Mathematische Modelle

angefertigt

im mathematischen Institut der k. technischen Hochschule in München

unter Leitung von Prof. Dr. Brill.

XX.

Fläche von constantem negativen Krümmungsmaass nach L. Bianchi.

Von Th. Kuen,

Assistent an der technischen Hochschule in München.

Die Fläche von Bianchi hat durch ihre eigenthümliche Entstehungsweise und die daran anknüpfenden Untersuchungen von Herrn Sophus Lie (Archiv for Mathematik og Naturvidenskab 1878, 79, 80) allgemeineres Interesse erregt. Sie wurde desswegen im hiesigen mathematischen Institute von Herrn stud. math. J. Mack modellirt. Verschiedene Schnitte dieser Fläche zeigten nun eine Aehnlichkeit mit denjenigen, welche Herr E. Lenz in seiner Inauguraldissertation: „Ueber die Enneper'schen Flächen constanter negativer Krümmung", Göttingen 1879, von einer der letzteren entwarf, so dass der Gedanke nahe gelegt wurde, die Bianchi'sche Fläche besitze ebene Krümmungslinien und ihre Gleichung sei also nur ein specieller Fall der von Herrn A. Enneper in den Göttinger Nachrichten 1868 aufgestellten Gleichungsform. Diese Vermuthung bestätigte sich in der That.

Als Parameter u und v, durch welche man sich die Fläche gegeben denkt, sollen solche gewählt werden, welchen die 2 Schaaren der Krümmungslinien auf den Flächen entsprechen; $u =$ const. soll das System der ebenen Krümmungslinien ergeben. Herr Enneper gibt unter dieser Vorraussetzung in den Göttinger Nachrichten 1868 pag. 275 die Gleichungen der Flächen constanten negativen Krümmungsmasses an. Man kann sie auf folgende Form bringen:

144

$$x = \varrho \cos \varphi$$
$$y = \varrho \sin \varphi$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{C^2 - A^2}} \int \left(\frac{g\, d v_1}{d v} \right)^2 d v + \frac{g\, i}{\sqrt{C^2 - A^2}} \operatorname{tg} i (u_1 + v_1) \cdot \frac{g\, d v_1}{d v}.$$

Dabei ist:

$$\varrho = \frac{g}{\sqrt{C^2 - A^2}} \cdot \frac{1}{\cos i (u_1 + v_1)} \cdot \frac{1}{\sin \sigma}$$
$$\frac{d \varphi}{d u} = \frac{\sqrt{C^2 - A^2}}{g} \cdot \frac{1}{\sin^2 \sigma}$$
$$\frac{1}{\sin^2 \sigma} = C + A \cos 2 i u_1$$
$$g \frac{d v_1}{d v} = \sqrt{C - A \cos 2 i v_1}$$
$$g \frac{d u_1}{d u} = \operatorname{cotg} \sigma,$$

und σ bedeutet den Winkel, unter dem die Fläche von der Ebene einer planen Krümmungslinie geschnitten wird; die Constante $-\frac{1}{g^2}$ ist gleich dem Product der beiden Hauptkrümmungsradien.

Im Allgemeinen erhält man ϱ, φ und z als elliptische Functionen von u und v; im speciellen Falle können sich indess die elliptischen auf Kreisintegrale reduciren. Herr Enneper behandelt einen dieser Fälle auf pag. 276 seiner vorhin citirten Arbeit; er setzt $A = 0$ und erhält dadurch Schraubenflächen constanten negaliven Krümmungsmaasses mit einem System ebener Krümmungslinien. Eine zweite Gruppe von Flächen, welche unter $A = 0$ inbegriffen ist, scheint aber sowohl ihm, als auch Herrn Lenz entgangen zu sein. Es kann nämlich der Fall eintreten, dass σ nicht constant ist, trotzdem dass $A = 0$ gesetzt wurde; man erhält u_1 durch Integration einer Differentialgleichung und braucht nur die auftretende Integrationsconstante unendlich gross zu wählen. Es ist dies gerade diejenige Lösung, die durch Nullsetzen von B in der pag. 274 erhaltenen Formel:

$$\frac{1}{\sin^2 \sigma} = A' \cos 2 i u_1 - B i \sin 2 i u_1 + C \qquad \text{I.}$$

verloren geht, nämlich $A' = B$.

Für diesen speciellen Fall sollen nun die Gleichungen aufgestellt werden.

Unter Annahme jenes Ausdruckes für $\frac{1}{\sin^2 \sigma}$ bekommt man aus der allgemein gültigen Bedingungsgleichung (pag. 274):

$$\cos i(u_1 + v_1)\left[\frac{d^2 v_1}{d v^2} - \frac{1}{2 g^2}\,\frac{d}{d u_1}\left(\frac{1}{\sin^2\sigma}\right)\right] =$$

$$i \sin i(u_1 + v_1)\left[\frac{1}{g^2 .\, \sin^2\sigma} - \left(\frac{d v_1}{d v}\right)^2\right]$$

die folgende:

$$\cos i u_1 \left[\left(g^2 \frac{d^2 v_1}{d v^2} - B\right)\cos i v_1 + \left(\left(g\frac{d v_1}{d x}\right)^2 - C - A'\right) i \sin i v_1\right] =$$

$$\sin i u_1 \left[\left(g^2 \frac{d^2 v_1}{d v^2} + B\right)\sin i v_1 + \left(C - \left(g\frac{d v_1}{d v}\right)^2 - A'\right) i \cos i v_1\right].$$

Da nun u_1 von v_1 unabhängig ist, zerfällt die vorstehende Gleichung in die zwei:

$$-B + g^2 \frac{d^2 v_1}{d v^2} = \left\{A' + C - \left(g\frac{d v_1}{d v}\right)^2\right\} i \operatorname{tg} i v_1$$

$$B + g^2 \frac{d^2 v_1}{d v^2} = \left\{\left(g\frac{d v_1}{d v}\right)^2 - C + A'\right\} i \operatorname{cotg} i v_1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich durch Subtraction:

$$\left(g\frac{d v_1}{d v}\right)^2 = C - A' \cos 2 i v_1 - B i \sin 2 i v_1 \qquad \text{II.}$$

Werden mit diesen allgemeineren Ausdrücken für $\frac{1}{\sin^2\sigma}$ und $\frac{d v_1}{d v}$ die Rechnungen durchgeführt, welche Herr Enneper in seiner Arbeit vornimmt, um zu den Ausdrücken für ϱ, φ und z zu gelangen, so findet man, dass sich in denselben nichts ändert, als die Constante $C^2 - A^2$, welche in $C^2 - A'^2 + B^2$ übergeht. Natürlich hat man für $\frac{1}{\sin^2\sigma}$ und $g\frac{d v_1}{d v}$ dabei ihre Werthe den Gleichungen I. und II. zu entnehmen. Für den speciellen Fall $A' = B$, welcher nachher allein behandelt wird, ist die Durchführung dieser etwas mühsamen Rechnung nicht nöthig; man überzeugt sich leicht, dass hier die Ausdrücke für $\frac{1}{\sin^2\sigma}$ und $g\frac{d v_1}{d v}$ aus den von Herrn Enneper hierfür benützten dadurch hervorgehen, dass man $A = 0$ setzt, u_1 um eine unendlich grosse Constante c vermehrt und v_1 um sie vermindert, wobei $\frac{A}{2}\cdot c^{2ic} = A'$ sein soll. In den Formeln für ϱ, φ und z hat man dann nur $A = 0$ zu setzen, um die für diesen Fall gültigen zu haben.

Setzt man in I. und II. $A' = B$, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\sin^2\sigma} = C + A' e^{2u_1} = \left(g\frac{d u_1}{d u}\right)^2 + 1$$

$$g\frac{d v_1}{d x} = C - A' e^{-2v_1}.$$

Führt man zur Abkürzung die Bezeichnung ein:

$$U = e^{\frac{u}{g}\sqrt{C-1}}$$

$$V = e^{-\frac{v}{g}\sqrt{C}}$$

so erhält man durch Integration aus I^a und II^a:

$$e^{u_1} = \frac{2\sqrt{\frac{\lambda(C-1)}{A'}}\cdot U}{\lambda - U^2} \qquad I^b.$$

$$e^{-v_1} = \frac{2\sqrt{\frac{Ck}{A'}}\cdot V}{k+V^2}. \qquad II^b.$$

k und λ sind dabei Integrationsconstante.

Unter Benützung von I^b ergibt sich:

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{g}\cdot\frac{(\lambda - U^2)^2}{\lambda^2 + U^4 - 2\lambda\frac{2-C}{C}U^2} = \frac{C}{g}\sin^2\sigma,$$

und daraus durch Integration unter Berücksichtigung der Realitätsbedingung: $C \geqq 1$:

$$\varphi = \frac{u}{g} - \operatorname{arctg}\left\{\frac{U^2 - \lambda\frac{2-C}{C}}{\frac{2\lambda}{C}\sqrt{C-1}}\right\} + \varphi_0,$$

wo φ_0 die Integrationsconstante bedeutet, die der Allgemeinheit unbeschadet Null gesetzt werden darf.

Diese Gleichung lässt sich auch in der Form schreiben:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{u}{g} - \varphi\right) = \frac{C\,.\,U^2}{2\lambda\sqrt{C-1}} - \frac{2-C}{2\sqrt{C-1}}. \qquad III.$$

Mit Hülfe der Gleichungen I^b und II^b erhält man für ϱ den Ausdruck:

$$\varrho = 2g\sqrt{\lambda k}\sqrt{C-1}\cdot\frac{\sqrt{\lambda^2 + U^4 - 2\lambda\frac{2-C}{C}U^2}\cdot UV(k+V^2)}{kC(\lambda - U^2)^2V^2 + \lambda(C-1)(k+V^2)^2U^2}. \qquad IV.$$

Mit Benutzung von II^b wird:

$$\frac{1}{C}\int\left(\frac{g\,dv_1}{dv}\right)^2 dv = v + \mu + \frac{g}{C}\cdot\frac{\sqrt{A'k}}{k+V^2},$$

μ bedeutet die Integrationsconstante.

Für z erhält man also:

$$z = v + \frac{g}{C}\cdot\frac{\sqrt{A'k}}{k+V^2} + \mu + \qquad V.$$

$$+\frac{g}{\sqrt{C}}\cdot\frac{Ck(\lambda - U^2)^2V^2 - \lambda(C-1)(k+V^2)^2U^2}{Ck(\lambda - U^2)^2V^2 + \lambda(C-1)(k+V^2)^2U^2}\cdot\frac{\sqrt{(k+V^2)^2 - 4kV^2}}{k+V^2}$$

Durch die Gleichungen III., IV. und V. sind diejenigen Flächen constanten negativen Krümmungsmaasses mit einem System ebener Krümmungslinien bestimmt, welche durch Gleichsetzen von A' und B entstehen.*)

Aus der durch die Gleichungen III., IV. und V. definirten Flächengruppe erhält man nun die von Herrn L. Bianchi angegebene Fläche constanten negativen Krümmungsmaasses durch Annahme folgender speciellen Werthe für die daselbst auftretenden Constanten:

$$\left.\begin{aligned} C &= 1 \\ A' &= 4 \\ k &= 1 \\ \lambda &= 1 \\ \mu &= -g \end{aligned}\right\} \qquad \text{VI.}$$

Wenn man $C = 1$ setzt, so nehmen die Gleichungen III., IV. und V. die Form unbestimmter Ausdrücke an, welche jedoch leicht durch Entwicklung der Exponentialfunction in eine Reihe ausgewerthet werden können. Die Gleichung III. geht über in:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{u}{g} - \varphi\right) = \frac{u}{g}, \text{ oder:}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\frac{u}{g} - \frac{u}{g}\cos\frac{u}{g}}{\cos\frac{u}{g} + \frac{u}{g}\sin\frac{u}{g}}. \qquad \text{III}^{a}.$$

Für ϱ bekommt man folgenden Ausdruck:

$$\varrho = 4g\,\frac{e^{-\frac{v}{g}}\left(1 + e^{-\frac{2v}{g}}\right)}{\left(1 + e^{-\frac{2v}{g}}\right)^2 + \frac{4u^2}{g^2}e^{-\frac{2v}{g}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{u^2}{g^2}}. \qquad \text{IV}^{a}.$$

Eine Schwierigkeit bei der Bestimmung dieses Werthes von ϱ aus der in unbestimmter Form auftretenden Gleichung IV. macht nur der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen, da sich hier die zwei ersten Glieder der Entwicklung zerstören. Man schreibe:

$$\lambda^2 + U^4 - 2\lambda\frac{2 - C}{C}U^2 = \lambda^2 + U^4 - 4\lambda\frac{1 - C}{C}U^2 - 2\lambda U^2$$

und entwickle nun erst U^2 und U^4 in eine Reihe, von der die ersten drei Glieder zu nehmen sind.

Eine analoge Flächengattung von positivem Krümmungsmaass existirt nicht wegen der für diese bestehenden Realitätsbedingung (Bockwoldt, Inauguraldissertation, Göttingen 1878):

$$[A] \geqq [C] + 1.$$

Für z endlich erhält man den Ausdruck:

I

$$z = v - g + \frac{2g}{1+e^{-\frac{2v}{g}}} +$$

$$+ g \frac{\left(1+e^{-\frac{2v}{g}}\right)^2 - \frac{4u^2}{g^2} e^{-\frac{2v}{g}}}{\left(1+e^{-\frac{2v}{g}}\right)^2 + \frac{4u^2}{g^2} e^{-\frac{2v}{g}}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{2v}{g}}}{1+e^{-\frac{2v}{g}}} =$$

$$= v + \frac{2g\left(1-e^{-\frac{4v}{g}}\right)}{\left(1+e^{-\frac{2v}{g}}\right)^2 + \frac{4u^2}{g^2} e^{-\frac{2v}{g}}}. \qquad \text{V}^a.$$

Die Gleichungen III^a, IV^a und V^a sind aber identisch mit denjenigen Gleichungen, welche Herr Bianchi in seiner Inauguraldissertation: „Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle Elicoidi", Pisa 1879 (Auszug davon im XVI. Band der Mathem. Annalen) pag. 21 angibt; man hat nur zu setzen:

$$u = w \, . \, g$$

$$v = g \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}. \qquad \text{VII.}$$

Die Gleichungen III^a, IV^a und V^a nehmen dann die Gestalt an:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin w - w \cos w}{\cos w + w \sin w} \qquad \text{III}^b.$$

$$\varrho = \frac{2g \sin \psi}{1 + w^2 \sin^2 \psi} \cdot \sqrt{1+w^2} \qquad \text{IV}^b.$$

$$z = g \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} + \frac{2g \cos \psi}{1 + w^2 \sin^2 \psi}. \qquad \text{V}^b.$$

Will man die von Herrn Enneper in seiner Arbeit abgeleiteten Formeln an dieser Fläche prüfen, so muss man von der Form (α) der Gleichungen für φ, ϱ und z ausgehen, d. h. man muss statt der Parameter w und φ, wegen der auf pag. 260 der Enneper'schen Abhandlung gemachten Voraussetzung die Functionen u und v dieser Parameter einführen.

Das zweite nicht ebene System von Krümmungslinien wird wie bei allen Flächen constanter Krümmung mit einem System ebener Krümmungslinien durch Kugeln ausgeschnitten, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen. Die Kugeln haben hier die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + \left(z - g \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} - \frac{g}{\cos \psi}\right)^2 = \frac{g^2}{\cos^2 \psi}.$$

Was die Gestalt der Fläche anlangt, so folgt aus der Gleichung derselben unmittelbar, dass sie sowohl symmetrisch zur XY- als auch XZ-Ebene ist; denn setzt man statt ψ, $\pi - \psi$ beziehungsweise statt w, $-w$, so ändert nur z beziehungsweise y sein Vorzeichen. Die Krümmungslinie $w=0$, die in der XZ-Ebene liegt, ist zugleich eine Rückkehrkante der Fläche; denn mit Hülfe von 1^b ergibt sich:

$$\operatorname{cotg} \sigma = \frac{-g}{w} = g \frac{d u_1}{d u};$$

es nähert sich also mit w auch σ der Null, d. h. die XZ-Ebene ist Tangentialebene der Fläche; wegen der Symmetrie derselben in Bezug auf die letztgenannte Coordinatenebene muss daher die Krümmungslinie $w=0$ Rückkehrkante sein (eine Selbstberührungscurve kann es nicht sein, wie leicht zu zeigen ist). Von dieser Rückkehrkante ausgehend, umwindet die Fläche unendlich oft die Z-Axe in beiden Richtungen; zuerst entfernt sie sich von ihr, dann aber nähert sie sich ihr wieder und erreicht die Axe erst nach unendlich vielen Windungen. Dabei findet nach jeder halben Umwindung ein Selbstdurchsetzen der Fläche in der XZ-Ebene statt. Ausser den dadurch entstehenden ebenen Doppelcurven besitzt sie eine solche auch in der XY-Ebene. Für die Schnittcurve der letztern Coordinatenebene mit der Fläche hat man $z=0$ zu setzen, also:

$$0 = g \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} + \frac{2 \cos \psi}{1 + w^2 \sin^2 \psi}.$$

Wird diese Gleichung für das Werthepaar w_0, ψ_0 erfüllt, so geschieht dies auch für w_0, $\pi - \psi_0$. Diesen zwei Werthepaaren entsprechen nun dieselben Coordinaten $x y$, es fallen also die jenen Parametern zugehörigen Punkte zusammen, d. h. obige Schnittcurve ist eine Doppelcurve. Eine Ausnahme macht nur das Werthsystem $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$, w_0 beliebig, welches die vorstehende Gleichung ebenfalls erfüllt; hier fallen die 2 vorher verschiedenen Parameterpaare zusammen, d. h. diesem Werthsystem entspricht eine einfache Schnittcurve. Ausser den ebenen Doppelcurven besitzt sie auch noch eine räumliche Doppelcurve, wie aus der Betrachtung der Horizontalschnitte sofort folgt. Die Fläche besitzt ferner eine räumliche Rückkehrcurve. Es zeigt sich nämlich, dass die ebenen Krümmungslinien sobald $w > 1$ genommen wird, 2 Spitzen besitzen, weil zugleich die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = 0 \text{ und } \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

bestehen, wenn:

$$1 - w^2 \sin^2 \psi = 0$$

gewählt wird. Diese letzte Gleichung in Verbindung mit der Flächengleichung stellt also eine Rückkehrcurve dar; sie besitzt in den 2 Punkten $w = \pm 1$, in welchen sie die ebene Doppelcurve der XY-Ebene trifft, eine

Spitze, denn die Tangente ist daselbst horizontal, und die Fläche symmetrisch in Bezug auf die XY-Ebene. Von diesen Punkten ab verläuft die Doppelcurve isolirt. — Bei der Construction des Modelles wurde $g = 5^{\mathrm{cm}}$ gewählt.

München, im December 1881.