

Mathematische Modelle

angefertigt

im mathematischen Institut des k. Polytechnikums in München.

Abtheilung II. Unter Leitung von Prof. Dr. Brill.

I.

Die Rotationsfläche der Tractrix mit geodätischen und Haupt-tangenten-Curven.

Modellirt von stud. math. J. Bacharach.

Nimmt man die Gleichung der Tractrix in der Form an*):

$$z = f(y) = c \log \frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y} - \sqrt{c^2 - y^2}$$

(siehe Salmon-Fiedler, höhere Curven, Art. 318), so entsteht durch Rotation um die z -Axe die Fläche

$$z = f(r),$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Die Fläche besitzt constantes negatives Krümmungsmass. Dies erkennt man am besten aus einer Eigenschaft der Rotationsflächen, wonach die Hauptkrümmungsradien in einem Punkte einer solchen gleich sind dem Krümmungsradius des Meridians in jenem Punkte und demjenigen Stück der Normale des Meridians, welches zwischen dem Punkte und der Rotationsaxe liegt. Der Krümmungsradius in einem Punkte eines Meridians ist

$$\rho = \frac{(1 + f'^2)^{3/2}}{f''}.$$

*) Bei den Rechnungen ist die Grösse c gleich 25 Einheiten angenommen worden.

Um die Länge n der Normalen zu finden, beachte man die Eigenschaft der Tractrix, dass der Abschnitt der Tangente in einem beliebigen Punkt derselben, gerechnet vom Berührungspunkt bis zum Schnittpunkt mit der Asymptote der Curve, die constante Länge c hat. Hiernach erhält man:

$$n = -c \left(-\frac{dr}{dz} \right) = \frac{c}{f'},$$

wo das erste negative Vorzeichen davon herrührt, dass die Normale im entgegengesetzten Sinne wie der Krümmungshalbmesser zu rechnen ist. Nun ist

$$f' = -\frac{\sqrt{c^2 - r^2}}{r}; \quad f'' = \frac{c^2}{r^2 \sqrt{c^2 - r^2}},$$

folglich

$$\varphi = \frac{c}{r} \sqrt{c^2 - r^2}; \quad n = -\frac{rc}{\sqrt{c^2 - r^2}},$$

also das Krümmungsmass

$$K = \frac{1}{\varphi n} = -\frac{1}{c^2}.$$

Die geodätischen Linien einer Rotationsfläche denke man sich auf eine zur Axe senkrechte Ebene projicirt, dann ist die Gleichung der Projection in Polarcordinaten r, φ (vergl. Joachimsthal, Anwendung der Differential-Rechnung etc. p. 142):

$$\varphi = \nu \int_c^r \frac{dr}{r \sqrt{1 + f'^2}},$$

wo ν eine Constante ist. Für unsere Fläche erhält man:

$$\varphi = \nu c \int_c^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{r^2 - \nu^2}} = \left[\frac{c}{\nu r} \sqrt{r^2 - \nu^2} \right]_c^r$$

$$\varphi = \frac{c}{\nu r} \sqrt{r^2 - \nu^2} - \frac{1}{\nu} \sqrt{c^2 - \nu^2}.$$

Die Bedeutung der Constanten ν ergibt sich folgendermassen: Es sei λ der Winkel, welchen die Projection der geodätischen Linie auf die xy -Ebene mit dem Grundkreis bildet (für welchen $r = c$), dann ist:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{dr}{cd\varphi} = \frac{r^2 \sqrt{r^2 - \nu^2}}{\nu c^2}$$

für $r = c$:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sqrt{c^2 - \nu^2}}{\nu};$$

daraus folgt:

$$\nu = c \cdot \cos \lambda$$

und

$$\varphi = \frac{1}{r \cos \lambda} \sqrt{r^2 - c^2 \cos^2 \lambda} - \operatorname{tg} \lambda.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung. Für jeden Werth von λ bekommt man eine geodätische Linie; jede solche Curve erreicht ihren höchsten Punkt für $r = c \cdot \cos \lambda$, für kleinere Werthe von r wird φ imaginär. Dagegen erhält man für jeden grösseren Werth ein gewisses φ und aus der Curven-

gleichung den zugehörigen Werth von z , so dass es nicht schwer ist, die Curven auch auf die Fläche zu übertragen. Um eine symmetrische Anordnung zu erzielen, wurde jede Curve um einen bestimmten Winkel gedreht, so dass die Maximalpunkte der einzelnen Curven auf demselben Meridian liegen. *)

Um zu der Differentialgleichung der Haupttangentialcurven zu gelangen, hat man die Bedingung dafür aufzustellen, dass der Krümmungshalbmesser des durch ein beliebiges Curvelement gelegten Normalschnitts unendlich gross ist. Unter Zuhilfenahme der Bezeichnungen von Gauss (siehe Joachimsthal §. 53, Ende) lautet diese Bedingung:

$$D \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + 2 D' \left(\frac{dr}{d\varphi} \right) + D'' = 0.$$

Aus den Gleichungen

$$z = f(r); \quad x = r \cdot \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi$$

$$\text{erhält man nun} \quad D = r f''; \quad D' = 0; \quad D'' = r^2 f''.$$

Setzt man diese Werthe ein und lässt den gemeinschaftlichen Factor r weg, so wird

$$f'' \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + f' r = 0;$$

$$d\varphi = \frac{c dr}{r \sqrt{c^2 - r^2}};$$

$$\varphi = \log \frac{c - \sqrt{c^2 - r^2}}{c}.$$

Auf dem Modelle ist eine Haupttangentialcurve so aufgetragen, dass sie mit einer geodätischen Linie eine Berührung eingeht. Wenn dies überhaupt möglich ist, so kann es vermöge der Natur der Haupttangentialcurven nur in einem Wendepunkte der geodätischen Linie geschehen, von deren Existenz wir uns also zu überzeugen haben.

Projicirt man eine Raumcurve auf eine Ebene, so werden im Allgemeinen aus den Wendepunkten der Raumcurve wieder Wendepunkte der ebenen Curve, und wir können uns daher darauf beschränken, für die Projectionen der geodätischen Linien die Wendepunkte zu berechnen.

Einem Wendepunkt entspricht ein unendlich grosser Krümmungshalbmesser; für einen solchen muss also sein:

$$r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\varphi^2} = 0.$$

*) Die auf dem Modell angebrachten Linien entsprechen den Werthen:
 $\lambda = 45^\circ; 60^\circ; 67^\circ; 72\frac{1}{2}^\circ; 75^\circ; 78\frac{1}{2}^\circ; 84\frac{1}{2}^\circ;$

für welche der Drehwinkel δ beziehungsweise ist:
 $\delta = 122^\circ,7; 80^\circ,8; 45^\circ; 0^\circ; 326^\circ,2; 259^\circ,25; 270^\circ.$

Berechnet man die hier auftretenden Differentialquotienten aus der Gleichung der geodätischen Linien und setzt dieselben ein, so erhält man eine Gleichung für r , welche nach einiger Reduction die Form annimmt:

$$r = c \sqrt{\cos \lambda}.$$

Auf dem Modelle wurde die Curve $\lambda = 72^\circ 20' 35''$ benutzt, für ihren Wendepunkt erhält man:

$$r = 13,8.$$