

299

Modell der Catalan'schen Minimalfläche.

Modellirt

unter Leitung von Prof. Dr. E. R. Neovius

von

J. Laine,

Studirender an der Universität zu Helsingfors.

(17. Serie, Nr. 4.)

Zu den Flächen, welche eine Schaar reeller Curven zweiten Grades enthalten, gehört die sogenannte Catalan'sche Fläche (Comptes rendus, Tome 41, pag. 1019, 1855: Journal de l'Ecole polytechnique, cah. 37, pag. 160—163, 1858), welche als Specialfall enthalten ist unter den von Enneper zuerst untersuchten Minimalflächen mit einer Schaar reeller Parabeln (vergl. hierüber H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen Bd. I., pag. 331 und Martin Peche, Analytische Bestimmung aller Minimalflächen, welche eine Schaar reeller Parabeln enthalten, Göttingen 1891).

Bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems erhält man die Gleichungen der Catalan'schen Fläche, indem man der in den Weierstrass'schen Ausdrücken für die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Minimalfläche auftretenden Grösse $\mathfrak{F}(s)$ den Werth:

$$\mathfrak{F}(s) = ia \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^3} \right)$$

beilegt, worin a eine reelle Constante bezeichnet. Setzt man:

$$s = r e^{qi} \text{ und } v = \frac{1}{r} - r,$$

so ergeben sich die Coordinaten eines Punktes der Fläche in der Form:

$$x = a \sin 2\varphi - 2a\varphi + \frac{1}{2}av^2 \cos 2\varphi,$$

$$y = -a \cos 2\varphi - \frac{1}{2}av^2 \cos 2\varphi,$$

$$z = 2av \sin \varphi.$$

Wenn der unabhängigen Veränderlichen φ in den Gleichungen 1) ein constanter Werth beigelegt wird, so ergibt sich eine auf der Fläche gelegene Parabel; die Annahme $v = \text{const.}$ entspricht dagegen einer orthogonalen Trajectorie der Schaar von Parabeln.

Dem Werthe $v = 0$ entspricht die Curve:

$$\begin{aligned}x &= a \sin 2\varphi - 2a\varphi, \\y &= -a \cos 2\varphi, \\z &= 0.\end{aligned}$$

Dieselbe ist eine in der xy -Ebene liegende Cycloide, welche durch das Rollen eines Kreises mit dem Radius a längs der Geraden $y = -a$ als entstanden gedacht werden kann. Die Ebene der Cycloide ist eine Symmetrie-Ebene der Minimalfläche und die Cycloide selbst eine geodätische Linie derselben.

Die Scheitel der auf der Fläche gelegenen Parabeln liegen auf der Cycloide und die Ebenen derselben stehen senkrecht auf die Ebene der Cycloide. Die Axe jeder der Parabeln liegt in der Ebene der Cycloide und fällt mit der Geraden zusammen, welche den Mittelpunkt des rollenden Kreises mit dem betreffenden Punkte der Cycloide verbindet. Der Parameter der dem Werthe φ entsprechenden Parabel hat den Werth:

$$p = 4a \sin^2 \varphi.$$

Für $\varphi = n\pi$ ($n = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$) wird $p = 0$ und es ergibt sich statt eigentlicher Parabeln eine Schaar von parallelen, doppelt zu denkenden Geraden auf der Fläche. Für $\varphi = \frac{2n+1}{2}\pi$ erhält der Parameter seinen

grössten Werth $p = 4a$. Die Ebenen der entsprechenden Parabeln sind der yz -Ebene parallele Symmetrie-Ebenen der Fläche. Die Parabeln selbst sind geodätische Linien und deren Axen Symmetrieaxen der Fläche.

Die Catalan'sche Minimalfläche ist periodisch. Sie besteht aus congruenten Flächenschalen, welche theilweise längs der auf der Fläche liegenden Geraden mit einander zusammenhängen.

Bei der durch Vermittelung paralleler Normalen herbeigeführten Abbildung der Minimalfläche auf die Kugel vom Radius Eins entsprechen den Parabeln auf der Fläche die durch den Nord- und Südpol der Kugel gehenden Meridianen, und den orthogonalen Trajectorien der Parabelschaar die Parallelkreise der Kugel. Es ist hieraus ersichtlich, dass die Parabeln und ihre Schaar orthogonaler Trajectorien ein isometrisches Curvensystem auf der Fläche bilden. Das Modell veranschaulicht, soweit dies durch ein Modell überhaupt möglich ist, die Eigenschaft der Fläche, durch dieses isometrische Curvensystem in unendlich kleine Quadrate getheilt werden zu können.

Bei der Construction des Modells wurde der Constanten a der Werth
 $a = 12 \text{ mm}$

beigefügt. Auf jeder der beiden Flächenschalen, aus welchen das Modell
zusammengesetzt ist, sind 18 der auf der Fläche liegenden Parabeln zur
Anschauung gebracht.

Helsingfors, im Mai 1892.