85

Mathematische Modelle

angefertigt

im mathematischen Institut der k. technischen Hochschule in München

unter Leitung von Prof. Dr. Brill.

XIV.

Ueber die auf die Kugel abwickelbaren Schrauben- und Umdrehungs-Flächen.

Von stud. math. Th. Kuen.

Das Quadrat des Linienelements der Kugel kann wie das jeder Rotationsfläche auf die Form gebracht werden:

$$ds^2 = du^2 + g^2 dv^2,$$

wo g eine Funktion von u allein ist, $v =$ const. einem Meridian, $u =$ const. einem Parallelkreis der Rotationsfläche zugehört.

Da alle Flächen, deren Linienelemente gleiche Form besitzen, auf einander abwickelbar sind, so kommt unsere Aufgabe darauf hinaus, auf die oben angegebene Form das Linienelement einer Schraubenfläche zu bringen, deren rechtwinkelige Coordinaten sich auf folgende Weise durch Cylindercoordinaten darstellen lassen:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = a\varphi + R,$$

wo R eine noch zu bestimmende Funktion von r bedeutet. Aus den letzten Gleichungen ergibt sich aber:

$$ds^2 = dr^2\left(1 + \frac{r^2}{a^2+r^2}\cdot\frac{dR}{dr}\right) + (a^2+r^2)\left(d\varphi + \frac{a\,dR}{a^2+r^2}\right)^2.$$

Man erhält dann die obige Form des Linienelementes, wenn man setzt:

$$dr^2\left(1 + \frac{r^2}{a^2+r^2}\cdot\frac{dR}{dr}\right) = du^2$$
$$a^2 + r^2 = g^2 c^2$$
$$\left(d\varphi + \frac{a\,dR}{a^2+r^2}\right)^2 = \frac{dv^2}{c^2}.$$

86

Ist nun die Rotationsfläche gegeben, auf welche sich die gesuchte Schraubenfläche abwickeln lassen soll, so ist g als Funktion von u bestimmt, und damit, weil sich dR aus den letzten zwei Gleichungen als Funktion von g und u darstellen lässt, auch R als Funktion von r, welch Letzteres eine Funktion von u ist, weil:

$$a^2 + r^2 = g^2 c^2.$$

$z = R$ ist nun die Gleichung der Meridiancurve der gesuchten Schraubenfläche. Durch diese und die Ganghöhe ist sie aber vollständig bestimmt. Wir betrachten daher zunächst nur den Ausdruck für dR und erhalten R daraus durch Integration. Es ist:

$$dR = \frac{g c \,.\, \sqrt{g^2 c^2 \left(1 - c^2 \left[\frac{dg}{du}\right]^2\right) - a^2}}{g^2 c^2 - a^2}\, du.$$

Dabei ist $2 a \pi$ die angenommene Ganghöhe, c eine Constante, deren Bedeutung später erörtert werden wird.

Es soll nun die Schraubenfläche bestimmt werden, auf welche die Kugel abwickelbar ist.

Für die Kugel ist bekanntlich:

$$g = b \sin \frac{u}{b},$$

also:

$$R = \int \frac{b c \sin \frac{u}{b} \cdot \sqrt{b^2 c^2 \sin^2 \frac{u}{b}\left(1 - c^2 \cos^2 \frac{u}{b}\right) - a^2}}{b^2 c^2 \sin^2 \frac{u}{b} - a^2}\, du.$$

Dies Integral ist ein elliptisches. Setzt man:

$$y = b \cos \left(\frac{u}{b}\right),$$

so wird:

$$R = - b c \,.\int \frac{dy}{\sqrt{c^2 (b^2 - y^2)\left(1 - \frac{c^2}{b^2} y^2\right) - a^2}}$$
$$+ \frac{c^5}{b} \cdot \int \frac{y^2 (b^2 - y^2) \,.\, dy}{[c^2 (b^2 - y^2) - a^2] \,.\, \sqrt{c^2 (b^2 - y^2)\left(1 - \frac{c^2}{b^2} y^2\right) - a^2}}.$$

Sind α^2, β^2 die Wurzeln des Ausdrucks unter dem Wurzelzeichen, so wird:

$$\left.\begin{matrix}\alpha^2 \\ \beta^2\end{matrix}\right\} = \frac{b^2}{2 c^2}\left[1 + c^2 \pm \sqrt{(1 - c^2)^2 + 4 \frac{a^2}{b^2}}\right]. \qquad (1)$$

Beide Wurzeln sind reell und positiv, weil $a^2 - b^2 c^2 < 0$ angenommen werden muss. Man erkennt dies aus der Gleichung:

$$g = \frac{\sqrt{a^2 + r^2}}{c} = b \sin \frac{u}{b}.$$

87

Für $u = \text{const.}$ muss auch $r = \text{const.}$ sein, wie sich sofort aus der Beziehung zwischen u und r ergibt; $r = \text{const.}$ stellt nun aber eine Schraubenlinie der gesuchten Fläche dar; die Coordinaten u sind also Schraubenlinien derselben und entsprechen den Parallelkreisen auf der Kugel. Für $y^2 = \alpha^2$, β^2 wird

$$\frac{dR}{du} = 0,$$

also auch:

$$\frac{dR}{dr} = 0;$$

die Meridiancurve $z = R$ besitzt also in den Punkten $y^2 = \alpha^2$, β^2 Tangenten senkrecht zur Z-Axe. Wird eine reelle Fläche verlangt, so kann y^2 nie grösser werden als β^2, da sonst R imaginär werden würde wegen der in jenem Ausdruck vorkommenden Quadratwurzel. Die Meridiancurve besitzt also nur in den den beiden Werthen $y = \pm\beta$ entsprechenden Punkten Tangenten senkrecht zur Z-Axe. Nun ist:

$$y = b \cos\frac{u}{b} = \frac{\sqrt{b^2 c^2 - a^2 - c^2}}{c}.$$

Daraus geht hervor, dass y ein Maximum wird, wenn r seinen kleinsten Werth erhält und umgekehrt. Der grösste Werth von $y^2 = y^2_{\text{max.}}$ ist aber β^2 und der kleinste $y^2_{\text{min.}} = 0$, daher:

$$\begin{aligned} r^2_{\text{min.}} &= (b^2 - \beta^2)\, c^2 - a^2 \\ r^2_{\text{max.}} &= b^2 c^2 - a^2. \end{aligned} \tag{2}$$

In den den Werthen $y = \pm\beta$ entsprechenden Punkten, wo die Tangenten senkrecht zur Z-Axe sind und r ein Minimum ist, besitzt also die Meridiancurve Spitzen, deren Tangenten senkrecht zur Z-Axe verlaufen.

Setzt man in R: $y = \beta x$, so bewegt sich x zwischen 0 und 1, und man erhält, wenn noch:

$$X = (1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2), \quad \varkappa = \frac{\beta}{\alpha}, \quad m^2 = \frac{\alpha^2}{b^2 - \frac{a^2}{c^2}}$$

gesetzt wird:

$$R = -\frac{b^2}{\alpha c}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + \alpha c\int\frac{\varkappa^2 x^2 . dx}{\sqrt{X}} + \frac{a^2}{\alpha c}\cdot\int\frac{m^2\varkappa^2 x^2}{1 - m^2\varkappa^2 x^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Mit Rücksicht auf:

$$\alpha^2 . \beta^2 = \frac{b^2}{c^2}\left(b^2 - \frac{a^2}{c^2}\right)$$

erhält man die Ungleichungen:

$$1 < m^2 < \frac{1}{\varkappa^2}.$$

Das Integral dritter Gattung in R nimmt daher die Jacobi'sche Normalform an, wenn gesetzt wird:

88

$$m = \sin \mathrm{am}\,(i\gamma + K) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{b^2 - \frac{a^2}{c^2}}},$$

wo das positive Vorzeichen der Wurzel zu nehmen ist. K und K' sind die vollständigen Integrale erster Gattung für den Modul $\varkappa = \frac{\beta}{\alpha}$ und den zu ihm gehörigen complementären Modul $\varkappa'$.

Führt man nun noch die Jacobi'sche Bezeichnung ein:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad E(u) = \int \frac{1 - \varkappa^2 x^2}{\sqrt{X}}\, dx,$$

$$\int \frac{m\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-\varkappa^2 m^2}\,.\,\varkappa^2 x^2}{1 - m^2 \varkappa^2 x^2} \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Pi(u, i\gamma + K),$$

so wird:

$$R = -\frac{b^2}{\alpha c} u + \alpha c\,[u - E(u)] \pm a\, i\, \Pi(u, i\gamma + K).$$

γ berechnet sich aus der Gleichung:

$$\sin \mathrm{am}\,(\gamma, \varkappa') = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 - b^2 + \frac{a^2}{c^2}}{\alpha^2 - \beta^2}} = \sin \varphi_0. \tag{3}$$

Das Vorzeichen von Π in R stimmt mit dem des Ausdruckes:

$$\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}\sqrt{1 - \varkappa^2 m^2}}$$

überein; das letztere ist aber positiv oder negativ, je nachdem γ oder $\sin \mathrm{am}\,(\gamma, \varkappa')$ positiv oder negativ gewählt wird.

Nun ist weiter:

$$\Pi(u, i\gamma + K) = u \frac{\Theta'_1(i\gamma)}{\Theta_1(i\gamma)} + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta_1(u - i\gamma)}{\Theta_1(u + i\gamma)},$$

wo Θ'_1 den Differentialquotienten von Θ_1 nach $i\gamma$ bedeutet. Ferner ist dabei:

$$\begin{aligned} \Theta_1(i\gamma) &= 1 + \Sigma q^{n^2} \left(e^{-\frac{\pi\gamma n}{K}} + e^{\frac{\pi\gamma n}{K}} \right) \\ \Theta_1(u \pm i\gamma) &= \left[1 + \Sigma q^{n^2} \cos \frac{\pi n u}{K} \left(e^{-\frac{\pi\gamma n}{K}} + e^{\frac{\pi\gamma n}{K}} \right) \right] \\ &\quad \pm i \,.\, \left[\Sigma q^{n^2} \sin \frac{\pi n u}{K} \left(e^{-\frac{\pi\gamma n}{K}} - e^{\frac{\pi\gamma n}{K}} \right) \right] \\ &= A \pm i B. \end{aligned} \tag{4}$$

Nun ist:

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{A - iB}{A + iB} = -i \operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A},$$

also endlich:

$$R = u \left\{ \alpha c - \frac{a^2}{\alpha c} - \frac{\alpha\pi}{K} \frac{\Theta'_1(i\gamma)}{\Theta_1(i\gamma)} \right\} - \alpha c E(u) + a \,.\, \operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A}. \tag{5}$$

Der Gang der numerischen Rechnung ist folgender: Man nimmt für φ irgend einen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Werth an, dann bestimmt sich aus der Formel:

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{b^2c^2 - a^2 - r^2}{c^2\beta^2}} \tag{7}$$

das zugehörige r der gesuchten Meridiancurve; ferner ist:

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}}. \tag{8}$$

Da nun γ sich berechnet aus:

$$\gamma = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa'^2 \sin^2\varphi}}, \tag{9}$$

so erhält man aus Formel (5) $z = R$, die Z-Coordinate der gesuchten Curve.

Die Bedeutung der Constanten c ergibt sich in folgender Weise: Man denke sich aus der Kugel eine von zwei gleich grossen Parallelkreisen begrenzte Zone herausgeschnitten. Diese Zone kann man (s. unt. Fall II.) in eine Rotationsfläche umwandeln, die auf die Kugel abwickelbar ist, und deren grösster Parallelkreis einen Radius bc besitzt. Denkt man sich diese Rotationsfläche längs eines Meridians aufgeschnitten, so entsteht aus derselben die gesuchte Schraubenfläche in der Weise, dass die zwei Schnittränder parallel der Axe um die Ganghöhe gegeneinander verschoben werden.

Die Länge s der gesuchten Meridiancurve und die Breite $\pi - 2\psi_0$ der zugehörigen Kugelzone kann unmittelbar angegeben werden:

$$\psi_0 = \arcsin \frac{\sqrt{a^2 + r^2_{\text{min.}}}}{bc}$$

$$s = (\pi - 2\psi_0) \, . \, b \, .$$

Die auf dem Modell dargestellte Schraubenfläche ist auf eine Kugel vom Radius:

$$b = \frac{\sqrt{75}}{2} = 4{,}33^{\text{cm}}$$

abwickelbar und entspricht den Annahmen:

$$c^2 = \tfrac{8}{5}$$

$$a = \sqrt{3}\,.$$

Es ergibt sich dann:

$$r_{\text{max.}} = 5{,}196^{\text{cm}}$$

$$r_{\text{min.}} = 3{,}464^{\text{cm}}$$

$$\pi - 2\psi_0 = 90^\circ \text{ (im Bogenmass).}$$

Um zu den **Rotationsflächen** zu gelangen, die auf die Kugel:

$$g = b \sin \frac{u}{b}$$

abwickelbar sind, braucht man nur in den für die Schraubenflächen erhaltenen Ausdrücken $a = 0$ zu setzen.

Es ergibt sich dabei, dass zwei Fälle zu unterscheiden sind; nämlich je nachdem c kleiner oder grösser als 1 wird:

I. $c < 1$.

$$\alpha^2,\ \beta^2 = \frac{b^2}{c^2},\ b^2$$

$$r^2_{\text{min.}} = 0, \quad r^2_{\text{max.}} = b^2 c^2$$

$$R = -b \,.\, E(u), \quad \varkappa = c.$$

Für das beifolgende (spindelförmige) Modell wurde $c = 0{,}8$ angenommen, während b denselben Werth wie bei der Schraubenfläche besitzt.

II. $c \cancel{<} 1$.
$>$

$$\alpha^2,\ \beta^2 = b^2,\ \frac{b^2}{c^2}$$

$$r^2_{\text{min.}} = b^2 (c^2 - 1)$$

$$r^2_{\text{max.}} = b^2 c^2$$

$$R = u(c^2 - 1) \,.\, \frac{b}{c} - b\,c \,.\, E(u), \quad \varkappa = \frac{1}{c}.$$

Für das diesem Fall entsprechende Modell wurde $c = 1{,}4$, b wie oben angenommen.

In Folge der Uebereinstimmung von b für die drei Modelle sind alle auf die beigegebene Kugel abwickelbar, wovon man sich etwa durch Aufbiegung eines passend geformten Staniolstreifens leicht überzeugt.

München, im Januar 1880.

Druck von H. Brill in Darmstadt.