jedes andere durch sechs reelle Kollineationen abbilden.

Da jedes von den beiden ersten Dreiseiten an der Stelle bleibt, so sind (S. 15 u. 16 a) u. c)) reelle Kollineationen nur unter denen zu suchen, die jede Kurve des Büschels in sich überführen.

Es ist aber auch möglich, dass eine reelle Kurve in einer imaginären Kollineation ein reelles Bild hat, wenn sie nämlich in der konjugirt imaginären Kollineation dieselbe Kurve (in anderer Zuordnung der Punkte) zum Bilde hat.

Man braucht hierbei nur den Fall zu berücksichtigen, dass ein reeller Wendepunkt an der Stelle bleibt. Denn würde er in einen anderen abgebildet, so wende man eine Kollineation erster oder zweiter Art an, die ihn wieder zurückbringt; dann wird die Folge der beiden Kollineationen jede Kurve in dieselbe abbilden, wie die erste Kollineation allein, aber den reellen Wendepunkt festhalten.

Nun haben wir nur für eine Kollineation der dritten und eine der sechsten Art zu untersuchen, welche reelle Kurven sie bei Festhalten eines reellen Wendepunktes wieder in reelle Kurven abbildet.

Die Kollineationen dritter Art führt den Strahlenbüschel des Wendepunktes so in sich über, dass eine durch ihn hindurchgehende Wendepunktsgerade fest bleibt und die drei anderen sich cyklisch vertauschen, während genau so wie diese Geraden sich die Strahlen nach deren Gegenecken zuordnen. Man kann dabei entweder die beiden reellen Geraden und eine der imaginären in einen Cyklus von dreien anordnen, oder die beiden imaginären und einen reellen. Die vierte Gerade wird dann von selbst Doppelstrahl. Da aber eine solche cyklische Projektivität lauter reelle Dreiergruppen besitzt, falls sie eine einzige (nicht zusammenfallende) besitzt, so sind bei beiden Anordnungen überhaupt keine reellen Gruppen vorhanden. Es können also höchstens reell entsprechende Paare vorhanden sein, die durch einen imaginären Strahl zu einer Drei ergänzt werden, und zwar höchstens zwei, da drei reelle Paare ebenfalls eine reelle Projektivität bestimmen. In beiden Fällen sind in der That zwei solche reelle Paare vorhanden; im ersten Fall die zwei reellen Wendepunktsgeraden und die Strahlen nach ihren Gegenecken, im zweiten Fall die eine Wendepunktsgerade als Doppelstrahl und der Strahl nach ihrer Gegenecke als zweiter Doppelstrahl. Da die Strahlen nach den Gegenecken Tangenten von äquianharmonischen Kurven sind, so hat man mit Rücksicht darauf, dass sich die Kollineationen vierter und fünfter Art nur aus denen der dritten Art und solchen, die jede Kurve festlassen, zusammensetzen, den Satz:

e) Durch die Kollineationen dritter, vierter und fünfter Art kann keine reelle Kurve in eine ebenfalls reelle Kurve abgebildet werden, mit Ausnahme der beiden Dreiseite mit reellen Polarsystemen und ebenso der beiden reellen äquianharmonischen Kurven; von beiderlei Kurven kann entweder die eine reelle in die andere oder in sich selbst übergehen.

Anders verhält es sich mit den Kollineationen der sechsten Art. Lässt eine solche einen reellen Wendepunkt fest, so vertauscht sie die durch ihn gehenden vier Wendepunktsgeraden paarweise. Die dadurch entstehende Strahleninvolution ist reell und hat reelle Doppelstrahlen, wenn in ihr die Strahlen des reellen Paares einander zugeordnet sind und ebenso die des imaginären Paares. Die beiden anderen Zuordnungen liefern zwei imaginäre Involutionen. Diese haben beide in den Doppelstrahlen der reellen Involution ein Paar zugeordneter Strahlen. Ausserdem können sie kein reelles Paar besitzen, da sonst die ganze Involution reell wäre. Wir kommen so zu dem Ergebnis:

f) Die Kollineationen sechster Art, die jede der beiden reellen harmonischen Kurven in sich abbilden, vertauschen alle andere reelle Kurven paarweise.

Die übrigen Kollineationen der sechsten Art vertauschen die beiden reellen harmonischen Kurven, führen aber sonst jede reelle Kurve in eine imaginäre über.

Da alle Kollineationen sechster Art imaginär sind, so kann die Abbildung einer reellen in eine reelle Kurve nur so erfolgen, dass einem reellen Punktepaar der einen Kurve i. a. ein konjugirt imaginäres der anderen entspricht und umgekehrt.

VIII. Die Vervollständigung der Möbius'schen Einteilung.

Wollte man an dem Grundsatz festhalten, alle diejenigen Kurvengestalten als Gattungen zu unterscheiden, die nicht kollinear in einander abgebildet werden können, so müssten alle die unendlich vielen in einem syzygetischen Büschel enthaltenen Kurven zu besonderen Gattungen Anlass geben. Allerdings lässt sich ausser den beiden harmonischen Kurven zu jeder dieser Kurven eine andere angeben, in die sie durch eine imaginäre Kollineation übergeht. Zwei solche Kurven würden also in einem gewissen Sinne als gleichartig zu gelten haben, nämlich in demselben Sinne, in dem die Kurven von der vierten Klasse mit Selbstschnitt und die mit isolirtem Doppelpunkt als gleichartig betrachtet werden konnten. Da wir uns aber dort zu einer Unterscheidung beider entschlossen haben, so müssen wir es hier auch thun. Wir hätten so unendlich viele Gattungen zu unterscheiden, die allerdings völlig bestimmt wären; denn da jeder syzygetische Büschel sich in jeden andern reell-kollinear abbilden lässt, so braucht man allen Betrachtungen nur einen einzigen solchen Büschel zu Grunde zu legen und ist dann sicher, dass jede Kurve dritter Ordnung sich in eine und nur eine Kurve dieses Büschels durch reelle Kollineation abbilden lässt.

Möbius hielt es nun, wie schon erwähnt, für zweckmässig, von diesen unendlich vielen Gattungen gewisse zu Hauptgruppen zusammenzufassen. Die in allen früheren Einteilungen enthaltene Unterscheidung zwischen ein- und zweiteiligen Kurven hatte sich ihm schon aus seinen Untersuchungen der reinen Lagenbeziehungen ergeben (s. S. 4 oben), und es fragte sich ihm nur noch, ob es nicht noch weitere ebenso berechtigte Zusammenfassungen gäbe; und er setzt zum Entscheid dieser Frage fest: „*dass je zwei Linien zu verschiedenen Gattungen gerechnet werden, wenn sich, ohne erst eine Messung vorzunehmen, erkennen lässt, dass sie einander nicht kollinear sind.*“ Sind nun in den drei reellen Wendepunkten die Tangenten gezogen, so lässt sich eine ausgezeichnete Kurve sofort angeben, die sich sicher von jeder ihr nicht kollinearen unterscheiden lässt, nämlich diejenige, bei der jene drei reellen Wendepunktstangenten in einem Punkte zusammentreffen. Unterwirft man nun eine Kurve dritter Ordnung einer stetigen Änderung etwa so, dass unter Festhaltung der drei reellen Wendepunkte die eine Wendepunktstangente sich dem Schnittpunkt der beiden anderen nähert, dann durch ihn hindurch geht und sich hierauf auf der anderen Seite wieder entfernt, so werden sich auch die beiderseits liegenden Kurven sofort daran unterscheiden lassen, dass die eine in den von den drei Wendepunktstangenten und der zugehörigen Wendepunktsgeraden gebildeten Dreiecken, die andere in den Vierecken verläuft. Auf diese Weise spaltet *Möbius* alle einteilige Kurven vom Geschlecht eins in zweierlei Gattungen, die durch jene ausgezeichnete, die als *Grenzkurve* auftritt, getrennt sind, so dass mit Zurechnung der Grenzkurve aus der einen Gattung drei werden.

Nun lässt sich aber die *Möbius*'sche Grenzkurve, bei der die Tangenten dreier in einer Geraden liegenden Wendepunkte in einem Punkte zusammentreffen, in unsere „ausgezeichnete Kurven“ einreihen. Wählt man nämlich einen dieser Wendepunkte als Centrum und seine harmonische Polare zur Axe einer Perspektivität (Kollineation erster Art), so entsprechen sich in ihr die beiden anderen Wendepunkte; also entsprechen sich auch ihre Tangenten, und treffen sich somit auf der Axe. Gehen also die drei Tangenten durch einen Punkt, so liegt dieser auf den harmonischen Polaren der drei Wendepunkte und ist somit im Wendepunktsdreiseit die Gegenecke der Geraden der drei Wendepunkte (vgl. S. 12 unten). Wählt man nun eine der beiden perspektiven Kollineationen (dritter Art) aus, die diese Wendepunktsgerade zur Axe und die Gegenecke zum Centrum hat, so lässt sie ausser dem Wendepunktsdreiseit eine Kurve des Büschels an der Stelle, nämlich diejenige, deren Tangente von einem festen Wendepunkt nach dem Centrum geht, also gerade unsere *Möbius*'sche Grenzkurve; wir sahen aber, dass die bei dieser Kollineation festbleibende Kurve eine *äquianharmonische* ist. Und umgekehrt wenn eine Kurve bei einer solchen Kollineation fest bleibt, so müssen auch die Tangenten der drei auf der Kollineationsaxe gelegenen Wendepunkte fest bleiben und somit nach dem Centrum gehen. Damit finden wir, dass bei jeder äquianharmonischen Kurve die Tangenten der drei auf einer solchen Kollineationsaxe liegenden Wendepunkte im Centrum zusammentreffen; und da, wie wir sahen, bei allen Kollineationen dritter Art, deren Axen demselben Dreiseit angehören, auch dieselbe Kurve festbleibt, kommt es in jeder äquianharmonischen Kurve dreimal vor, dass die Tangenten dreier in einer Geraden gelegenen Wendepunkte in einem Punkte zusammentreffen. Bei Möbius ist nun jene Gerade die der drei reellen Wendepunkte, d. h. diejenige, die dem Dreiseit mit einer einzigen reellen Seite angehört. D. h.: Die Möbius'sche Grenzkurve ist diejenige äquianharmonische Kurve, die dem Wendepunktsdreiseit mit einer einzigen reellen Seite zugeordnet ist.

Dass aber die andere reelle äquianharmonische Kurve, die dem Dreiseit mit drei reellen Seiten zugeordnet ist, dieser völlig gleichberechtigt ist, kann man ohne weiteres einsehen. In jeder Ecke dieses Dreiseits werden nämlich die Tangenten dreier auf einer Geraden liegenden Wendepunkte zusammentreffen; und wenn auch von diesen drei Tangenten nur die eine reell, die anderen beiden konjugirt imaginär sind, so lässt sich ihr Zusammentreffen in einem reellen Punkt nach bekannten v. Staudt'schen Konstruktionen ebenso durch eine Lagenbeziehung reeller Elemente ausdrücken, wie bei der Möbius'schen Grenzkurve. Man wird daher mit gleichem Rechte auch sie als Grenzkurve zwischen zwei nach v. Staudt'schen Konstruktionen leicht unterscheidbaren Kurvengattungen betrachten müssen.

Hierdurch entsteht allerdings ein Zweifel, ob der Möbius'sche Einteilungsgrundsatz[1]), der sich schon einer Erweiterung bedürftig gezeigt hat,

---

[1]) Hier liegt die Frage nahe, bei welchen Kurven wird durch den Schnittpunkt zweier Wendepunktstangenten eine dritte hindurchgehen, dessen Wendepunkt mit den beiden anderen nicht in einer Geraden liegt. Dass dies thatsächlich im Büschel vorkommt, erkennt man mittelst der Kollineation erster Art, die denjenigen Wendepunkt zum Centrum hat, der mit den beiden ersten in einer Geraden liegt. Auf der Axe, d. h. der harmonischen Polare des Centrums, treffen sich dann die Tangenten der beiden ersten Wendepunkte, und ebenso die Tangente des dritten Wendepunkts und des mit ihm und dem Centrum auf einer Geraden gelegenen weiteren Wendepunkts. Rückt nun der Schnittpunkt der beiden ersten Tangenten auf die dritte Tangente, so fällt er mit dem Schnittpunkt der dritten und vierten Tangente zusammen. Durch diesen Punkt gingen also vier Wendepunktstangenten, die mit acht Kurventangenten gleichwertig sind, und dies widerspricht der Klassenzahl sechs der Kurve.

In der That ist ein Punkt, in dem jene beiden Tangentenschnittpunkte zusammenrücken, die Ecke eines Dreiseits, so dass in ihm sogar sechs Wendepunktstangenten zusammentreffen, von denen aber je drei aus einer einzigen Geraden, nämlich einer Seite des Dreiseits, bestehen.

Die in ein Dreiseit zerfallenden Kurven, die ja bei allen unseren Kollineationen immer mit äquianharmonischen gleichzeitig auftreten, haben also mit jenen die von Möbius hervorgehobene Eigenschaft gemein.

überhaupt noch allgemeine Geltung haben könne. Gewiss hat *Möbius* eine im wesentlichen beizubehaltende Unterscheidung geliefert; aber wir müssen von einer Einteilung verlangen, dass die Merkmale der verschiedenen Gattungen so bestimmt festgelegt werden, dass die Unterscheidung nicht davon berührt wird, wenn sich die Kenntnis der Eigenschaften unserer Kurven auch noch so sehr erweitert.

Sicher haben wir von gewissen *Grenzkurven* auszugehen, die so definirt werden müssen, dass sie dem *Möbius*'schen Grundsatz (s. S. 25) genügen. Hierauf müssen wir die beiderseits der Grenzkurven liegenden, aus ihnen durch stetige Änderung hervorgehenden Kurven als von verschiedener Gattung unterscheiden können. Zu diesem Zwecke wird man eine bestimmte Änderung der Kurven vorschreiben, etwa in der Weise, dass man ein System von Kurven angibt, in dem durch stetige Änderung alle möglichen Kurven entstehen können; dies that auch *Möbius*, da er einen Büschel von solchen Kurven zu Grunde legt, die drei Wendepunkte nebst ihren Tangenten gemein haben. Ferner wird es dienlich sein, wenn in diesem System jede Kurve wirklich vorkommt, und womöglich keine Kurven, die wir nicht den zu unterscheidenden zurechnen.

Alle diese Forderungen werden erfüllt, wenn wir folgende Grundsätze für die Unterscheidung aufstellen:

a) *Als Grenzkurven betrachten wir solche, die durch eine erhöhte Anzahl von Kollineationen in sich abgebildet werden können.*

b) *Als Kurvensystem, in dem jede Grenzkurve Kurven verschiedener Gattung von einander trennt, wählen wir den syzygetischen Büschel.*

Dass diese Grenzkurven von allen anderen schon durch die Lage der sie definirenden Elemente unterschieden werden können, folgt aus der früher gegebenen Konstruktion ihrer Wendepunktstangenten. Und auch die Unterscheidung der Grenzkurven derselben Art erfolgt leicht. Es treten von reellen Kurven als besondere auf die *beiden äquianharmonischen Kurven*, die soeben schon durch eine Lageneigenschaft von einander unterschieden wurden, ferner *die beiden harmonischen Kurven*, die sich durch die Lage der Wendepunktstangente in dem Büschel des Wendepunktes unterscheiden, und von denen überdies die eine aus einem Zug, die andere aus zwei Zügen besteht. Ausserdem kommen zwei *zerfallende Kurven* vor, nämlich ein Dreiseit, in dem alle Seiten und Ecken und ein zweites, in dem eine Seite und ihre Gegenecke reell sind. Der zu Grunde gelegte Büschel hat nun den Vorzug, dass er das kollineare Bild einer jeden beliebigen Kurve, und zwar jedes nur einmal, enthält, und dass ferner keine der einer früheren Gattung zugezählten Kurven (wie bei *Möbius* die Kurve mit isoliertem Doppelpunkt) vorkommt. Die im

Büschel enthaltenen zerfallenden Kurven sind keine Kurven im strengen Sinne, da sie nur aus Geraden bestehen. Und keinem anderen Büschel von Kurven dritter Ordnung kommen diese Eigenschaften zu. Es ergibt sich daher:

c) Die Möbius'sche Grenzkurve ist durch die zweite reelle äquianharmonische Kurve und durch die beiden reellen harmonischen Kurven zu ergänzen.

Die Gruppirung der Kurven im Büschel und damit die Zusammenfassung von unendlich vielen, unter einander nicht projektiven Kurven zu bestimmten Gattungen erfolgt jetzt, indem man im Strahlenbüschel eines Wendepunktes den Strahl als Tangente je einer Kurve des Büschels auffasst und ihn in einem festen Sinne von einer Anfangslage bis zu ihr zurückdreht. Auf diese Weise erhalten wir mit Einrechnung der vier Grenzkurven, aber mit Ausschluss der gleichfalls als Grenzen auftretenden beiden Dreiseite zehn Gattungen, so dass sie zusammen mit den drei Gattungen vom Geschlecht null 13 Gattungen von ebenen Kurven dritter Ordnung liefern, die wir in der folgenden Tabelle zusammenstellen. In ihr sind zwei Kurven oder Gebiete, die sich durch eine imaginäre Kollineation in einander überführen lassen, mit gleichen Buchstaben oder römischen Ziffern bezeichnet und nur durch einen beigesetzten oder weggelassenen Strich unterschieden. In Fig. 2 stellen wir den syzygetischen Büschel mit seinen ausgezeichneten Kurven dar, indem wir die drei reellen Wendepunkte in symmetrischer Anordnung auf der unendlich fernen Geraden wählen.

Von den in der Tabelle enthaltenen Kurven sind Nr. 4, 5, 6 von Möbius in eine Gattung zusammengefasst (zweiteilige Kurven). Nr. 7 bilden die etwa als Vierseitskurven zu bezeichnenden einteiligen Kurven, Nr. 8 ist die Möbius'sche Grenzkurve, Nr. 9 bis 13 sind die als Dreiseitskurven zu bezeichnenden einteiligen Kurven.

IX. Die 13 Gattungen der ebenen Kurven dritter Ordnung.

Kurven vom Geschlecht null.

1. S Kurve mit Spitze.
2. D Kurve mit Selbstschnitt.
3. D' Kurve mit isolirtem Doppelpunkt.

Kurven vom Geschlecht eins.

$\triangle$ Dreiseit mit einer reellen Seite.
4. I Gebiet zwischen $\triangle$ und H_1.
5. H_1 Zweiteilige harmonische Kurve.
6. I' Gebiet zwischen H_1 und $\triangle'$.
$\triangle'$ Dreiseit mit drei reellen Seiten.
7. II Gebiet zwischen $\triangle'$ und A.
8. A Äquianharmonische Kurve. (Möbius' Grenzkurve).
9. III Gebiet zwischen A und H_2.
10. H_2 Einteilige harmonische Kurve.
11. III' Gebiet zwischen H_2 und A'.
12. A' Äquianharmonische Kurve (imaginär-kollineares Bild der Möbius'schen Grenzkurve).
13. II' Gebiet zwischen A' und $\triangle$.
$\triangle$ Dreiseit mit einer reellen Seite.

X. Über die Möglichkeit der Weiterführung der Einteilung.

Die im vorigen gegebene 10-Teilung der Kurven dritter Ordnung vom Geschlecht eins ist durchaus abgeschlossen. Sie kann ohne völlige Änderung des Teilungsgrundes weder eingeschränkt noch erweitert werden. Und die hinzutretende Einteilung der Kurven vom Geschlecht null in drei Gattungen ordnet sich demselben Teilungsgrund eindeutig unter, denn es gibt von diesen Kurven bei zu Grundlegung der Anzahl von Kollineationen, die eine Kurve in sich abbilden, zwei Gattungen (Kurven von der Klasse drei und von der Klasse vier), von denen die eine (vierte Klasse) aus Gründen der Reellität in zweierlei Gattungen zu spalten ist.

Und doch ist es nicht unmöglich durch Verlassen des Teilungsgrundes diejenigen Kurvengattungen, die oben als Gebiete von Kurven zusammengefasst sind, wieder in Teilgebiete zu zerlegen. Das früher gegebene Beispiel der Weiterführung der Teilung bei Berücksichtigung des unendlich Fernen gibt einen Anhalt, in welcher Weise eine solche Weiterführung auch hier zu stande kommen kann. Man müsste die Teilung so einrichten, dass sie nach bestimmtem Gesetz beliebig ins Unendliche fortgeführt werden könnte, so dass ein ganzes System von Teilungen entstünde, in dem jede denkbare Einteilung eine bestimmte Stelle zugewiesen bekäme.

Nimmt man ein auf gleichem Grundsatz aufgebautes System der Einteilungen nach dem Verhalten der Kurve im unendlich Fernen hinzu, so hat man zwei einander durchdringende Systeme, und die Frage, wohin eine gegebene Kurve gehört, erhält folgende scharfe Fassung, die zugleich eine Anweisung für spätere Einteilungen enthält: Sind zwei verschiedenartige, d. h. nicht kollineare Kurven dritter Ordnung auf irgend eine sie völlig bestimmende Weise gegeben, und soll der Grad ihrer Verschiedenartigkeit beurteilt werden, so ist zu untersuchen, bis zu welcher Stelle des Systems aller denkbaren Einteilungen man die projektive Einteilung und die Einteilung gegenüber dem unendlich Fernen fortzusetzen hat, damit die beiden Kurven gerade eben nicht mehr derselben Gattung zuzurechnen seien.

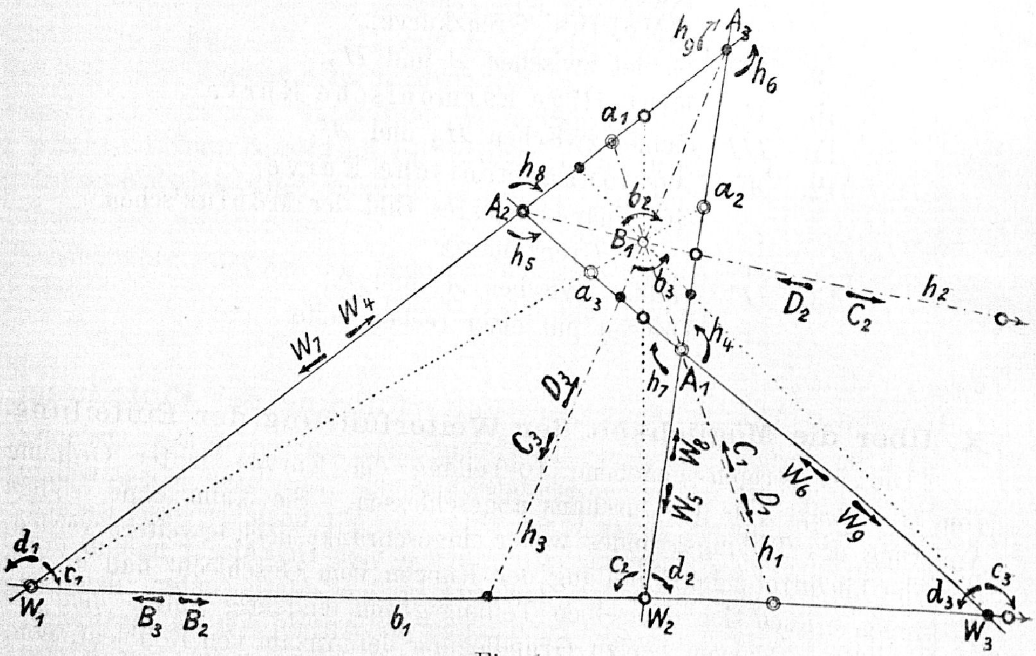

Fig. 1.

XI. Erklärung der Figuren.

Die erste Figur stellt die neun Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung und ihre gegenseitige Lage dar. Sind diese neun Punkte durch $W_1, \dots W_9$ bezeichnet und nach Art der Elemente einer Determinante[1]) angeschrieben, so liegen bei geeigneter Bezeichnung auf einer Geraden:

[1]) Das Schema der 9 Wendepunkte und 12 Wendepunktsgeraden findet sich bei Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet und herausgegeben von Lindemann, Bd. I, S. 507 (1876).

a) Die drei Wendepunkte einer jeden Horizontalreihe,
b) die einer jeden Vertikalreihe,
c) die der drei nach rechts fallenden Diagonalen,
d) die der drei nach links fallenden Diagonalen.

Die in jeder dieser vier Arten enthaltenen drei Geraden bilden ein Wendepunktsdreiseit; sie seien mit $a_1, a_2, a_3; \ldots d_1, d_2, d_3$ bezeichnet. Die 12 Ecken dieser vier Dreiseite seien dann in entsprechender Bezeichnung $A_1, A_2, A_3; \ldots D_1, D_2, D_3$, dann liegen auf der harmonischen Polaren eines jeden Wendepunktes je vier dieser Ecken, und zwar bilden sie mit diesen neun Geraden, die entsprechend mit $h_1, \ldots h_9$ bezeichnet seien, ein zu dem vorigen gleichartiges Schema. Die beiden einander dual entsprechenden Schemen sind folgende:

$$\begin{array}{ccccccc}
c_1 & & c_2 & & c_3 & & \\
 & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & \\
 & & W_1 & W_2 & W_3 & — & b_1 \\
 & \diagup & W_4 & W_5 & W_6 & — & b_2 \\
d_1 & \diagup & W_7 & W_8 & W_9 & — & b_3 \\
d_2 & \diagup & | & | & | & & \\
d_3 & & a_1 & a_2 & a_3 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & C_1 & & C_2 & C_3 & & \\
 & & \diagdown & \diagdown & \diagdown & & \\
 & & h_1 & h_2 & h_3 & — & B_1 \\
 & \diagup & h_4 & h_5 & h_6 & — & B_2 \\
D_1 & \diagup & h_7 & h_8 & h_9 & — & B_3 \\
D_2 & \diagup & | & | & | & & \\
D_3 & & A_1 & A_2 & A_3 & &
\end{array}$$

Die $9 + 12$ Geraden und ebensoviel Punkte dieser beiden Schemen sind alle in der Figur 1 dargestellt. Die Figur entsteht in der folgenden Weise:

Vom einen Wendepunktsdreiseit werden drei reelle Seiten a_1, a_2, a_3 und von einem zweiten eine reelle Seite b_1 beliebig (doch so, dass keine drei der vier Geraden durch einen Punkt gehen) angenommen. Die drei ersten Geraden schneiden die vierte in den drei einzigen reellen Wendepunkten W_1, W_2, W_3 und einander in den Ecken A_1, A_2, A_3 des ersten Wendepunktsdreiseits. Der Pol der Geraden b_1 zu diesem Dreiseit ist die Gegenecke B_1 der Geraden b_1 in dem zweiten Wendepunktsdreiseits, während dessen konjugirt imaginäre Ecken B_2, B_3 auf der Geraden b_1 durch die Involution bestimmt sind, die auf dieser Geraden durch die Gegenseiten des vollständigen Vierecks $A_1\ A_2\ A_3\ B_1$ ausgeschnitten wird. Die entsprechenden Paare dieser Involution sind auf der Geraden b_1 durch gleichartige Markirung der Punkte angegeben, während die beiden imaginären Doppelpunkte B_2, B_3 in v. Staudt'scher Weise durch Beisetzen einer Richtung auseinander gehalten werden. Projicirt man diese Involution aus B_1, so erhält man eine Strahleninvolution, deren Doppelelemente die Seiten b_3 und b_2 des zweiten Dreiseits sind.

Diese Strahleninvolution wird hierauf mit den drei Geraden a_1, a_2, a_3 geschnitten und erzeugt auf ihnen je eine Punktinvolution, deren zugeordnete Paare wieder an der gleichartigen Markirung zu erkennen sind, und deren Doppelpunkte die sechs noch fehlenden paarweise konjugirten Wendepunkte sind.

Von jedem der drei reellen Wendepunkte aus gesehen decken sich die zwei Punktinvolutionen, deren Träger nicht durch ihn hindurchgehen, wie für die drei markirten Punktepaare leicht folgt; sie rufen so in dem Wendepunkt gemeinschaftlich eine Strahleninvolution hervor, deren Doppelstrahlen zwei konjugirt imaginäre, aber verschiedenen Dreiseiten angehörige Wendepunktsgeraden sind. Damit sind auch die sechs Seiten des dritten und vierten Dreiseits bestimmt.

Von den neun harmonischen Polaren der Wendepunkte sind drei, h_1, h_2, h_3 reell, die nämlich die reelle Ecke B_1 des zweiten Dreiseits mit den drei reellen Ecken des ersten verbinden. Auf diesen drei Geraden liegen aber auch die sechs paarweise konjugirt imaginären Ecken der beiden übrigen Dreiseite. So liegen auf der Geraden h_1 ausser den Ecken A_1, B_1 auch die Ecken C_1, D_1, wobei C_1 der Schnitt der Geraden c_2 und c_3 ist, und ebenso D_1 der Schnitt von d_2 und d_3; in der That lässt sich beweisen, dass die beiden Strahleninvolutionen in W_2 und W_3, die c_2, d_2 und c_3, d_3 zu imaginären Doppelstrahlen haben, die Gerade h_1 in einer und derselben Punktinvolution schneiden. Diese hat dann die Punkte C_1 und D_1 zu Doppelelementen.

Es fehlen nur noch die den sechs imaginären Wendepunkten zugehörigen harmonischen Polaren. Sie werden erhalten, indem man aus den Ecken A_1, A_2, A_3 des ersten Dreiseits die beiden konjugirten Ecken B_2, B_3 des zweiten Dreiseits projicirt, also als imaginäre Doppelstrahlen derjenigen Strahleninvolution, die aus A_1, A_2, A_3 die auf b_1 bezeichnete Punktinvolution projiciren.

Die Geraden $h_1, \dots h_9$ können auch als die Tangenten in den Spitzen einer Kurve dritter Klasse aufgefasst werden, wie denn die ganze Figur sich selbst dual ist.

Die zweite Figur stellt den syzygetischen Büschel von Kurven dritter Ordnung dar, also denjenigen Büschel, dessen neun Grundpunkte für jede Kurve des Büschels die Wendepunkte sind. Zur besseren Übersicht sind die drei reellen Wendepunkte des Büschels auf die unendlich ferne Gerade gelegt, und zwar in regelmässiger Anordnung, so dass das reelle Wendepunktsdreiseit gleichseitig, und somit die reelle Ecke des zweiten Dreiseits die Mitte des ersten wird.

Da die ganze Ebene durch die „Grenzkurven" in Gebiete zerlegt wird, genügt es, diese Kurven herauszugreifen, also ausser den beiden erwähnten Dreiseiten nur die beiden reellen harmonischen und die beiden reellen äquianharmonischen Kurven anzugeben.

Um den Verlauf der Kurven möglichst genau zu zeichnen, kann man diejenigen Kegelschnitte konstruiren, die sechs zusammenfallende Schnittpunkte mit der Kurve haben[1]). Die Berührungspunkte der Kurven mit diesen Kegelschnitten sind die Scheitel, sie liegen auf den harmonischen Polaren der Wendepunkte. Das Aussehen der Kurven in der Nähe eines Scheitels wird wesentlich davon abhängen, ob dieser Kegelschnitt eine Ellipse, Hyperbel oder eine Parabel ist. Da in der stetigen Aufeinanderfolge der Kurven im Büschel die Parabel die Grenze zwischen Ellipse und Hyperbel bildet, so suche man unter diesen Scheitelkurven die Parabeln heraus. Lässt man den Scheitel auf der Geraden wandern, die eine Ecke des reellen Dreiseits mit der reellen Ecke des zweiten Dreiseits verbindet, so bestimmen sich die Scheitel mit parabolischen Scheitelkurven aus einer Gleichung sechsten Grades. Drei Wurzeln dieser Gleichung ergeben sich aus dem Satze, dass ein in sechs zusammenfallenden Punkten schneidender Kegelschnitt einer äquianharmonischen Kurve eine (durch den Berührungspunkt beider Kurven bestimmte) Seite des zugehörigen Dreiseits berührt. Danach gehen solche Parabeln durch die drei Scheitel der äquianharmonischen Kurve A, also durch den reellen und die beiden konjugirt imaginären. Es bleibt somit noch eine Gleichung dritten Grades, und diese bestimmt drei weitere zu drei verschiedenen Kurven gehörige parabolische Scheitel, von denen aber nur einer reell ist, der einem Oval[2]) angehört. Dieses ist auf der Zeichnung fein punktirt angegeben.

Wandert jetzt der Scheitel auf jener Geraden aus dem Unendlichen nach der Ecke des reellen Dreiseits, so hat er auf diesem ganzen Stück, auf dem er von ausgezeichneten Kurven nur H_2 trifft, ausschliesslich hyperbolische Scheitelkurven. Auch beim Überschreiten jener Ecke ins Innere des Dreiseits bleibt anfangs der Kegelschnitt hyperbolisch, dann aber geht er über den zuletzt erwähnten parabolischen Scheitel hinweg, und von da ab werden die Kegelschnitte Ellipsen.

Dabei wird zunächst das Oval von H_1, dann die Ecke des zweiten Dreiseits, um die sich die Ovale zusammenziehen, und dann wieder das Oval von H_1 überschritten, auch beim Durchgang durch die Seite des reellen Dreiseits bleiben die Kurven elliptisch. Erst im Scheitel der Kurve A wird der Kegelschnitt eine Parabel, darüber hinaus, wo er noch auf H_1 und A' auftrifft, bleibt er fortwährend hyperbolisch, auch noch im Durchschreiten der unendlich fernen Geraden.

---

1) Diese Kegelschnitte lassen sich am einfachsten bestimmen nach einem Satze, der sich bei Durège, „Die ebenen Kurven dritter Ordnung“ (Leipzig 1871) in No. 548 findet.

2) Schreibt man den Büschel (nach Hesse) in der Form $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\lambda x_1 x_2 x_3 = 0$, wo das reelle Wendepunktsdreiseit als Koordinatendreiseit und die reelle Ecke des zweiten Dreiseits als Einheitspunkt genommen ist, so hat dieser auf der Geraden $x_1 - x_2 = 0$ gelegene Scheitel mit grosser Annäherung die Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3 = 5 : 5 : 18$.

Wir können dies kurz dahin zusammenfassen, dass von den ausgezeichneten Kurven nur die mit Oval versehene harmonische Kurve H_1, und zwar auf sämtlichen sechs Scheiteln des Ovals, elliptische Scheitelkurven besitzt, dass ferner die zu dem Dreiseit mit einer reellen Geraden gehörige äquianharmonische Kurve A in ihren drei reellen Scheiteln parabolische Scheitelkurven hat, und dass die auf den unpaaren Zügen gelegenen Scheitel aller drei anderen ausgezeichneten Kurven H_1, H_2 und A' hyperbolische Scheitelkurven besitzen.