Mathematische Modelle

angefertigt

im mathematischen Institut der k. technischen Hochschule in München

unter Leitung von Prof. Dr. Brill.

XXIV.

Ueber die Krümmungslinien der Röhrenschraubenfläche.

Von Th. Kuen,

Assistent an der k. technischen Hochschule in München.

Die Röhrenschraubenfläche ist die Enveloppe der Kugeln von constantem Radius, deren Mittelpunkte auf einer Schraubenlinie liegen. Die Gleichung der letzteren sei:

$$\left\{\begin{aligned} x &= a\cos\varphi \\ y &= a\sin\varphi \\ z &= b\varphi. \end{aligned}\right. \qquad \text{I.)}$$

Die Gleichung der die Röhrenschraubenfläche erzeugenden Kugel wird dann:

$$F(\varphi) \equiv (x - a\cos\varphi)^2 + (y - a\sin\varphi)^2 + (z - b\varphi)^2 - r^2 = 0. \qquad \text{II.)}$$

Zwei benachbarte Kugeln schneiden sich nach einem Kreise, welcher zugleich der Enveloppe angehört. Dieser Kreis wird bestimmt durch $F(\varphi) = 0$ und die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} = a\sin\varphi\,(x - a\cos\varphi) - a\cos\varphi\,(y - a\sin\varphi) - b\,(z - b\varphi) = 0. \qquad \text{III.)}$$

Durch Elimination von φ aus den Gleichungen II. und III. würde sich die Gleichung der Fläche in gewöhnlicher Form ergeben. Einfacher ist es jedoch, die Coordinaten der Punkte der Fläche durch zwei Parameter auszudrücken; als den einen wählen wir φ, der andere werde mit u bezeichnet. Die Curven $\varphi = \text{Const.}$ auf der Fläche sind nach dem Vorhergehenden Kreise, deren Ebenen senkrecht zur Schraubenlinie (I.)

168

stehen. Um ein möglichst bequemes Curvennetz auf der Fläche zu erhalten, soll ein solcher Parameter u gewählt werden, welchem das System der auf der Fläche liegenden Schraubenlinien zugehört. Dies ist aber der Fall, wenn für $u = \text{Const.}$, $x^2 + y^2 = \text{Const.}$ wird, d. h. wenn aus dem Ausdrucke für $\varrho^2 = x^2 + y^2$ nach Einführung von u φ verschwunden ist. Aus den Gleichungen II. und III. folgt nun:

$$[\varrho^2 + a^2 - r^2 + (z - b\varphi)]^2 + 4\,(z - b\varphi)^2 = 4\,a^2\,\varrho^2;$$

φ verschwindet aus diesem Ausdruck dann und nur dann, wenn $z - b\varphi = f(u)$ gesetzt wird. Dabei ist gleichgültig, welcher Function von u, $z - b\varphi$ gleichgesetzt wird; indess hängt die Einfachheit der Flächengleichung davon ab. Drückt man x und y als Function von $z - b\varphi$ aus, so erhält man:

$$x = \left(a + \sqrt{r^2 - \frac{a^2 + b^2}{a^2}(z - b\varphi)^2}\right)\cos\varphi + (z - b\varphi)\frac{b}{a}\sin\varphi$$

$$y = \left(a + \sqrt{r^2 - \frac{a^2 + b^2}{a^2}(z - b\varphi)^2}\right)\sin\varphi - (z - b\varphi)\cdot\frac{b}{a}\cos\varphi.$$

Am einfachsten werden diese Gleichungen, wenn man oben vorkommende Wurzel gleich dem Parameter u setzt; man erhält dann die Gleichung der Röhrenschraubenfläche in der Form:

$$\left\{\begin{aligned} x &= (a + u)\,.\cos\varphi + b\sin\varphi\sqrt{\frac{r^2 - u^2}{a^2 + b^2}} \\ y &= (a + u)\,.\sin\varphi - b\cos\varphi\sqrt{\frac{r^2 - u^2}{a^2 + b^2}} \\ z &= b\,.\,\varphi + a\sqrt{\frac{r^2 - u^2}{a^2 + b^2}}. \end{aligned}\right. \qquad \text{IV.)}$$

Für diese Fläche sollen nun die Krümmungslinien aufgesucht werden. Aus dem bekannten Joachimsthal'schen Satze über ebene Krümmungslinien folgt, dass die Kreise $\varphi = \text{Const.}$ die eine Schaar der Krümmungslinien der Fläche bilden; denn die Ebenen der Kreise schneiden die Fläche unter einem constanten Winkel, nämlich einem Rechten. Das zweite System, welches das erste orthogonal durchschneidet, kann auf folgende Weise gefunden werden.

Der Ausdruck für das Linienelement wird:

$$ds^2 = du^2\frac{r^2}{r^2 - u^2} + 2\,du\,.\,d\varphi\,.\frac{b\,r^2}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{r^2 - u^2}} + d\varphi^2\,.\left\{(a + u)^2 + \frac{b^2\,(r^2 - u^2 + a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}\right\}. \qquad \text{V.)}$$

Da ein Glied $du\,.\,d\varphi$ vorkommt, so stehen die beiden Curvenschaaren $u = \text{Const.}$ $\varphi = \text{Const.}$ nicht aufeinander senkrecht. Statt des Parameters u können wir aber leicht einen andern u' einführen, so dass der

Coefficient von $du'.d\varphi$ in dem Ausdruck für das Linienelement verschwindet; man gebe diesem die Form:

$$ds = \left\{du \frac{r}{\sqrt{r^2 - u^2}} + \frac{b\,r\,d\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right\}^2 +$$

$$d\varphi^2 . \left\{(a+u)^2 + \frac{a^2 + b^2 - u^2}{a^2 + b^2}\right\};$$

und setze:

$$du' = du \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - u^2}} + \frac{b\,r}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,d\varphi. \qquad \text{VI.)}$$

Die Curven $u' =$ Const. stehen dann senkrecht zu $\varphi =$ Const. und sind daher die zweite Schaar der Krümmungslinien; ihre Differentialgleichung erhält man durch Nullsetzen der rechten Seite in der Gleichung (VI.). Durch Integration ergibt sich als Gleichung für die zweite Schaar von Krümmungslinien, wenn c die Integrationsconstante bezeichnet:

$$-u = r \sin \frac{b(\varphi + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad \text{VII.)}$$

Diese Curven sind congruent und gehen ineinander über durch Verschieben der Fläche in sich selbst; es genügt also, diejenige Curve zu construiren, für welche $c = 0$ gesetzt wird. Die geometrische Bedeutung von u, die man nothwendig kennen muss, um das Curvennetz der Kreise und Schraubenlinien $\varphi =$ Const., $u =$ Const. auf der Fläche herzustellen, ist nicht schwer zu ermitteln. Aus den Gleichungen IV. ergibt sich:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = (a+u)^2 + \frac{b^2}{a^2 + b^2}(r^2 - u^2)$$

und für $\varphi = 0$:

$$z = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{r^2 - u^2};$$

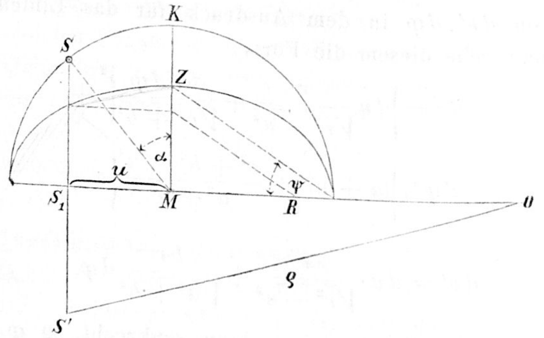
ϱ bedeutet dabei den Radius der dem Parameter u zugehörigen Schraubenlinie. Nennt man den Winkel, den die Kreisebene $\varphi = 0$ mit der XY-Ebene einschliesst, ψ, so ist:

$$\sin \psi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

und wenn man in umstehender Figur $MK = r$, $MO = a$, $MZ = r \sin \psi$, $S_1 S' = MR$ macht, so folgt, dass der Parameter u die Strecke MS_1 ist, d. h. die Differenz der Projection von ϱ, Radius der durch u bestimmten Schraubenlinie, auf die zugehörige Gerade OM. Ferner ist:

$$\sin \alpha = \frac{-u}{r} = \sin \frac{\varphi b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ also:}$$

$$\alpha = \frac{\varphi b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad \text{VIII.)}$$



Nimmt man also die Kreise so an, dass ihre Mittelpunkte constanten Abstand haben, so hat man auch auf den Kreisen selbst gleiche Theile abzutragen, die Grösse eines einzelnen Theiles berechnet sich aus der Gleichung VIII.

Für das Modell der Röhrenschraubenfläche wurden für a, r und b die folgenden Werthe gewählt:

$$\left\{\begin{aligned} a &= 63^{\mathrm{mm}} \\ r &= 25^{\mathrm{mm}} \\ b &= 21{,}3^{\mathrm{mm}}. \end{aligned}\right.$$

München, im December 1881.