# Die sphärischen und ellipsoidischen Curven der Wellenfläche.

Von

**Dr. O. Böklen,**

Rector der Realanstalt in Reutlingen.

---

(Zu Serie VI, Nr. 4.)

Wenn man im Innern eines zweiaxigen Cristalls einen Punkt $O$ annimmt und auf den 3 durch denselben gehenden Elasticitätsaxen Strecken aufträgt gleich den entsprechenden Brechungscoefficienten, so erhält man die Axen eines Ellipsoids $E$ (erstes Ellipsoid nach Plücker, auch Ergänzungsellipsoid genannt), aus welchem die Wellenfläche abgeleitet wird, indem man in $O$ auf einem Centralschnitt von $E$ ein Perpendikel errichtet und auf demselben die Entfernungen $OM$ und $Om$ gleich den Halbaxen des Centralschnitts annimmt. Man hat nun folgendes System von Gleichungen:

$$1)\ \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1, \qquad 2)\ x^2+y^2+z^2=r,$$

$$3)\ \frac{r-a}{a}x^2+\frac{r-b}{b}y^2+\frac{r-c}{c}z^2=0, \qquad 4)\ \frac{a}{r-a}x^2+\frac{b}{r-b}y^2+\frac{c}{r-c}z^2=0,$$

$$5)\ (x^2+y^2+z^2)(ax^2+by^2+cz^2)-\{a(b+c)x^2+b(c+a)y^2+c(a+b)z^2\}+abc=0,$$

$$6)\ \frac{y^2}{z^2}+\frac{c(a-b)}{b(a-c)}=0,\ x=0, \qquad 7)\ \frac{z^2}{x^2}+\frac{a(b-c)}{c(b-a)}=0,\ y=0,$$

$$8)\ \frac{x^2}{y^2}+\frac{b(c-a)}{a(c-b)}=0,\ z=0.$$

1) ist die Gleichung von $E$, 2) diejenige einer concentrischen Kugel, 3) wird erhalten aus 1) und 2) durch Subtraction und stellt einen Kegel

vor, welcher $E$ in einer sphärischen Linie schneidet, da die Schnittlinie von 1) und 3) auch auf 2) liegt. 4) ist die Gleichung des Ergänzungskegels, welche in 5) entwickelt ist, wo man für $r$ seinen Werth aus 2) gesetzt hat. 6), 7), 8) sind die Gleichungen der Focallinien der Ergänzungskegel und werden aus 4) abgeleitet, indem man der Reihe nach $r = a$ und $x = 0$, $r = b$ und $y = 0$, $r = c$ und $z = 0$ setzt. Da $a > b > c$ angenommen wird, so ist nur das mittlere Paar reell, die beiden andern Paare von Focallinien in der $yz$- und $xy$-Ebene sind imaginär. Die Ebene des Centralschnitts berührt immer zwei von den Kegeln 3) zugleich, die Berührungslinien sind die Axen der Schnittcurve, weil die Tangenten in ihren Endpunkten auch Tangenten der sphärischen Curven sind und also senkrecht auf ihnen stehen. Da nun die Mantellinien der Ergänzungskegel 4) senkrecht stehen auf den Tangential-Ebenen der Kegel 3) und $OM$ und $Om$ gleich den Halbaxen der Schnittcurven dieser Ebenen mit $E$ sind, so ist 4), wenn man für $r$ seinen Werth aus 2) setzt und ebenso 5) die Gleichung der Wellenfläche. Man setze $OM^2 = r_1$, $Om^2 = r_2$, so erhält man nach 4):

$$9)\quad \frac{a}{r_1 - a}x^2 + \frac{b}{r_1 - b}y^2 + \frac{c}{r_1 - c}z^2 = 0,$$

$$10)\quad \frac{a}{r_2 - a}x^2 + \frac{b}{r_2 - b}y^2 + \frac{c}{r_2 - c}z^2 = 0,$$

$$a > r_1 > b > r_2 > c.$$

Jede dieser Gleichungen für sich stellt einen Kegel vor, dessen Focallinien obigen Gleichungen entsprechen. Da letztere $r$ nicht enthalten, so sind alle diese Kegel confocal. Die reellen Focallinien 7) sind die optischen Axen der Wellenfläche oder die secundären optischen Axen des Cristalls. Weil aber noch zwei Paare imaginärer Focallinien vorhanden sind, so kann man hieraus schliessen, dass die Wellenfläche im Ganzen drei Paare optischer Axen hat, wovon eines reell und die beiden andern imaginär sind. Die Hauptschnitte der Fläche in den Axen-Ebenen bestehen je aus einem Kreis und einer Ellipse, deren Durchschnittspunkte ebenfalls die optischen Axen bestimmen; da sie nur in der $xz$-Ebene reell sind, und in den beiden anderen Ebenen imaginär, so wird man auch hierdurch auf die Annahme imaginärer optischer Axen der Wellenfläche geleitet.

Zwei confocale Kegel, welche sich schneiden, sind orthogonal; ihre Durchschnittslinie ist durch 9) und 10) bestimmt, woraus sich die Winkel bestimmen lassen, die sie mit den Axen einschliesst. Zwei Paare confocaler Kegel bilden auf dem äussern Mantel ein Viereck $MM'M''M'''$ und auf dem innern $mm'm''m'''$; nun lässt sich leicht beweisen, dass die nach 2 Gegenecken gezogenen Halbmesser der Wellenfläche gleiche Winkel einschliessen, d. h. dass die Winkel $MOM''$ und $M'OM'''$, oder $mOm''$ und

107

$m'Om'''$ einander gleich sind. Die Gegenseiten $MM'$ und $M''M'''$ sind sphärische Curven, weil jede einem Kegel angehört, dem ein bestimmter Werth von $r$ entspricht; ebenso sind in dem andern Viereck die Gegenseiten $m'm''$ und $m'''m'$ sphärische Curven. Hieraus folgt, dass $MM'' = M'M'''$ und $mm'' = m'm'''$ d. h.

Zwei Paare sich rechtwinklig schneidender Kegel, deren reelle Focallinien die secundären optischen Axen (und deren imaginäre Focallinien also die imaginären optischen Axen) der Wellenfläche sind, schneiden aus einem Mantel derselben ein Viereck aus, in welchem die Entfernungen von je 2 Gegenecken einander gleich sind.

Die Linie $mm'$, welche auf demselben Kegel liegt, wie die sphärische $MM'$ des äussern Mantels, ist eine ellipsoidische, da sie zugleich auf dem Ellipsoid 11) $ax^2 + by^2 + cz^2 = \frac{abc}{r}$ liegt, welches dem Polarisations- (oder zweiten Ellipsoid nach Plüker) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ähnlich ist. Die übrigen Seiten der beiden Vierecke, $m''m'''$, $M'M''$, $M'''M'$, sind gleichfalls ellipsoidische Linien, da jeder Kegel, welcher den einen Mantel in einer sphärischen Curve schneidet, den andern in einer ellipsoidischen Curve trifft. Durch Combination von 2) und 4) erhält man die Gleichungen der sphärischen Curven und von 4) und 11) der ellipsoidischen. Das Nähere über diese Curven ist in 2 Aufsätzen des Verfassers (Zeitschrift von Schlömilch, Kahl und Cantor, Thl. XXIV u. XXV) enthalten.

Bei der Construction des Modells (von einem Zögling der hiesigen Oberrealschule) wurden eine Zeichnung mit den beiden Arten von Curven zu Grunde gelegt und nach denselben die Durchschnitte und Schablonen gemacht. Auf den drei Hauptschnitten der Fläche sind hierauf die Endpunkte der Curven und die Schnittlinien der confocalen Kegel bestimmt worden. Dann wurde der Kreis gezeichnet, in welchem die Fläche von einer Ebene berührt wird und zuletzt die Linien selbst, mit Benützung des obigen Satzes von der gleichen Entfernung der Gegenecken. Durch jeden Punkt $A$ z. B. auf dem äusseren Mantel gehen zwei Curven, welche mit den Hauptschnitten des Octanten 4 Vierecke bilden, also ergibt sich ein solcher Punkt als der Durchschnitt von 4 Kreisbögen, die von den Ecken des Octanten und dem Endpunkt der optischen Axe aus beschrieben werden, denn die 3 Kreise in den Hauptebenen sind sphärische Curven und die Ellipsen ellipsoidische. Es ist also insbesondere der Abstand eines Punktes vom Endpunkte der optischen Axe gleich der Entfernung der Durchschnittspunkte von den beiden durch ihn gehenden Curven mit dem Kreis $b$ und der Ellipse $ac$ in der $xz$-Ebene, d. h. in der Ebene der (reellen) optischen Axe. Nach denselben Regeln sind die Linien auf dem inneren Mantel construirt.

## Die Nabelpunkte der Wellenfläche.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien hat E. Combescure (Annali di Matematica T. II 1859 S. 278) gegeben und F. Brioschi (ibid. S. 285) weiter behandelt. Die geometrische Bestimmung der Hauptkrümmungs-Mittelpunkte, sowie der Richtung der Krümmungslinien in einem Punkt der Fläche fand M. Mannheim (Comptes rendus, 1867 pag. 170 und 268). Allein für die Zeichnung dieser Linien hat man noch keine Anhaltspunkte, nur die Nabelpunkte lassen sich leicht auffinden, nach einer Gleichung, die Mannheim aus seiner Construction ableitete (Comptes rendus, 5. Mai 1879); es sind demzufolge 8 solche Punkte vorhanden, welche in den Hauptschnitten liegen und zwar 4 in der $xy$-Ebene auf dem äusseren Mantel, welche der Gleichung $\frac{x^4}{y^4} = \frac{b^3}{a^3} \frac{a-c}{b-c}$ und 4 andere auf dem inneren Mantel in der $yz$-Ebene, welche der Gleichung $\frac{z^4}{y^4} = \frac{b^3}{c^3} \frac{a-c}{a-b}$ entsprechen. Diese Punkte sind auf dem Modell durch kleine Kreise bezeichnet, und es mag, um Verwechslungen zu verhüten, noch bemerkt werden, dass unter $x$-Axe diejenige verstanden ist, auf welcher die Strecken $\sqrt{b}$ und $\sqrt{c}$ liegen, während auf der $y$-Axe die Entfernungen $\sqrt{c}$ und $\sqrt{a}$ und auf der $z$-Axe $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ abgeschnitten sind.

Mai 1880.