

Die rationale Raumcurve 4. Ordn. zweiter Species.*)

Von

Dr. K. Rohn,

Professor der Mathematik an der kgl. technischen Hochschule zu Dresden.

(Zu Serie XXI.)

§. 1. Die Parameterdarstellung der R_4 ; die Transformationen der R_4 in sich.

Die Raumcurven 4. Ordnung erscheinen entweder als Schnittlinien von zwei Flächen 2. Grades (erste Species), oder als theilweise Schnittlinie einer Fläche zweiten und einer Fläche dritten Grades, die ausserdem noch zwei windschiefe Geraden gemein haben (zweite Species). Diese letzteren Curven sollen hier näher untersucht werden, und wir werden sie weiterhin kurz als R_4 bezeichnen. Zunächst ist ersichtlich, dass die Fläche 2. Grades durch die R_4 ein Hyperboloid sein muss, wenn sie überhaupt reell sein soll. Sodann erkennt man, dass die Erzeugenden der einen Schaar des Hyperboloides in je drei, die der andern Schaar nur in je einem Punkte von der R_4 getroffen werden, was ja einfach daraus folgt, dass die R_4 zusammen mit zwei Erzeugenden der einen Schaar den vollen Durchschnitt einer Fläche zweiter und einer Fläche dritter Ord. ausmacht.

*) In vorliegender Abhandlung sind die Eigenschaften der R_4 kurz zusammengestellt, deren Kenntniss zur geometrischen Vorstellung der R_4 und zum Verständniss ihrer Modelle besonders werthvoll erscheint. Sehr viele interessante Eigenschaften der R_4 mussten hier unberücksichtigt bleiben aus Mangel an Raum, und verweise ich deshalb auf folgende Arbeiten: Cremona, Annali di Matem. v. 4, 1861: Intorno la curva gobba del 4. ord. etc. Weyr, Sitzungsberichte der Wiener Acad. Bd. 71, 72 u. 73: Ueber die Abbildung der rationalen Raumcurve 4. Ord. auf einen Kegelschnitt. Adler, Ebenda Bd. 86: Ueber Raumcurven 4. Ord. zweiter Art. Jolles, Dissertation: Die Raumcurve 4. Ord. zweiter Species synthetisch behandelt. Study, Sitzungsberichte der kgl. sächs. Ges. der Wissensch. 1886: Ueber die Raumcurve 4. Ord. Stahl, Crelle's Journal Bd. 101: Die Raumcurve 4. Ord. zweiter Art etc. Rohn, Sitzungsberichte der kgl. sächs. Ges. d. Wissensch. 1890 u. 1891: Die Raumcurve 4. Ord. zweiter Species, erster u. zweiter Theil. Meyer, Math. Annal. Bd. 29: Ueber die mit der Erzeugung der Raumcurve 4. Ord. zweiter Species verknüpften algebraischen Prozesse.

Bekanntlich hat die Schnitteurve 6. Ord. zweier solcher Flächen 6 scheinbare Doppelpunkte, die Ordnung ihrer abwickelbaren Fläche ist 18. Trennen sich zwei windschiefe Geraden von jener Curve ab, wobei eine Curve mit 6 wirklichen Doppelpunkten entsteht, so bleibt eine R_4 übrig, die hiernach 3 scheinbare Doppelpunkte besitzen und deren abwickelbare Fläche von der 6. Ord. sein muss. Jede ebene Schnitteurve dieser abwickelbaren Fläche ist rational, da die R_4 es ist, und da sie von der 6. Ord. ist und in den 4 Schnittpunkten der R_4 mit der Ebene Spitzen besitzt, so muss sie noch 6 weitere Doppelpunkte aufweisen. Die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche einer R_4 ist also von der 6. Ord. Die Zahl der Schmiegungebenen der R_4 durch einen beliebigen Raumpunkt beträgt 6, in Uebereinstimmung mit der Klasse jenes ebenen Schnittes. Die Doppelcurve kann keine Doppelpunkte aufweisen, sie hat vier Spitzen und das Geschlecht 0, wie wir später finden werden. Daraus folgt dann weiter, dass durch jeden Raumpunkt 4 Schmiegungebenen der Doppelcurve gehen, so dass diese Curve von derselben Art ist, wie die Curven, die aus der R_4 durch reciproke Raumtransformation entstehen. Noch mag gleich erwähnt werden, dass die abwickelbare Fläche der R_4 mit dem Hyperboloid 4 Erzeugende gemein hat. Denn beide Flächen müssen eine Curve 12. Ord. gemein haben, wozu die R_4 doppelt gezählt zu rechnen irt; eine Tangente der R_4 aber, die das Hyperboloid noch in einem weiteren Punkt trifft, ist eine Erzeugende desselben.

Sehen wir jetzt von der Betrachtung der R_4 als Schnitteurve ab und suchen wir eine Parameterdarstellung für ihre Punkte zu gewinnen. Zu diesem Zwecke legen wir das Hyperboloid zu Grunde, das wir als Träger der R_4 betrachten und kurz mit H benennen wollen. Auf H können wir nun jeden Punkt dadurch fixiren, dass wir die beiden Erzeugenden, die ihn enthalten, angeben. Um die Erzeugenden zu bestimmen, stellen wir eine Parametervertheilung in folgender Weise her. Auf einem beliebigen ebenen Schnitte von H legen wir irgend drei Punkten die Parameter 0, 1, ∞ bei, während der Parameter jedes weiteren Punktes gleich dem Doppelverhältniss sein soll, das er mit den Punkten 0, 1, ∞ bildet. (Fig. 1.) Dabei ist bekanntlich das Doppelverhältniss der Punkte:

$$(k \ 0 \ 1 \ \infty) = \frac{k-0}{k-\infty} : \frac{1-0}{1-\infty} = \frac{\sin k \ S \ 0}{\sin k \ S \ \infty} : \frac{\sin 1 \ S \ 0}{\sin 1 \ S \ \infty},$$

wo S jeder Punkt des Kegelschnittes sein kann.

Jede Erzeugende von H erhält dann denjenigen Parameter, den ihr Schnittpunkt auf der genannten ebenen Schnitteurve aufweist. Zu jedem Parameter gibt es also eine Erzeugende aus jeder Schaar, beide Erzeugende schneiden sich in jenem ebenen Schnitt.

Die Erzeugenden von H , die die R_4 nur je ein Mal treffen, sollen Erzeugende der ersten Schaar heissen und ihr Parameter mit k bezeichnet werden; die Erzeugenden der zweiten Schaar treffen

die R_4 je drei Mal, ihr Parameter sei zur Unterscheidung mit k' bezeichnet.

Die R_4 ist jetzt auf H unmittelbar durch eine ein—dreideutige Beziehung zwischen den Parametern k und k' bestimmt, also:

$$1) (\alpha_0 k^3 + 3\alpha_1 k^2 + 3\alpha_2 k + \alpha_3) k' + (b_0 k^3 + 3b_1 k^2 + 3b_2 k + b_3) = 0.$$

Auf jeder Erzeugenden k liegt ein Curvenpunkt, der von einer Erzeugenden k' ausgeschnitten wird, deren Parameter sich aus der Gleichung 1) ergibt; auf jeder Erzeugenden k' liegen drei Curvenpunkte, die von Erzeugenden k ausgeschnitten werden, deren Parameter wiederum aus der Gleichung 1) folgen. Um nun die Gleichung 1) auf ihre einfachste Gestalt zu reduciren, haben wir die Parameter k und k' linearen Transformationen zu unterwerfen, und wir fragen uns zunächst, was eine solche Transformation für eine Bedeutung für das Hyperboloid H hat. Gibt es auf H eine doppelte Parametervertheilung k, k' respective λ, λ' , die durch die lineare Beziehung:

$$2) k = \lambda, k' = \frac{\alpha \lambda' + \beta}{\gamma \lambda' + \delta},$$

mit einander verknüpft sind, so ist der geometrische Zusammenhang beider zu untersuchen. Ist die Parametervertheilung k, k' die oben geschilderte, so schneiden sich Erzeugende mit gleichem Parameter auf einem Kegelschnitt, dessen Gleichung also $k = k'$ ist. Auch jede lineare Gleichung: $(\alpha k + \beta) - (\gamma k' + \delta) k' = 0$ stellt einen Kegelschnitt auf H dar, denn diese Curve schneidet jede Erzeugende der ersten Schaar $k = \text{const.}$ und ebenso jede Erzeugende der zweiten Schaar $k' = \text{const.}$ in je einem Punkte. Führt man aber in diese Gleichung die neuen Parameter λ, λ' ein, so geht sie in: $\lambda = \lambda'$ über; d. h. die neue Parametervertheilung ist von der gleichen Beschaffenheit wie die ursprüngliche, indem sich wieder Erzeugende mit gleichem Parameter in den Punkten eines Kegelschnittes treffen; der Kegelschnitt ist aber von dem früheren verschieden.

Durch Anwendung der Transformation 2) kann nun die Gleichung 1) auf folgende Form gebracht werden:

$$3) \left| \begin{array}{l} \lambda_1' \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} + \lambda_2' \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 0 \\ f(\lambda_1, \lambda_2) \equiv A \lambda_1^4 + 4B \lambda_1^3 \lambda_2 + 6C \lambda_1^2 \lambda_2^2 + 4D \lambda_1 \lambda_2^3 + E \lambda_2^4, \end{array} \right.$$

wobei die Parameter k, k', λ, λ' durch: $\frac{k_1}{k_2}, \frac{k_1'}{k_2'}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_1'}{\lambda_2'}$ ersetzt sind, um eine homogene Gleichungsform zu erhalten. Es ergibt sich nämlich:

$$\begin{aligned} A &= \alpha a_0 + \gamma b_0 \\ B &= \alpha a_1 + \gamma b_1 = \beta a_0 + \delta b_0 \\ C &= \alpha a_2 + \gamma b_2 = \beta a_1 + \delta b_1 \\ D &= \alpha a_3 + \gamma b_3 = \beta a_2 + \delta b_2 \\ E &= \beta a_3 + \delta b_3 \end{aligned}$$

und aus den mittleren Gleichungen folgt:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = \begin{vmatrix} a_1 - a_0 b_1 - b_0 \\ a_2 - a_1 b_2 - b_1 \\ a_3 - a_2 b_3 - b_2 \end{vmatrix}.$$

Es ergibt sich also der Satz: Zu jeder R_4 auf einem Hyperboloide gibt es einen bestimmten Kegelschnitt von der Beschaffenheit, dass jede Parametervertheilung auf H , die sich auf ihn stützt (indem jede Erzeugende den gleichen Parameter erhält, wie ihr Punkt auf dem Kegelschnitt) für die R_4 eine Gleichung:

$$3) \quad k_1' \frac{\partial f}{\partial k_1} + k_2' \frac{\partial f}{\partial k_2} = 0$$

liefert, wo $f(k_1, k_2)$ ein Ausdruck 4. Grades ist. Hierbei ist an Stelle von $\lambda_1 : \lambda_2$ und $\lambda_1' : \lambda_2'$ wieder $k_1 : k_2$ und $k_1' : k_2'$ geschrieben worden. Dieser Kegelschnitt soll Hauptkegelschnitt und seine Ebene Hauptebene heissen, ersteren bezeichnen wir kurz mit K , letztere mit Δ .

Die Gleichung $f(k_1, k_2) = 0$ bestimmt vier Parameter $k_1 : k_2$ und damit vier Erzeugende der ersten Schaar. Auf einer beliebigen Erzeugenden der zweiten Schaar mit dem Parameter $k_1' : k_2'$ liegen ausser den vier Punkten, für die $f(k_1, k_2) = 0$ ist, noch ein Punkt $k_1 : k_2 = k_1' : k_2'$, der dem Hauptkegelschnitt angehört, und drei Punkte der R_4 , deren Parameter der Gleichung 3) genügen. Nun stellt aber die Gleichung 3) nichts anderes als die erste Polare des Punktes $k_1' : k_2'$ in Bezug auf die vier Punkte $f(k_1, k_2) = 0$ dar, so dass man folgenden Satz gewinnt:

Wählt man auf einem Hyperboloid beliebig einen Kegelschnitt und ein Quadrupel von Erzeugenden der ersten Schaar, construirt dann auf jeder Erzeugenden der zweiten Schaar die erste Polare ihres Punktes auf jenem Kegelschnitt in Bezug auf jenes Quadrupel, so erhält man eine allgemeine Raumcurve 4. Ord. zweiter Species. Umgekehrt kann jede derartige Curve auf eine und nur auf eine Art so erzeugt werden.

Wählt man auf dem Hyperboloid den gleichen Kegelschnitt wie vorher und das Quadrupel von Erzeugenden der zweiten Schaar, das den Kegelschnitt in den gleichen Punkten trifft, wie das vorhergenannte, construirt dann auf jeder Erzeugenden der ersten Schaar die lineare Polare ihres Punktes auf dem Kegelschnitt in Bezug auf das Quadrupel, so gewinnt man die gleiche Raumcurve wie vorher. Dieser Satz folgt ganz ebenso, indem man die Gleichung 3) als lineare Polare eines Punktes $k_1 : k_2$ in Bezug auf das Quadrupel $f(k_1', k_2') = 0$ aufasst.

Die Gleichung 4. Grades $f(k_1, k_2) = 0$ kann durch geeignete Parameterbestimmung auf dem Hauptkegelschnitt noch eine wesentliche Vereinfachung erfahren. (Fig. 2.) Die vier Punkte $f(k_1, k_2) = 0$ auf dem Hauptkegelschnitt seien r_1, r_2, r_3, r_4 , sie bilden ein vollständiges Viereck mit den Diagonalknoten a, b, c . Den Schnittpunkten von ab mit K ertheilen wir die Parameter 0 und ∞ , dem einen Schnittpunkt von ac und K den Parameter $+1$. Je die Parameter $+1$, dann ergibt sich für den andern der Parameter -1 . Je zwei Punkte von K , die auf einer Geraden durch c liegen, haben jetzt Parameter, die entgegengesetzt gleich sind, etwa $+k$ und $-k$, da sie mit den Punkten 0, ∞ harmonisch liegen. Je zwei Punkte von K , die auf einer Geraden durch b liegen, haben Parameter, die reciproke Werthe von einander sind, etwa k und $\frac{1}{k}$, da sie mit den Punkten $+1, -1$ harmonisch liegen. Die Punkte r_1, r_2, r_3, r_4 erhalten also vier Parameter,

$$q, -q, -\frac{1}{q}, \frac{1}{q},$$

so dass sich für die R_4 die Gleichungen ergeben:

$$4) \quad \begin{cases} k_1' \frac{\partial f}{\partial k_1} + k_2' \frac{\partial f}{\partial k_2} = 0 \\ f(k_1, k_2) \equiv k_1^4 + 6a k_1^2 k_2^2 + k_2^4. \end{cases}$$

Bezeichnen wir wie vorher das Diagonaldreieck in der Hauptebene Δ mit abc und den Pol von Δ in Bezug auf H mit d , so bilden diese 4 Punkte ein Polartetraëder von H . Jedes Paar Gegenkanten desselben bestimmt eine geschaart involutorische Raumtransformation, wobei sich je zwei Punkte wechselseitig entsprechen, deren Verbindungslinie die Gegenkanten trifft und die durch diese harmonisch getrennt werden. Einer Erzeugenden des Hyperboloides entspricht dabei wieder eine Erzeugende der gleichen Schaar. Bei der geschaart-involutorischen Transformation mit den Axen ab und cd entsprechen sich je zwei Erzeugende k und $-k$, bei der Transformation mit den Axen ac und bd je zwei Erzeugende k und $\frac{1}{k}$, bei der Transformation mit den Axen ad und bc je zwei Erzeugende k und $-\frac{1}{k}$. Bei derartigen Transformationen werden beide

Schaaren von Erzeugenden in gleicher Weise transformirt, so dass dem Punkte k, k' auf H die Punkte $-k, -k'$ resp. $\frac{1}{k}, \frac{1}{k'}$, resp. $-\frac{1}{k}, -\frac{1}{k'}$ entsprechen. Hierdurch ändern sich aber die Gleichungen 4) nicht und also auch nicht die durch sie dargestellte Raumcurve.

Jede rationale Raumcurve 4. Ord. geht durch drei geschaart-involutorische Raumtransformationen, deren Axen drei Paar Gegenkanten eines Tetraëders bilden, in sich über.

Eine Seite dieses Tetraäders, das zugleich Polartetraeder des Hyperboloides durch die R_4 ist, fällt mit der Hauptebene zusammen und die drei Eckpunkte in ihr sind die Diagonalschnidet. Der vierte Eckpunkt ist der Pol der Hauptebene; die drei Tetraederkanten durch ihn sind Doppelkanten der R_4 .

Die Kante cd trifft ersichtlich H in den Punkten $k=0, k'=\infty$ und $k=\infty, k'=0$, die offenbar der R_4 angehören; ebenso schneidet die Kante bd die R_4 in den Punkten $k=+1, k'=-1$ und $k=-1, k'=+1$, und die Kante ad in den Punkten $k=+i, k'=-i$ und $k=-i, k'=+i$.

§. 2. Die Projection der R_4 auf die Hauptebene.

Schneiden wir H mit einer andern Fläche 2. Gr., so erhalten wir eine Raumeurve 4. Ord. erster Species, deren Parametergleichung offenbar sowohl in k als in k' vom 2. Gr. sein muss. Hat diese Fläche 2. Gr. mit H das Polartetraeder $abcd$ gemeinsam, so geht sie durch die oben erwähnten geschaart-involutorischen Raumtransformationen ebenfalls in sich über und also thut dieses auch ihre Schnitteurve mit H , d. h. die Parametergleichung derselben darf sich nicht ändern, wenn man k, k' gleichzeitig mit $-k, -k'$ oder mit $\frac{1}{k}, \frac{1}{k'}$ vertauscht. Soll endlich diese Fläche

2. Gr. auch noch durch die vier Punkte $r_1 r_2 r_3 r_4$ der Hauptebene hindurchgehen, so muss ihre Schnitteurve mit H ersichtlich die Gleichung:

$$5) \quad \varphi \equiv k_1'^2 (k_1^2 + b k_2^2) + k_2'^2 (b k_1^2 + k_2^2) + 2(3a - b) k_1' k_2' k_1 k_2 = 0$$

besitzen, wo b eine beliebige Constante ist. In der That geht dieselbe für $k_1' : k_2' = k_1 : k_2$ in $f(k_1 k_2) = 0$ über, wie es sein muss. Auf jeder Erzeugenden k der ersten Schaar liegen nun vier Punkte, nämlich der Schnittpunkt mit K , für den $k' = k$ ist, der mit R_4 und die beiden Schnittpunkte mit der Curve $\varphi = 0$. Da nun:

$$k_1' \frac{\partial f}{\partial k_1} + k_2' \frac{\partial f}{\partial k_2} \equiv k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial k_1'} + k_2 \frac{\partial \varphi}{\partial k_2'}$$

ist, was man aus 5) sofort erkennt, so liegen die genannten vier Punkte auf der Erzeugenden k harmonisch.

Auf einem Hyperboloid erhält man also eine R_4 , indem man zu den Punkten eines festen Kegelschnittes auf den durch sie verlaufenden Erzeugenden der einen Schaar die conjugirten Punkte in Bezug auf eine feste Fläche 2. Gr. aufsucht. Die Ebene des festen Kegelschnittes muss dabei den nämlichen Pol für beide Flächen aufweisen.

Unter den Flächen 2. Gr., die das Polartetraeder $abcd$ besitzen und durch die Punkte $r_1 r_2 r_3 r_4$ gehen, gibt es auch drei Ebenenpaare,

resp. mit den Axen da, db, dc . Für sie gilt ebenfalls der vorstehende Satz, der dann so ausgesprochen werden kann. Construirt man auf den Erzeugenden der einen Schaar eines Hyperboloides zu den auf ihnen liegenden Punkten eines festen Kegelschnittes die vierten harmonischen Punkte in Bezug auf zwei feste Ebenen, die durch den Pol der Ebene des festen Kegelschnittes gehen, so erhält man eine Raumcurve 4. Ord. zweiter Species. Jede R_4 lässt sich in dreifacher Weise so erzeugen.

Alle Flächen 2. Gr. mit dem Polartetraeder $abcd$ und den gemeinsamen Punkten $r_1 r_2 r_3 r_4$ bilden ein Flächenbündel (die Punkte r_i zählen als gemeinsame Punkte doppelt). Das Flächenbündel schneidet auf jeder Raumgeraden involutorische Punktreihen aus, deren einer Doppelpunkt in der Hauptebene liegt, da diese doppelt gezählt dem Flächenbündel zugehört. Unter den Flächen des Bündels gibt es eine, die die Raumgerade berührt, ihr Berührungspunkt ist der andere Doppelpunkt der Involution und theilt mit dem Punkt in der Hauptebene jedes Punktepaar desselben harmonisch. Daraus folgt: Wählt man aus einem Bündel von Flächen 2. Gr. mit gemeinsamem Polartetraeder und vier gemeinsamen Punkten in einer seiner Seitenebenen ein Hyperboloid aus, dann bilden die Berührungspunkte seiner Erzeugenden einer Schaar mit den Flächen des Bündels eine Raumcurve 4. Ord. zweiter Species.

Wir wollen jetzt die R_4 aus dem Pol der Hauptebene auf diese projiciren, dann erhalten wir eine ebene Curve 4. Ord. C_4 mit drei Doppelpunkten in abc , die K in den Punkten $r_1 r_2 r_3 r_4$ berührt. In den Doppelpunkten besitzen die Curvenäste der C_4 Wendepunkte, denn die Curvenpunkte gehören derart zu vier und vier zusammen, dass die bezüglichen Vierecke die Punkte abc zu Diagonalknoten haben. Den Erzeugenden der ersten Schaar von H , die eine ein-eindeutige Beziehung zwischen der R_4 und dem Hauptkegelschnitt vermitteln, entsprechen bei der Projection die Tangenten von K . Die Raumcurven 4. Ord. erster Species, die durch die Gleichung 5) dargestellt sind, projiciren sich als Kegelschnitte durch die Punkte $r_1 r_2 r_3 r_4$. Den Sätzen für die R_4 entsprechen demnach folgende Sätze für ihre Projection C_4 .

Bestimmt man auf allen Tangenten des Hauptkegelschnittes zum Berührungspunkt den conjugirten in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt durch $r_1 r_2 r_3 r_4$, so erhält man die Projectioncurve C_4 der R_4 . Speciell kann zur Construction eines der drei Geradenpaare durch die Punkte $r_1 r_2 r_3 r_4$ verwendet werden. Oder auch: Die Kegelschnitte eines Büschels durch $r_1 r_2 r_3 r_4$ berühren die Tangenten des Hauptkegelschnittes, der dem Büschel angehört, in den Punkten der C_4 .

§. 3. Vier Curvenpunkte in einer Ebene. Die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche von R_4 .

In §. 1 war bereits angegeben, dass die Parameter-Gleichung einer ebenen Schnitteurve des Hyperboloides die Form hat:

$$(\alpha k + \beta) - (\gamma k + \delta) k' = 0.$$

Ein Punkt dieses Kegelschnittes liegt auf der R_4 , wenn zwischen k und k' die Relation:

$$4) \quad k' (k^3 + 3 a k) + (3 a k^2 + 1) = 0$$

besteht. Für die ersten Parameter der Schnittpunkte der R_4 mit unserer Ebene gilt also die Gleichung:

$$k^4 \alpha + k^3 (\beta + 3 a \gamma) + 3 a k^2 (\alpha + \delta) + k (3 a \beta + \gamma) + \delta = 0.$$

Bezeichnen wir die ersten Parameter der vier Schnittpunkte der R_4 mit einer Ebene durch $\kappa, \lambda, \mu, \nu$, so haben wir:

$$\begin{aligned} \beta + 3 a \gamma &= -\alpha (\kappa + \lambda + \mu + \nu), \quad 3 a \beta + \gamma = -\alpha (\kappa \lambda \mu + \lambda \mu \nu + \mu \nu \kappa + \nu \kappa \lambda) \\ 3 a (\alpha + \delta) &= \alpha (\kappa \lambda + \mu \nu + \kappa \mu + \lambda \nu + \kappa \nu + \lambda \mu), \quad \delta = \alpha \kappa \lambda \mu \nu. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich durch Vergleichung des 1., 3. und 5. Coefficienten:

$$6) \quad 3 a (\kappa \lambda \mu \nu + 1) = \kappa \lambda + \mu \nu + \kappa \mu + \lambda \nu + \kappa \nu + \lambda \mu.$$

Vier Punkte der R_4 , deren erste Parameter der Gleichung 6) genügen, liegen in einer Ebene; ihre zweiten Parameter ergeben sich aus 4). Oder vier Erzeugende der ersten Schaar, deren Parameter der Gleichung 6) genügen, treffen die R_4 in vier Punkten einer Ebene.

Es wird weiterhin immer von dem ersten Parameter der Punkte der R_4 die Rede sein, und da dieser ja völlig zur eindeutigen Bestimmung eines Curvenpunktes genügt, wollen wir ihn schlechthin als seinen Parameter bezeichnen; Gleichung 4) bestimmt dann jedesmal den zweiten Parameter.

Werden die vier Parameter einander gleich $\kappa = \lambda = \mu = \nu$, so hat die Ebene vier aufeinanderfolgende Punkte mit der R_4 gemein, solche Ebenen heissen Wendeberührebenen und ihre Berührungspunkte Wendepunkte. Die R_4 besitzt vier Wendepunkte $w_1 w_2 w_3 w_4$, deren Parameter der Gleichung:

$$7) \quad \kappa^4 - \frac{2}{a} \kappa^2 + 1 = 0 \quad \text{genügen.}$$

Für eine Schmiegungebene werden drei Parameter einander gleich und es besteht zwischen ihrem Berührungspunkt κ und ihrem weiteren Schnittpunkt λ die Relation:

$$8) \quad (a \kappa^3 - \kappa) \lambda + (a - \kappa^2) = 0.$$

Für die beiden Berührungspunkte x und λ einer Doppeltangentialebene endlich gilt die Gleichung:

$$9) \quad x^2(1 - 3a\lambda^2) + (\lambda^2 - 3a) + 4x\lambda = 0.$$

Aus der Gleichung 9) erkennen wir, dass jede Tangente der R_4 von zwei weiteren Curventangenten getroffen wird. Die Tangente im Punkte x wird nun speciell von zwei zusammenfallenden Tangenten getroffen, wenn sie die Curve R_4 in einem Punkte λ schneidet. Eine solche Tangente liegt natürlich auf dem Hyperboloid H , da sie ja drei Punkte mit der R_4 gemein hat. Zwischen ihrem Berührungspunkt x und ihrem Schnittpunkt λ muss die Relation 9) bestehen, die in diesem Falle eine rein quadratische Gleichung in Bezug auf λ sein muss. Es gibt demnach vier Tangenten der R_4 , die sie nochmals schneiden, es sind berührende Trisecanten, die wir mit $E_1 E_2 E_3 E_4$ bezeichnen wollen. Ihre Berührungspunkte $b_1 b_2 b_3 b_4$ ergeben sich aus der Gleichung:

$$10) \quad a(x^4 + 1) + (1 - 3a^2)x^2 = 0,$$

und ihre einfachen Punkte $p_1 p_2 p_3 p_4$ aus der Gleichung:

$$\lambda = -\frac{2x}{1 - 3ax^2} = -\frac{x^2 - 3a}{2x},$$

oder:

$$11) \quad 4a(\lambda^4 + 1) - (27a^4 - 18a^2 - 1)\lambda^2 = 0.$$

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen der R_4 und der Doppelcurve D_6 ihrer abwickelbaren Fläche näher ins Auge fassen. Zu diesem Zwecke bilden wir die einzelnen Gebilde auf die Hauptebene ab. Die Punkte der R_4 sind vermöge der Erzeugenden der ersten Schaar von H eindeutig auf die Punkte des Hauptkegelschnittes K bezogen. Den Tangenten der R_4 können wir dann die Tangenten in den entsprechenden Punkten von K zuordnen. Hierbei werden den Schnittpunkten zweier Tangenten der R_4 , d. h. den Punkten der Doppelcurve, die Schnittpunkte der bezüglichen Tangenten von K entsprechen. Da auf jeder Tangente von R_4 zwei Punkte der Doppelcurve D_6 liegen, so liegen auf jeder Tangente von K zwei Punkte ihrer Bildcurve, die durch L bezeichnet sein mag. Die Bildcurve L unserer Doppelcurve D_6 ist also von der 2. Ordnung.

Es soll nun die Gleichung von L abgeleitet werden. In der Hauptebene kann jeder Punkt durch zwei Parameter fixiert werden, indem man ihm die Parameter der beiden Tangenten aus ihm an den Hauptkegel schnitt beilegt. Die Berührungspunkte zweier Tangenten der R_4 , die sich in einem Punkte von D_6 schneiden, besitzen aber die gleichen Parameter, wie die bezüglichen Tangenten von K , die sich in dem entsprechenden Punkte von L schneiden. Die Parametergleichung des Kegelschnittes L ist also die Gleichung 9).

Die Punkte der R_4 und der D_6 sind aufeinander zwei-zweideutig bezogen, indem auf jeder Tangente von R_4 zwei Punkte von D_6 liegen und durch jeden Punkt von D_6 zwei Tangenten von R_4 gehen. Diese Curven sind indessen eindeutig auf die Kegelschnitte K und L bezogen und die erwähnte zwei-zweideutige Beziehung kann also an diesen Kegelschnitten studirt werden, was jetzt geschehen soll.

Zunächst erhält man die Schnittpunkte von K und L , indem man in 9) $\lambda = \lambda$ setzt; L schneidet also K in den vier Punkten, welche den Wendepunkten $w_1 w_2 w_3 w_4$ der R_4 entsprechen. Hieraus erhellt, dass die Tangente in einem der Wendepunkte von R_4 von einer unendlich nahen Tangente getroffen wird, abgesehen von der zweiten sie schneidenden Tangente. Die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche der R_4 trifft diese in den Wendepunkten, dieselben sind Pinch-points für die Fläche. Denn aus den Punkten der L , die im Innern von K liegen, gibt es keine Tangenten an K ; die entsprechenden Curvenstücke der Doppelcurve verlaufen also isolirt. Es tritt dieses Verhalten bei abwickelbaren Flächen bekanntlich stets in den Wendepunkten der Rückkehrcurve ein. Die Doppelcurve durchschneidet in den Wendepunkten der R_4 das Hyperboloid H .

Den gemeinsamen Tangenten von K und L entsprechen die Tangenten von R_4 , die auf H liegen und die R_4 nochmals schneiden; in diesen Geraden $E_1 E_2 E_3 E_4$ durchschneidet die abwickelbare Fläche das Hyperboloid. Indem so die abwickelbare Fläche ihre eigene Rückkehrcurve in den Punkten $p_1 p_2 p_3 p_4$ durchschneidet, werden diese zu Spitzen der Doppelcurve. In diesen Punkten stützt sich die Doppelcurve auf das Hyperboloid. Ausser den Punkten w_i und p_i hat die Doppelcurve keine Punkte mit H gemein, und da diese insgesamt für zwölf Punkte zählen, findet man wieder, dass dieselbe von der 6. Ord. ist. Nun besitzt die D_6 vier Spitzen, aber keine Doppelpunkte und ihr Geschlecht ist 0, sie muss ja das gleiche Geschlecht wie L zeigen. Daraus folgert man weiter, dass die D_6 von der 4. Klasse ist, d. h. dass sie durch jeden Raumpunkt vier Schmiegungsebenen schiekt. Die Doppelcurve D_6 ist also von der gleichen Art, wie die Curven, die man aus R_4 durch reciproke Raumtransformation erhalten kann; es wird später gezeigt werden, dass es wirklich eine solche Transformation gibt, welche die R_4 in die D_6 überführt.

Die Kegelschnitte K und L werden uns weiterhin bei der gestaltlichen Discussion von grossem Nutzen sein.

§. 4. Die gestaltlichen Verhältnisse.

Unsere seitherigen Untersuchungen basiren auf der Gleichung:

$$f(k_1 k_2) \equiv k_1^4 + 6a k_1^2 k_2^2 + k_2^4,$$

die wir in §. 1 abgeleitet haben. Sie wurde gewonnen unter der An-

329 335

nahme, dass die vier Punkte der R_4 in der Hauptebene reell sind, doch gilt dieselbe Gleichung auch noch, wenn diese vier Punkte paarweise imaginär werden. Denn dann besitzt das von ihnen bestimmte Viereck ein Paar reelle Gegenseiten und zwei Paar conjugirt imaginäre, so dass seine drei Diagonalepunkte abc reell bleiben. Jene Gleichung liefert in der That für die vier Punkte $r_1 r_2 r_3 r_4$ in der Hauptebene die Parameter:

$$\pm \sqrt{-3a \pm \sqrt{9a^2 - 1}},$$

diese Punkte sind nur für: $-\frac{1}{3} > a > -\infty$ alle reell, sonst aber alle vier imaginär.

Die vier Wendepunkte $w_1 w_2 w_3 w_4$ haben die Parameter:

$$\pm \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - a^2}}}{\sqrt{a}},$$

die offenbar nur für: $0 < a < 1$ reell sind.

Die vier Berührungspunkte $b_1 b_2 b_3 b_4$ der tangirenden Trisecanten erhalten nach 10) die Parameter:

$$\pm \frac{\sqrt{3a^2 - 1 \pm \sqrt{(9a^2 - 1)(a^2 - 1)}}}{\sqrt{2a}}.$$

Die berührenden Trisecanten sind also reell für: $\infty > a > 1$ und für: $0 > a > -\frac{1}{3}$, für die andern Werthe dagegen imaginär.

Jede Tangente der R_4 trägt zwei Punkte der Doppelcurve, in denen sie von andern Tangenten geschnitten wird. Die Parameter der beiden Tangenten von R_4 , die eine gegebene Tangente λ treffen, sind nach 9):

$$x = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{3} \sqrt{(1 - 3a^2)\lambda^2 + a(\lambda^4 + 1)}}{1 - 3a\lambda^2}.$$

Gibt es reelle berührende Trisecanten, so kann dieser Werth reell und imaginär werden, da die darin auftretende Wurzelgrösse für diese Trisecanten verschwindet. In ihren Berührungspunkten b_i stossen also reelle und isorirt verlaufende Stücke der Doppelcurve aneinander, wie wir schon am Ende des vorigen Paragraphen sahen.

Sind die berührenden Trisecanten imaginär, so sind noch zwei Fälle zu unterscheiden. Ist $1 > a > 0$ und schreiben wir die Wurzelgrösse in der Form:

$$\lambda^2(1 + 3a)(1 - a) + a(\lambda^2 - 1)^2,$$

dann ist dieser Ausdruck stets positiv; jede Tangente der R_4 wird von zwei andern reellen Tangenten geschnitten. Ist dagegen: $-\frac{1}{3} > a > -\infty$, so sind beide Theile des vorstehenden Ausdruckes negativ; es wird überhaupt keine reelle Tangente der R_4 von einer andern reellen getroffen. Aber auch conjugirt imaginäre Tangenten von R_4 können sich nicht schneiden, denn setzt man in Gleichung 9) für x und λ conjugirt imaginäre Werthe, so sind $x\lambda$ und $(x - \lambda)^2$ reell und positiv und alle Coeffi-

cienten werden für negative Werthe von a positiv; die Gleichung 9) kann also nicht erfüllt sein. In dem letzteren Falle gibt es also weder reelle noch isolirt verlaufende Theile der Doppelcurve.

Wir werden jetzt die einzelnen Fälle, die sich darbieten, der Reihe nach untersuchen und dabei die gegenseitige Lage der Kegelschnitte K und L zur Discussion benutzen. Das gemeinsame Polardreieck abc können wir so transformiren, dass zwei Seiten zu den Axen der Kegelschnitte und die dritte Seite zur unendlich fernen Geraden wird. Zugleich kann der Hauptkegelschnitt K durch die Transformation in einen Kreis verwandelt werden.

Erster Fall: $\infty > a > 1$. Raumcurve 4. Ord. vom Typus I. (Fig. 3 u. 4.)

Die Raumcurve 4. Ord. besitzt hier vier reelle berührende Trisecanten, dagegen sind ihre Wendepunkte und ihre Punkte in der Hauptebene imaginär. Die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche unserer Raumcurve ist reell und besitzt vier reelle Spitzen.

Da K und L keine Punkte, aber vier Tangenten gemein haben, müssen sie die in der Fig. 3 angegebene Lage besitzen (in der Figur ist $a = \frac{2 + \sqrt{5}}{3}$ gewählt). Aus der Figur können wir nun die ganzen Verhältnisse von R_4 und D_6 ablesen. Die vier Punkte b_i , deren Tangenten auf H liegen, theilen die R_4 in vier Theile, nämlich: $b_1 1 b_2$, $b_2 \infty b_3$, $b_3 - 1 b_4$, $b_4 0 b_1$. Die Tangenten des ersten und dritten Curvenstückes liegen im Innern von H , wenn wir den Pol d der Hauptebene als im Innern liegend betrachten, keine derselben wird von einer andern Curventangente getroffen. Die Tangenten des zweiten und vierten Curvenstückes liegen ausserhalb H , jede Tangente des einen trifft zwei Tangenten des andern. Auf der Doppelcurve liegen die vier Spitzen in der Reihenfolge $p_1 p_2 p_4 p_3$. Man kann auch leicht übersehen, wie sich gleichzeitig correspondirende Punkte von R_4 und D_6 bewegen, d. h. Punkte, die auf der nämlichen Erzeugenden der abwickelbaren Fläche liegen.

Die Trisecanten (Erzeugende der zweiten Schaar) durch die Curvenpunkte 0 und ∞ schneiden die R_4 nicht mehr in reellen Punkten, dagegen schneiden die Trisecanten durch die Punkte $+1$ und -1 noch zwei weitere reelle Punkte aus der R_4 aus. Da die Tangenten in den Punkten b_i die Grenze bilden zwischen den Trisecanten mit einem und denen mit drei reellen Curvenpunkten, so liegen die Punkte der Curvenstücke $p_1 b_2 1 b_1 p_2$ und $p_3 b_4 - 1 b_3 p_4$ auf Trisecanten der zweiten, die der Curvenstücke $p_4 \infty p_1$ und $p_2 0 p_3$ auf Trisecanten der ersten Art. Es ist das durch die schematische Figur 4 erläutert, worin die Trisecanten (Erzeugenden der zweiten Schaar von H) parallel genommen sind.

Zweiter Fall: $1 > a > 0$. Raumcurve 4. Ord. vom Typus II.
(Fig. 5 u. 6.)

Die Raumcurve besitzt jetzt vier reelle Wendepunkte, wogegen die berührenden Trisecanten und die Curvenpunkte in der Hauptebene imaginär sind. Alle Trisecanten haben nur einen reellen Punkt mit der R_4 gemein. Die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche ist reell, aber sie besitzt keine reelle Spitze mehr; alle Tangenten der R_4 liegen ausserhalb H und jede wird von zwei weiteren geschnitten. Die Doppelcurve trifft R_4 und damit H in den 4 Punkten $w_1 w_2 w_3 w_4$, welche Pinchpoints der abwickelbaren Fläche sind. Die Stücke $w_1 w_2$ und $w_3 w_4$ der Doppelcurve verlaufen isolirt, die Stücke $w_1 w_3$ und $w_2 w_4$ reell. Bewegt sich ein Punkt der Doppelcurve über das Stück $w_1 w_3$, so bewegen sich die Berührungspunkte der von ihm ausgehenden Erzeugenden auf R_4 von w_1 über w_2 nach w_3 resp. von w_1 über w_4 nach w_3 . Analog verhält es sich mit dem Stück $w_2 w_4$ der Doppelcurve. In der Figur 5 ist $a = \frac{\sqrt{5}}{3}$ gewählt.

Dritter Fall: $0 > a > -\frac{1}{3}$. Derselbe führt wieder zu einer Raumcurve vom Typus I.

Vierter Fall: $-\frac{1}{3} > a > -\infty$. Raumcurve 4. Ord. vom Typus III.

Die Raumcurve besitzt weder reelle Wendepunkte noch reelle berührende Trisecanten, dagegen sind ihre Punkte in der Hauptebene reell. Jede Trisecante schneidet dieselbe in drei reellen Punkten. Die Doppelcurve ist gänzlich imaginär; alle Tangenten der R_4 liegen im Innern von H . Eine beliebige Trisecante zerschneidet die R_4 in drei Stücke derart, dass jede Trisecante mit jedem der drei Stücke einen Punkt gemein hat. Jede Ebene schneidet eine solche R_4 mindestens in zwei reellen Punkten.

Wollte man nämlich annehmen, eine Ebene schneide die R_4 in 4 imaginären Punkten, deren Parameter: $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, $\gamma + i\delta$, $\gamma - i\delta$ sein mögen — sie müssen paarweise conjugirt imaginär sein — so würde die Gleichung 6) übergehen in:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 4\alpha\gamma = 3a[1 + (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)],$$

$$\text{oder: } (\alpha + \gamma)^2 + \beta^2 + \delta^2 + (\alpha\gamma + 1)^2 = 3a(\beta^2\delta^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2) + (1 + 3a)(1 + \alpha^2\gamma^2).$$

Eine solche Gleichung hat aber keinen Sinn, da links positive und rechts negative Grössen stehen.

Raumcurven 4. Ord. vom Typus V.

Wir haben seither den Hauptkegelschnitt als reell angenommen und so drei verschiedene Fälle erhalten, wir können aber auch K imaginär werden lassen. Damit werden auch die Punkte $r_1 r_2 r_3 r_4$ paarweise conjugirt imaginär; zwei Gegenseiten des von ihnen gebildeten Vierecks werden reell, zwei Paar Gegenseiten werden conjugirt imaginär, das Diagonaldreieck abc bleibt wiederum reell. Selbstverständlich wird im vorliegenden Falle auch das Hyperboloid H und die Raumcurve 4. Ord. imaginär. Wir brauchen diesen Fall nicht besonders zu behandeln, er kann vielmehr aus dem Typus III durch reciproke Raumtransformation abgeleitet werden. Die D_6 geht, wie wir gesehen haben, durch reciproke Raumtransformation in eine Raumcurve 4. Ord. zweiter Species über, die R_4 geht dabei gleichzeitig in die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche der neuen Raumcurve 4. Ord. über. Wir erkennen daraus das folgende. Die Raumcurve 4. Ord. vom Typus V ist ganz imaginär, auch das zugehörige Hyperboloid und natürlich ihre abwickelbare Fläche, deren Doppelcurve jedoch reell ist. Keine Tangente der Doppelcurve trifft eine andere.

Raumkurven 4. Ord. vom Typus IV.

Es erübrigt uns nun noch, den Fall zu behandeln, in dem von den 4 Punkten der R_4 in der Hauptebene zwei reell und zwei conjugirt imaginär sind. Das Diagonaldreieck abc ist hier nicht mehr reell. Die Gleichung für die Punkte $r_1 r_2 r_3 r_4$ nimmt hier die Form an:

$$4') f(k_1 k_2) \equiv k_1^4 + 6a k_1^2 k_2^2 - k_2^4 = 0.$$

In Folge dessen werden hier auch die Gleichungen 7, ..., 11, eine Abänderung erfahren, die indessen leicht anzugeben ist. Bedenkt man, dass die Gleichung 4, in 4', übergeht, wenn man $\frac{k_1}{k_2}$ durch $j \frac{k_1}{k_2}$ und a durch ja ersetzt, so sieht man, dass durch die gleiche Substitution auch die Gleichungen 7, ..., 11, in die entsprechenden Gleichungen 7', ..., 11', übergehen, die jedoch nicht erst angeschrieben werden sollen. Von den Wendepunkten werden jetzt ebenfalls zwei reell, wie sich aus 7', ergibt; ihre Parameter sind:

$$\pm \frac{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + a^2}}}{\sqrt{a}}.$$

Ebenso werden zwei berührende Trisecanten reell, ihre Berührungspunkte erhalten die Parameter:

$$\pm \frac{\sqrt{3a^2 + 1 + \sqrt{(9a^2 + 1)(a^2 + 1)}}}{\sqrt{2a}}.$$

Dieser Werth ist seinem absoluten Betrage nach stets grösser als der vorausgehende für die Wendepunkte. Eine Tangente der R_4 im Punkte λ wird von zwei weiteren geschnitten, deren Berührungspunkte die Parameter

$$z = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{3} \sqrt{(1+3a^2)\lambda^2 - a(\lambda^4 - 1)}}{1+3a\lambda^2}$$

besitzen. Hieraus ergibt sich die gegenseitige Lage der Kegelschnitte K und L , wie sie unsere Figur 7 zeigt, ($a = \frac{1}{3}$).

Die Raumcurve 4. Ord. vom Typus IV. besitzt zwei reelle Wendepunkte $w_1 w_2$, zwei reelle berührende Trisecanten und zwei reelle Punkte in der Hauptebene. Die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche von R_4 hat zwei reelle Spitzen $p_1 p_2$ und durchsetzt das Hyperboloid in zwei reellen Punkten w_1, w_2 , welche Pinchpoints der Fläche sind. Die R_4 besteht aus einem Theile $b_1 \infty b_2$, dessen Tangenten ausserhalb H liegen und die Doppelcurve nicht treffen, und aus einem zweiten Theile $b_1 w_1 0 w_2 b_2$, dessen Tangenten im Innern von H liegen und die Doppelcurve je zwei Mal treffen. Die Doppelcurve zerfällt durch die beiden Pinchpoints ebenfalls in zwei Theile; der eine liegt ausserhalb H und verläuft isolirt, während der andere, auf dem sich reelle Erzeugende schneiden, im Innern von H liegt und die beiden reellen Spitzen $p_1 p_2$ trägt; der letztere Theil geht von w_1 über p_1 und dann über p_2 nach w_2 . Durchläuft ein Punkt auf der Doppelcurve das Stück $w_1 p_1 p_2 w_2$, so durchmessen die Berührungspunkte der beiden Erzeugenden durch ihn auf R_4 die Stücke $w_1 b_1, b_1 p_2, p_2 0 w_2$ respective $w_1 0 p_1, p_1 b_2, b_2 w_2$.

Die Trisecante durch den Punkt ∞ der R_4 schneidet diese noch in zwei reellen Punkten, die Trisecante durch den Punkt 0 dagegen nicht. Es liegt demgemäss das Curvenstück $p_1 b_2 \infty b_1 p_2$ der R_4 auf Trisecanten mit 3 reellen Punkten, das Curvenstück $p_1 0 p_2$ auf solchen mit einem reellen Punkte. Dieses Verhalten wird durch die schematische Figur 8 veranschaulicht.

§. 5. Specielle Raumkurven 4. Ordnung.

Es soll hier noch auf zwei specielle Raumcurven hingewiesen werden, die durch besondere Wahl der Constanten sich ergeben. So führt der Typus IV zu einer speciellen Curve, wenn die Wendepunkte auf die berührenden Trisecanten zu liegen kommen, d. h. wenn die Punkte $w_1 w_2$ respectiven mit den Punkten $p_2 p_1$ zusammenfallen. Die Doppelcurve wird dann zu einer dreifachen Curve, indem durch jeden ihrer Punkte drei Tangenten der R_4 gehen. (Fig. 9 u. 10.) Es gibt nämlich unendlich viele Dreiecke, die dem Kegelschnitt K umgeschrieben und dem Kegelschnitt L eingeschrieben sind. Zum Beweis ist nur zu zeigen, dass es ein

solches Dreieck gibt, dann gibt es bekanntlich unendlich viele. Die Tangente aus dem Punkte p_i der L , die K in w_2 berührt, schneidet aber L zum zweiten Male in w_2 ; die zweite Tangente aus w_2 an K fällt mit $w_2 p_i$ zusammen. Die dritte Seite des Dreiecks $p_i w_2 p_i$, von dem zwei Seiten coincidiren, ist die Tangente im Punkte p_i von L ; diese berührt aber K in b_1 , unser Dreieck ist also K um- und L einbeschrieben. Den drei Seiten irgend eines Dreiecks, das K um- und L einbeschrieben ist, entsprechen nun drei Tangenten der R_4 , die sich in dem nämlichen Punkte der dreifachen Curve schneiden. Denn je zwei der drei Seiten schneiden sich auf L , die entsprechenden Tangenten der R_4 schneiden sich also ebenfalls; da aber drei Tangenten der R_4 niemals in einer Ebene liegen können, so schneiden sich je drei Tangenten der R_4 , die den Seiten eines solchen Dreiecks entsprechen, in einem Punkte. Die dreifache Curve muss ein Kegelschnitt sein, da sie der Specialfall einer Doppelcurve von der 6. Ord. sein soll.

Ein Zusammenfallen der Punkte $w_1 w_2$ mit den Punkten $p_2 p_1$ tritt ein, wenn man beim Typus IV $a = \sqrt{\frac{1}{3}}$ setzt, wie man dies ja leicht durch Gleichsetzen der Parameterwerthe dieser Punktepaare ableiten kann.

Die Raumeurve 4. Ord. besteht — wie beim Typus IV — aus einem Theile $b_1 \infty b_2$, dessen Tangenten ausserhalb H liegen, und einem Theile $b_1 w_1 0 w_2 b_2$, dessen Tangenten im Innern von H sich befinden. Die abwickelbare Fläche besitzt einen dreifachen Kegelschnitt in der Hauptebene, der H in w_1 und w_2 durchdringt; in den Punkten dieses Kegelschnittes, die im Innern von H liegen, schneiden sich je drei reelle Erzeugende, durch die anderen Punkte desselben geht je eine reelle Erzeugende. Bewegt sich ein Punkt auf R_4 so, dass er der Reihe nach die Curvenstücke $b_1 w_1$, $w_1 0 w_2$, $w_2 b_2$, $b_2 \infty b_1$ durchläuft, dann gleitet seine Tangente an dem dreifachen Kegelschnitt entlang, indem der Gleitpunkt auf diesem zuerst das Stück $w_2 w_1$ im Innern von H durchheilt, dann in w_1 umkehrt und sich wieder nach w_2 zurückbewegt, hier abermals umkehrt, um dieselbe Strecke zum dritten Male zu durchwandern, dann die Fläche H zu passiren und auf dem äusseren Curvenstück nach w_2 zurückzukehren.

Bei den Typen I, II, III kann ein solcher Specialfall nicht eintreten, da die Punkte w_i und p_i nicht gleichzeitig reell sein können. Es kann hier indessen ein anderer Specialfall entstehen, indem zwei Wendepunkte zusammenrücken. Es soll nun der Specialfall näher betrachtet werden, in dem auf der R_4 zwei Mal zwei Wendepunkte zusammenrücken. Er erscheint als Uebergang von den Curven vom Typus I zu denjenigen vom Typus II und tritt z. B. ein für $a = 0$, indem dann die Gleichung der Wendepunkte $k_1^2 k_2^2 = 0$ wird. Aber auch die Gleichung der Punkte b_i , sowie der Punkte p_i wird die nämliche, was folgendes

Resultat liefert. Unsere Raumcurve besitzt zwei osculirende Trisecanten in den Punkten 0 und ∞ , die wir als Streckungspunkte bezeichnen, indem hier drei consecutive Punkte der R_4 in gerader Linie liegen. Die Streckungspunkte entstehen durch Zusammenrücken zweier Wendepunkte. Die R_4 ist hier nur noch von der 4. Klasse, da von den 6 Schmiegungebenen durch einen beliebigen Raumpunkt zwei in Wegfall kommen, nämlich die Ebenen durch die Streckungstangenten, die ja auch 3 consecutive Punkte der R_4 enthalten. Die Tangente in einem Streckungspunkte zählt für zwei consecutive Tangenten der R_4 , sie ist demnach eine Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche der R_4 . Ein ebener Schnitt dieser Fläche, der ja von der 6. Ord. und vom Geschlecht 0 ist, zeigt jetzt 6 Spitzen — die Schnittpunkte mit der R_4 und den beiden Rückkehrkanten — hat also nur noch 4 Doppelpunkte. Die abwickelbare Fläche besitzt demnach jetzt eine Doppelcurve 4. Ord. und 4. Klasse, die also von der gleichen Art wie die R_4 ist, sie weist also ebenfalls zwei Streckungspunkte auf; Streckungspunkte und Streckungstangenten der Doppelcurve sind mit denen der R_4 identisch. Es rücken ja im vorliegenden Falle zwei der Punkte p_i und damit zwei Spitzen der Doppelcurve, wie sie beim Typus I auftreten, im Streckungspunkte zusammen, dabei spaltet sich die Rückkehrkante ab und die noch restirende Doppelcurve hat drei consecutive Punkte mit derselben gemein.

Besitzt die R_4 zwei Streckungspunkte, so ist die Doppelcurve ihrer abwickelbaren Fläche von der gleichen Art wie sie selbst, sie besitzt die gleichen Streckungspunkte und in ihnen die gleichen Tangenten, die für die abwickelbare Fläche Rückkehrkanten sind. Die Streckungspunkte theilen die R_4 und die Doppelcurve in zwei Theile. Durchläuft ein Punkt den einen Theil der Doppelcurve, so durchläuft jeder der Berührungspunkte der beiden von jenem ausgehenden Erzeugenden einen Theil der R_4 . Die Bewegung beginnt bei allen drei Punkten in dem nämlichen Streckungspunkt und endigt im andern. (Fig. 11.)

§. 6. Die Transformationen der R_4 in die Doppelcurve.

Zwei Flächen 2. Gr. kann man der Art in einander transformiren, dass ein beliebiges Polartetraeder der einen in ein bestimmtes Polartetraeder der andern übergeht. Ist demnach ausser der R_4 , die auf H liegt und das für sie fundamentale Tetraeder $abcd$ besitzt, noch eine zweite derartige Curve R_4' mit dem fundamentalen Tetraeder $a'b'c'd'$ und dem Hyperboloid H' gegeben, so kann man durch eine lineare Transformation $a'b'c'd'$ und H' mit $abcd$ und H zusammenfallen lassen. R_4 und R_4' haben dann 6 Punkte gemein, nämlich die Durchstossunkte der Kanten da, db, dc mit der Fläche H ; dabei kann es zugleich erreicht werden,

dass R_4 und R_4' die nämliche Schaar von H zu Trisecanten haben. Zwei solche Curven R_4 und R_4' schneiden sich aber stets in 6 Punkten, haben sie also noch einen weiteren, siebenten Punkt gemein, so werden sie völlig identisch. Dieses tritt also ein, wenn sie einen, und damit vier Punkte in der Hauptebene gemein haben, oder mit anderen Worten, wenn die Constante, die in der Gleichung 4) auftritt, bei beiden dieselbe ist. Da aber die Constante in der Gleichung 7), die die Wendepunkte liefert, den reciproken Werth besitzt, so sind die Curven R_4 und R_4' auch dann in einander transformirbar, wenn die Parametergleichungen ihrer Wendepunkte — in der reducirten Form 7) — die nämliche Constante zeigen. Daraus schliesst man dann weiter, zwei Raumcurven 4. Ordnung zweiter Species sind in einander transformirbar, wenn das Doppelverhältniss der Wendepunkte bei beiden das gleiche ist.

Aus einer R_4 wird durch reciproke Raumtransformation eine Raumcurve 4. Klasse und umgekehrt, den Wendepunkten der ersteren entsprechen dabei die Spitzen der letzteren. Nun ist aber die Doppelcurve D_6 eine solche Curve 4. Klasse und es lässt sich zeigen, dass das Doppelverhältniss der Parameter ihrer 4 Spitzen gleich ist demjenigen der Parameter der 4 Wendepunkte von R_4 . Hat man nämlich zwei rationale Curven (etwa zwei Geraden), die zwei-zweideutig auf einander bezogen sind, so gibt es auf jeder vier Punkte, für die die beiden entsprechenden Punkte auf der andern zusammenfallen; es ist aber bekannt, dass das Doppelverhältniss der vier doppelt entsprechenden Punkte für beide Curven dasselbe ist. Eine R_4 und die D_6 ihrer abwickelbaren Fläche haben die Punkte w_i und p_i gemein; erstere sind für die R_4 Wendepunkte, letztere für die D_6 Spitzen. Einem Punkte w_i , betrachtet als Punkt der D_6 , entspricht auf der R_4 wiederum der Wendepunkt w_i und zwar doppelt gezählt; einem Punkte p_i der R_4 entspricht auf der D_6 doppelt gezählt die Spitze p_i . Demnach ist das Doppelverhältniss der Wendepunkte $w_1 w_2 w_3 w_4$ auf R_4 gleich dem der Spitzen $p_1 p_2 p_3 p_4$ auf D_6 und es muss vier reciproke Raumtransformationen geben, welche die R_4 in die Doppelcurve ihrer abwickelbaren Fläche überführen. Dass es vier Transformationen geben muss, erkennt man aus den gleichen Werthen der Doppelverhältnisse $(w_1 w_2 w_3 w_4) = (p_1 p_2 p_3 p_4) = (p_2 p_1 p_4 p_3) = (p_3 p_4 p_1 p_2) = (p_4 p_3 p_2 p_1)$. Bei den Curven 4. Ordnung vom Typus I, II, III oder V sind diese Transformationen offenbar imaginär, da reellen Punkten der einen Curve imaginäre Punkte der andern entsprechen; bei den Curven vom Typus IV sind zwei derselben reell (indem reelle Punkte beider Curven einander entsprechen) und zwei imaginär.

Die R_4 und die D_6 besitzen beide das gleiche für sie fundamentale Tetraëder $abcd$, die erwähnten reciproken Transformationen müssen deshalb so beschaffen sein, dass sie dieses Tetraëder ungeändert lassen. Sind hiernach $x_1 x_2 x_3 x_4$ die Coordinaten eines Punktes der R_4 bezogen auf das

Tetraëder $abcd$, und $u'_1 u'_2 u'_3 u'_4$ die einer Schmiegungebene der D_6 bezogen auf das gleiche Tetraëder, so gibt es vier reciproke Transformationen:

$$x_1 = c_1 u'_1, \quad x_2 = c_2 u'_2, \quad x_3 = c_3 u'_3, \quad x_4 = c_4 u'_4,$$

die die Punkte der R_4 in die Schmiegungebenen der D_6 verwandeln. Legt man durch die vier Spitzen und fünf weitere Punkte der D_6 eine Fläche 2. Gr., so hat diese 13 Punkte mit der D_6 gemein, enthält dieselbe also ganz. Die reciproken Raumtransformationen lehren uns dann weiter, dass die Schmiegungebenen der R_4 eine Fläche 2. Gr. berühren und dass die Schmiegungebenen der D_6 eine andere Fläche 2. Gr. tangiren, während die Punkte beider Curven auf zwei weiteren Flächen 2. Gr. liegen.

§. 7. Coordinatenbestimmung der R_4 und der D_6 .

Um eine Darstellung der Curvenpunkte und Schmiegungebenen durch Coordinaten zu erzielen, gehen wir von der früheren Parameterdarstellung aus. Die Parametergleichung einer beliebigen ebenen Schnittcurve von H war:

$$(\alpha k + \beta) - (\gamma k + \delta)k' = 0,$$

die Verhältnisse: $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ können also geradezu als Bestimmungsstücke der Ebene dieser Curve dienen. Das Tetraëder $abcd$ sei nun Coordinatentetraëder, die Hauptebene abc habe die Coordinaten $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1$ und die Ebenen abd , acd , bcd , respective die Coordination: $1, 0, 0, 0$; $0, 1, 0, 0$; $0, 0, 1, 0$. Die Gleichungen dieser vier Ebenen sind aber der Reihe nach: $k - k' = 0$, $k + k' = 0$, $kk' - 1 = 0$, $kk' + 1 = 0$, die zugehörigen Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ haben also für diese Ebenen der Reihe nach die Werthe: $1, 0, 0, 1$; $1, 0, 0, -1$; $0, -1, -1, 0$; $0, 1, -1, 0$. Vergleichen wir diese Constantenwerthe der einzelnen Ebenen mit ihren Coordinaten, so erhalten wir die Beziehungen:

$$12) \quad u_1 = (\alpha - \delta), \quad u_2 = -(\beta + \gamma), \quad u_3 = (\beta - \gamma), \quad u_4 = (\alpha + \delta),$$

während das Hyperboloid H in Ebenencoordinaten die Gleichung annimmt:

$$13) \quad u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0.$$

In der That liefert die Gleichung 13) die Beziehung: $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ und diese drückt aus, dass die Schnittcurve: $(\alpha k + \beta) - (\gamma k + \delta)k' = 0$ auf H reducibel wird; d. h. dass ihre Ebene eine Tangentialebene von H ist.

Zwei Erzeugende k und k' von H bestimmen aber nicht nur einen Punkt, sondern auch eine Ebene und wir wollen jeder Tangentialebene von H die gleichen Parameter wie ihrem Berührungspunkte beilegen. Eine

lineare Gleichung $(\alpha k + \beta) - (\gamma k + \delta)k' = 0$ stellt jetzt alle Tangential-
ebenen durch einen festen Punkt dar; durch die Verhältnisse $\alpha : \beta : \gamma : \delta$
ist dieser Punkt charakterisirt. Pol und Polarebene weisen hiernach die
gleichen Constanten auf. Speciell sind die Punkte $d c b a$ durch die Con-
stanten: $1, 0, 0, 1; 1, 0, 0, -1; 0, -1, -1, 0$ und $0, 1, -1, 0$
respective bestimmt, während ihre Coordinaten $0, 0, 0, 1; 1, 0, 0, 0;$
 $0, 1, 0, 0; 0, 0, 1, 0$ sind. Daraus ergeben sich die Beziehungen:

$$14) \quad x_1 = -(\alpha - \delta), \quad x_2 = (\beta + \gamma), \quad x_3 = (\beta - \gamma), \quad x_4 = (\alpha + \delta)$$

und die Gleichung des Hyperboloides in Punktcoordinaten:

$$15) \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Die Bestimmung der Vorzeichen von $x_1 x_2 x_3 x_4$ erfolgt hierbei
unter Berücksichtigung der Gleichung $x_1 u_1 + x_2 u_2 - x_3 u_3 - x_4 u_4 = 0$,
welche die Beziehung zwischen Pol und Polarebene vermittelt.

Speciell findet man für einen Punkt kk' von H die Coordinaten:

$$14a) \quad x_1 = k + k', \quad x_2 = kk' - 1, \quad x_3 = kk' + 1, \quad x_4 = k - k'.$$

Denn die Gleichung: $\alpha k + \beta - \gamma k k' - \delta k' = 0 = (\alpha - \delta)(k + k') - (\beta + \gamma)(kk' - 1) + (\beta - \gamma)(kk' + 1) + (\alpha + \delta)(k - k')$ geht unter
Einführung dieser Werthe über in: $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = 0$,
wie es sein muss.

Ein Punkt der R_4 mit den Parametern k, k' erhält die Coordinaten:

$$16) \quad \begin{cases} x_1 = k + k' = k^2 - 1, \\ x_2 = kk' - 1 = -(1 + 3a)k(k^2 + 1), \\ x_3 = kk' + 1 = (1 - 3a)k(k^2 - 1), \\ x_4 = k - k' = k^2 + 6ak^2 + 1, \end{cases}$$

indem man den Werth von k' aus der Gleichung 4) entnimmt.

Hieraus ergibt sich die Gleichung des Kegels, der die R_4 aus dem
Pol der Hauptebene projicirt:

$$17) \quad (1 - 3a)^2 x_1^2 x_2^2 - (1 + 3a)^2 x_1^2 x_3^2 - 4x_2^2 x_3^2 = 0.$$

Zieht man im Punkte $k_1 : k_2$ der R_4 die Tangente, so hat
ein beliebiger Punkt derselben die Coordinaten:

$$\left(\lambda_1 \frac{\partial x_i}{\partial k_1} + \lambda_2 \frac{\partial x_i}{\partial k_2} \right), \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

oder:

$$18) \quad \begin{cases} x_1 = 4(k_1^3 \lambda_1 - k_2^3 \lambda_2) \\ x_2 = -(1 + 3a)[\lambda_1 k_2(3k_1^2 + k_2^2) + \lambda_2 k_1(3k_2^2 + k_1^2)], \\ x_3 = (1 - 3a)[\lambda_1 k_2(3k_1^2 - k_2^2) - \lambda_2 k_1(3k_2^2 - k_1^2)], \\ x_4 = 4[\lambda_1 k_1(k_1^2 + 3ak_2^2) + \lambda_2 k_2(k_2^2 + 3ak_1^2)]. \end{cases}$$

Diese Werthe findet man aus 16), nachdem man für k den Quotienten $k_1:k_2$ eingeführt hat.

Für einen beliebigen Punkt der Schmiegungeebene im Punkte $k_1:k_2$ der R_4 kommen die Coordinaten:

$$\left[\lambda_1 \mu_1 \frac{\partial^2 x_i}{\partial k_1^2} + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \frac{\partial^2 x_i}{\partial k_1 \partial k_2} + \lambda_2 \mu_2 \frac{\partial^2 x_i}{\partial k_2^2} \right], \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

wo $\lambda_1:\lambda_2$ und $\mu_1:\mu_2$ beliebige Grössen sind. Die Coordinaten einer Schmiegungeebene sind:

$$u_1:u_2:u_3:u_4 = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_1^2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial k_1^2} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial k_1^2} & \frac{\partial^2 x_4}{\partial k_1^2} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_1 \partial k_2} & . & . & . \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial k_1 \partial k_2} & . & . & . \\ \frac{\partial^2 x_3}{\partial k_1 \partial k_2} & . & . & . \end{array} \right\|,$$

oder:

$$19) \quad \begin{cases} u_1 = -(1 - 9a^2)k(k^4 + 1 - 2ak^2), \\ u_2 = (1 - 3a)(k^2 - 1)[a(k^4 + 1) + 2(1 + 2a)k^2], \\ u_3 = (1 + 3a)(k^2 + 1)[a(k^4 + 1) + 2(1 - 2a)k^2], \\ u_4 = (1 - 9a^2)k(k^4 - 1). \end{cases}$$

Alle Schmiegungeebenen berühren die Fläche 2. Grades:

$$20) \quad 4u_1^2 + (1 + 3a)^2 u_2^2 - (1 - 3a)^2 u_3^2 - 4(1 + 3a^2)u_4^2 = 0.$$

Um die Coordinaten specieller Punkte und Schmiegungeebenen zu bestimmen, erinnern wir uns, dass sich die Punkte der R_4 in Quadrupel anordnen, deren Parameter sich aus einer Gleichung 4. Grades

$$21) \quad k^4 + 1 - 2pk^2 = 0$$

ergeben, wo p eine beliebige Constante ist. Die Punkte eines solchen Quadrupels vertauschen sich bei den linearen Transformationen der R_4 in sich. Aus 21) folgt:

$$k^4 + 1 = 2pk^2, \quad k^2 \pm 1 = k\sqrt{2p \pm 2}.$$

Hiernach und nach 16) ergeben sich als Coordinaten der Punkte des Quadrupels:

$$22) \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{2p+2} \sqrt{2p-2}, \\ x_2 = -(1+3a) \sqrt{2p+2}, \\ x_3 = (1-3a) \sqrt{2p-2}, \\ x_4 = 2p+6a. \end{cases}$$

Ebenso finden wir nach 19) für die Schmiegungebenen dieser Punkte:

$$23) \begin{cases} u_1 = -(1 - 9a^2)(p - a), \\ u_2 = (1 - 3a)(ap + 1 + 2a)\sqrt{2p - 2}, \\ u_3 = (1 + 3a)(ap + 1 - 2a)\sqrt{2p + 2}, \\ u_4 = (1 - 9a^2)\frac{1}{2}\sqrt{2p + 2}\sqrt{2p - 2}. \end{cases}$$

Sowohl in 22) wie in 23) unterscheiden sich die einzelnen Punkte des Quadrupels durch die Vorzeichen ihrer Wurzelgrößen; für den nämlichen Punkt gelten in allen Gleichungen die gleichen Wurzelzeichen.

Setzen wir nun $p = \frac{1}{a}$, so erhalten wir als Coordinaten der Wendepunkte von R_4 :

$$24) \begin{cases} x_1 = 2\sqrt{1+a}\sqrt{1-a}, \\ x_2 = -(1+3a)\sqrt{2a}\sqrt{1+a}, \\ x_3 = (1-3a)\sqrt{2a}\sqrt{1-a}, \\ x_4 = 2(1+3a^2); \end{cases}$$

und als Coordinaten der Wendeebenen von R_4 :

$$25) \begin{cases} u_1 = -(1 - 9a^2)\sqrt{1+a}\sqrt{1-a}, \\ u_2 = (1 - 3a)2\sqrt{2a}\sqrt{1+a}, \\ u_3 = (1 + 3a)2\sqrt{2a}\sqrt{1-a}, \\ u_4 = (1 - 9a^2). \end{cases}$$

Setzen wir die Constante $p = \frac{27a^4 - 18a^2 - 1}{8a}$, so gewinnen wir die Coordinaten der Punkte $p_1 p_2 p_3 p_4$:

$$26) \begin{cases} x_1 = \sqrt{1-9a^2}\sqrt{1+a}\sqrt{1-a}, \\ x_2 = -2i\sqrt{a}\sqrt{1-3a}\sqrt{1+a}, \\ x_3 = 2i\sqrt{a}\sqrt{1+3a}\sqrt{1-a}, \\ x_4 = 1 + 3a^2. \end{cases}$$

Ist endlich $p = \frac{3a^2 - 1}{2a}$, so finden wir für die Schmiegungebenen der R_4 in den Punkten $b_1 b_2 b_3 b_4$:

$$27) \begin{cases} u_1 = \sqrt{1+a}\sqrt{1-a}, \\ u_2 = i\sqrt{1+a}\sqrt{a}\sqrt{1+3a}, \\ u_3 = i\sqrt{1+a}\sqrt{a}\sqrt{1-3a}, \\ u_4 = -\sqrt{1-9a^2}. \end{cases}$$

Nimmt man in 26) und 27) die gleichen Wurzelvorzeichen, so beziehen sich die Coordinatenwerthe auf zwei Punkte p_i und b_i , die auf der nämlichen Erzeugenden von H liegen.

Die Punkte p_i sind aber zugleich die Spitzen der Doppelcurve D_6 und die Schmiegungebenen der R_4 in den Punkten b_i sind zugleich Schmiegungebenen der D_6 in den Spitzen. Nach dem vorigen Paragraphen müssen nun zwischen einem Punkte $x_1 x_2 x_3 x_4$ der R_4 und der Schmiegungeebene $u_1' u_2' u_3' u_4'$ im entsprechenden Punkte der D_6 die Beziehungen: $x_1 = c_1 u_1'$, $x_2 = c_2 u_2'$, $x_3 = c_3 u_3'$, $x_4 = c_4 u_4'$ bestehen. Den Wendepunkten der R_4 entsprechen hierbei die Schmiegungebenen in den Spitzen der D_6 ; durch Vergleich der Gleichungen 24) und 27) finden sich also die Werthe der Constanten c_i . Vergleichen wir die Gleichungen 25) und 26) — den Wendeebenen der R_4 entsprechen die Spitzen der D_6 — so gewinnen wir die nämlichen Constanten c_i .

Wendet man auf die Punkte und Schmiegungebenen der R_4 die reciproke Raumtransformation:

$$28) \quad \begin{cases} x_1 = u_1', & x_2 = i \sqrt{\frac{1+3a}{2}} u_2', \\ x_3 = i \sqrt{\frac{1-3a}{2}} u_3', & x_4 = \frac{1+3a^2}{\sqrt{1+3a}\sqrt{1-3a}} u_4' \end{cases}$$

an, so gehen dieselben in die Schmiegungebenen und Punkte der Doppelcurve D_6 ihrer abwickelbaren Fläche über. Diese Transformation führt zugleich auch die Punkte und Ebenen der D_6 in die Schmiegungebenen und Punkte der R_4 über. Durch beliebige Wahl der Wurzelzeichen in den Gleichungen 28) erhalten wir vier verschiedene reciproke Transformationen.

Wenden wir diese Transformationen auf die Gleichungen 16) und 19) an, so erhalten wir die Coordinaten der Schmiegungebenen und der Punkte der Doppelcurve D_6 . Ebenso ergeben sich aus den Gleichungen 17) und 20) zwei Flächen 2. Gr.; auf letzterer liegen die Punkte der D_6 , während erstere von ihren Schmiegungebenen berührt wird.

Alle Gleichungen dieses Paragraphen gelten nur für die Raumcurven 4. Ord. von Typus I, II, III oder V, in denen das Tetraëder $abcd$ reell ist. Beim Typus IV sind nur zwei Ecken und zwei Seitenflächen dieses fundamentalen Tetraëders reell; in die Formeln, wie sie für die andern Typen gelten, haben wir hier nach §. 4 (Schluss) jk und ia für k und a zu setzen. Die Coordinatenwerthe 16) und 19) werden jetzt imaginär und sind auf ein imaginäres Tetraëder bezogen. Um dieses zu beseitigen und ein reelles Coordinatentetraëder herzustellen, das mit dem Tetraëder $abcd$ nur die beiden reellen Ecken und die beiden reellen Seitenflächen gemein hat, ersetzen wir:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 \text{ durch } x_1 : \frac{x_2 - ix_3}{\sqrt{2}} : \frac{x_3 - ix_2}{\sqrt{2}} : x_4$$

$$\text{und } u_1 : u_2 : u_3 : u_4 \text{ durch } u_1 : \frac{u_2 + iu_3}{\sqrt{2}} : \frac{u_3 + iu_2}{\sqrt{2}} : u_4.$$

Hierdurch wird die Gleichung des Hyperboloides H nicht geändert, dagegen erhalten die Coordinaten eines Punktes der R_4 die Werthe:

$$16a) \quad \begin{cases} x_1 = k^4 + 1, \\ x_2 = -k[(1 + 3a)k^2 - (1 - 3a)], \\ x_3 = k[(1 - 3a)k^2 + (1 + 3a)], \\ x_4 = k^4 + 6ak^2 - 1. \end{cases}$$

Die Aenderungen, die die übrigen Gleichungen erfahren, sind analog, doch sollen sie hier nicht weiter hingeschrieben werden.

Von den Transformationen der R_4 in die Doppelcurve sind jetzt zwei reell, ihre Gleichungen werden:

$$28b) \quad \begin{cases} x_1 = u_1', & x_2 = Bu_2' - Au_3', & x_3 = -Au_2' - Bu_3', \\ & x_4 = \frac{1 - 3a^2}{\sqrt{1 + 9a^2}} u_4'; \end{cases}$$

$$\text{wo: } A = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sqrt{1 + 9a^2}}, \quad B = \frac{1}{2}\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 9a^2}} \\ \text{und } AB = \frac{3a}{4} \text{ ist.}$$

Der Typus IV lieferte für $a = \sqrt{\frac{1}{3}}$ einen Specialfall, in dem die abwickelbare Fläche der R_4 einen dreifachen Kegelschnitt besitzt. Die Parameter der Wendepunkte w_i dieser speciellen R_4 sind: $\pm\sqrt{\pm 2 - \sqrt{3}}$; sie liegen in der Hauptebene und fallen mit den Punkten p_i zusammen. Die Punkte b_i erhalten die Parameter: $\pm\sqrt{\pm 2 + \sqrt{3}}$. Die Gleichung des dreifachen Kegelschnittes ist:

$$x_4 = 0, \quad x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \sqrt{3}x_2x_3 = 0.$$

Diese Gleichung ergibt sich, indem man die Gleichung 20) für den Typus IV umändert und dann die Transformation 28b) ausführt unter der Annahme $a = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Die auf den Specialfall der R_4 mit zwei Streckungspunkten bezüglichen Gleichungen ergeben sich aus den allgemeinen, für die Typen I, II, III gültigen, indem man $a = 0$ setzt; es braucht hier nicht weiter darauf eingegangen zu werden.

§. 8. Die einzelnen Modelle.

I. Modell. R_4 mit 4 reellen berührenden Trisecanten.

Die Modelle wurden, so weit thunlich, so eingerichtet, dass sich die Erzeugenden der abwickelbaren Fläche — die Tangenten der R_4 — zu räumlichen Sechsecken anordneten. Die Ecken derselben liegen auf der Doppelcurve und es kann die Aufgabe so aufgefasst werden: man soll die Constante a so bestimmen, dass man Sechsecke erhält, die zugleich

dem Kegelschnitt K um- und dem Kegelschnitt L eingeschrieben sind. Gibt es ein solches Sechseck, so gibt es bekanntlich unendlich viele, d. h. alle Tangenten der R_4 ordnen sich zu 6 und 6 in räumliche Sechsecke an. Sind $T_1 T_2 \dots T_6$ solche Tangenten von K , die ein dem Kegelschnitt L eingeschriebenes Sechseck bilden, und berührt T_1 im Punkte 0, so muss T_4 im Punkte ∞ berühren. T_2 berührt dann nach 9) im Punkte $\sqrt{3}a$ und T_6 im Punkte $-\sqrt{3}a$. T_3 tangiert im Punkte $\frac{1}{\sqrt{3}a}$ und T_5 im Punkte $-\frac{1}{\sqrt{3}a}$. T_2 und T_3 müssen sich aber auf L schneiden, ihre Parameter müssen also die Gleichung 9) befriedigen. Dies ergibt die Gleichung:

$$9a^2 - 12a - 1 = 0 \text{ und damit: } a = \frac{2 + \sqrt{5}}{3}.$$

Die Hauptebene ist als unendlich ferne Ebene und die Kanten ad , bd , cd sind als Axen des Hyperboloides H gewählt worden, was ja durch lineare Transformation stets erreicht werden kann. H hat die Gleichung: $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ und ist Rotationshyperboloid. Die Einheit ist gleich 3 cm genommen und die Dimensionen des Modells betragen 20 cm zu 20 cm zu 18 cm.

II. Modell. R_4 mit 4 reellen Wendepunkten.

Bilden wiederum $T_1 T_2 \dots T_6$ ein Sechseck der vorher beschriebenen Art, und berührt T_1 wieder K im Punkte 0; so muss T_4 wegen der Symmetrieverhältnisse entweder im Punkte ∞ oder 0 tangieren. Ersteres ist hier nicht möglich, es bleibt also nur das letztere übrig. Das führt zu dem Sechseck $T_1, T_2, T_3 = T_2, T_4 = T_1, T_5, T_6 = T_5$, und da der Schnittpunkt von T_2 und T_3 einerseits auf L liegen muss, andererseits nichts anderes als der Berührungspunkt auf K sein kann, so ist dieser Punkt einer der Schnittpunkte von K und L . Die Tangente der R_4 im Punkte 0 trifft also zwei der Tangenten in den Wendepunkten; gleiches gilt für die Tangente im Punkte ∞ . Der Berührungspunkt von T_2 ist aber $\sqrt{3}a$ und soll dieser Punkt Wendepunkt sein, so folgt:

$$3a = \frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} \text{ oder: } a = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Die Hauptebene ist wieder unendlich fern und auch H und die andern Dinge sind wie bei Modell I gewählt.

III. Modell. R_4 mit 4 reellen Punkten in der Hauptebene.

Hier ist die Constante $a = \frac{-2 - \sqrt{5}}{3}$ genommen; Sechsecke gibt

es hier nicht, da keine Tangente eine andere schneidet. Die andern Verhältnisse sind die gleichen wie bei den Modellen I und II.

Die Modelle I, II und III sind symmetrisch in Bezug auf die drei Axen des Hyperboloides H .

IV. Modell. R_4 mit 2 reellen Wendepunkten und zwei reellen berührenden Trisecanten.

Da hier die Tangente der R_4 im Punkte 0 die beiden Tangenten in den Wendepunkten nicht treffen kann, ist eine Anordnung der Tangenten in Sechsecke nicht möglich, dagegen wäre eine Anordnung in Achtecke möglich. Hier ist, um für die Rechnung einfache Formeln zu erhalten: $a = \frac{1}{3}$ gesetzt.

Das Hyperboloid H ist wieder Rotationsfläche, die Ebene seines Kehlkreises ist zur Hauptebene gemacht. Die abwickelbare Fläche ist nur noch in Bezug auf eine Axe symmetrisch. Die Einheit beträgt hier 2,5 cm und die Dimensionen des Modells 20 cm zu 20 cm zu 19 cm.

V. Modell. R_4 mit zwei Streckungspunkten.

Dieses Modell bildet den Uebergang von Modell I zu Modell II und ist wie diese in Bezug auf die drei Axen von H symmetrisch. Die Einheit ist wieder 3 cm, die Dimensionen des Modells sind 20 cm : 20 cm : 20 cm.

VI. Modell. R_4 , deren abwickelbare Fläche einen dreifachen Kegelschnitt besitzt.

Das Hyperboloid H ist hier nicht mehr als Rotationshyperboloid gewählt, dafür ist der dreifache Kegelschnitt als Kreis angenommen. Man kann dieses dadurch erreichen, dass man $x_1 : x_2 = x$, $x_3 : \sqrt{2} x_2 = y$, $x_4 : x_2 = z$ setzt, dann wird die Gleichung von H : $x^2 - 2y^2 - z^2 + 1 = 0$, und die des dreifachen Kreises: $z = 0$, $x^2 + (y + \sqrt{\frac{3}{2}})^2 - 2 = 0$.

Die Dimensionen des Modells sind: 20 cm zu 20 cm zu 18 cm, die Einheit 3 cm; es ist nur in Bezug auf eine reelle Axe symmetrisch.

VII. Modell. Raumcurve 4. Klasse, 6. Ordnung, zweiter Species.

Solche Curven erhält man durch Anwendung einer reciproken Raumtransformation auf die vorausgehenden Curven, und zwar ist hier Modell VI als Ausgangspunkt gewählt worden. Da beim Modell VI sich je drei und drei Tangenten der R_4 in einem Punkte des dreifachen Kegelschnittes schneiden, so liegen hier je drei und drei Tangenten der Raumcurve 4. Klasse in Ebenen, die einen Kegel umhüllen. Beim Modell VI bestimmt jede Tangente des dreifachen Kegelschnittes mit den drei aus ihrem Berührungspunkte an die R_4 gezogenen Tangenten drei Schmiegungsebenen; hier berühren je drei Erzeugende, die in einer Ebene liegen, jenen Kegel in drei Punkten einer Mantellinie, die der Raumcurve 4. Klasse angehört.

Unsere specielle Raumcurve 4. Klasse und 6. Ord. liegt also auf einem Kegel, dessen Mantellinien sie theilweise in drei, theilweise in einem reellen Punkte trifft; sie besitzt zwei Spitzen. Ihre abwickelbare Fläche ist von der 6. Ord. und hat als Doppelcurve eine specielle Raumcurve 4. Ord. zweiter Species, wie sie Modell VI zeigt. Jede Tangentialebene des Kegels schneidet die abwickelbare Fläche ausser drei Erzeugenden noch in einer Curve 3. Ord. mit Doppelpunkt, für welche jene Erzeugenden Wendetangenten und ihre Punkte auf dem Kegel Wendepunkte sind. Alle Tangentialebenen des Kegels, die drei reelle Erzeugenden der abwickelbaren Fläche enthalten und also ihre Doppelcurve in drei reell auf ihr verlaufenden Aesten schneiden, schneiden dieselbe ausserdem noch in einem isolirten Ast. Denn die erwähnte Curve 3. Ord. hat dann drei reelle Wendepunkte, ihr Doppelpunkt ist also isolirt. Alle Tangentialebenen des Kegels, die nur eine reelle Erzeugende der abwickelbaren Fläche enthalten und also einen isolirten Ast der Doppelcurve schneiden, schneiden diese ausserdem noch in einem reell auf der Fläche verlaufenden Ast. Denn die genannte Curve 3. Ord. hat nur einen reellen Wendepunkt, ihr Doppelpunkt kann also nicht isolirt sein. Die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche berührt den Kegel in den beiden Spitzen der Raumcurve 4. Klasse, ihre Tangente daselbst fällt mit der Spitzentangente zusammen.

Die Coordinaten der Schmiegungebenen der R_4 vom Modell VI treten hier als Coordinaten der Punkte der Raumcurve 4. Klasse auf. Es ist dann $x_1 : x_2 = x$, $x_3 : \sqrt{2} x_2 = y$, $x_4 : \sqrt{2} x_2 = z$ gesetzt; die Raumcurve 4. Klasse liegt jetzt auf dem Kreiscylinder: $x^2 + (y - \sqrt{\frac{y}{3}})^2 - 2 = 0$, während ihre Schmiegungebenen das Rotationshyperboloid: $x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 1 = 0$ berühren. Das Modell ist nur in Bezug auf eine reelle Axe symmetrisch.

Bei allen Modellen sei noch auf die verschiedene Form der Kegel hingewiesen, die die R_4 aus einem beliebigen Raumpunkte projectiren. Ändert man die Lage des Raumpunktes, so ändert sich die Form des Kegels. Passirt der Raumpunkt die abwickelbare Fläche der R_4 , so ändert eine der drei Doppelsecanten aus ihm an die R_4 ihren Charakter, indem sie aus einer reellen zu einer isolirten wird oder umgekehrt. Dabei heisst eine Doppelsecante kurzweg reell, wenn sie die R_4 in reellen Punkten trifft, dagegen isolirt, wenn sie zwar reell ist, aber die R_4 nicht in reellen Punkten trifft. Passirt der Raumpunkt die abwickelbare Fläche, die von den Doppeltangentialebenen der R_4 umhüllt wird, so werden zwei reelle Doppelsecanten conjugirt imaginär oder umgekehrt. Bei der Realität dieser abwickelbaren Fläche — der sogenannten Doppeldeveloppabeln von R_4 — haben wir Raumpunkte mit drei und solche mit nur einer reellen (oder isolirten) Doppelsecante; die Doppeldeveloppable ist aber zugleich mit der Doppelcurve D_6 reell respective imaginär. So gibt es beim Typus III aus jedem Raumpunkte drei Doppelsecanten, von denen eine isolirt aber keine

imaginär sein kann. Beim Typus V gibt es Raumpunkte mit einer und solche mit drei isolirten Doppelsecanten, während die R_4 ganz imaginär ist. Die R_4 , deren abwickelbare Fläche einen dreifachen Kegelschnitt besitzt, projectirt sich aus den Punkten desselben, als Curve 3. Klasse mit drei oder einer reellen Spitze; im ersten Falle besitzt diese Curve eine isolirte, im zweiten eine reelle Doppeltangente. Diese Bemerkungen mögen zur Orientirung genügen, an den Modellen selbst kann man leicht die interessanten Uebergänge verfolgen.

Dresden, März 1892.

Fig. 1.

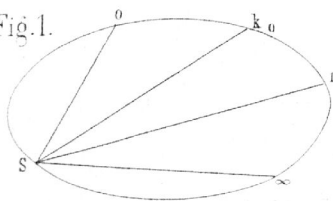


Fig. 2.

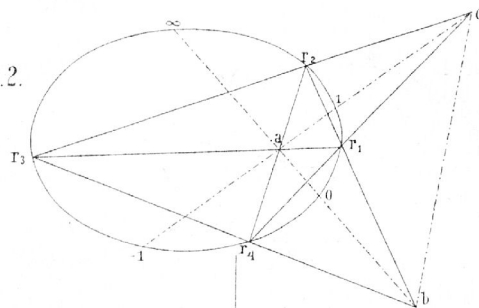


Fig. 5.

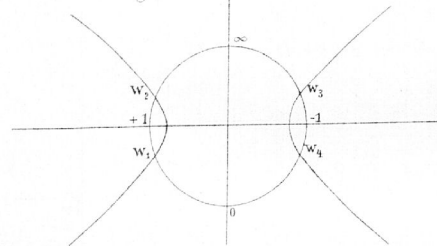


Fig. 3.

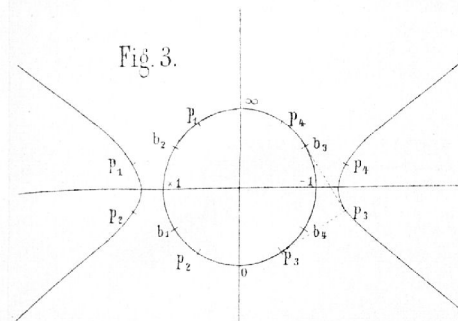


Fig. 6.

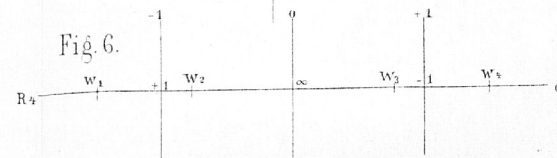


Fig. 7.

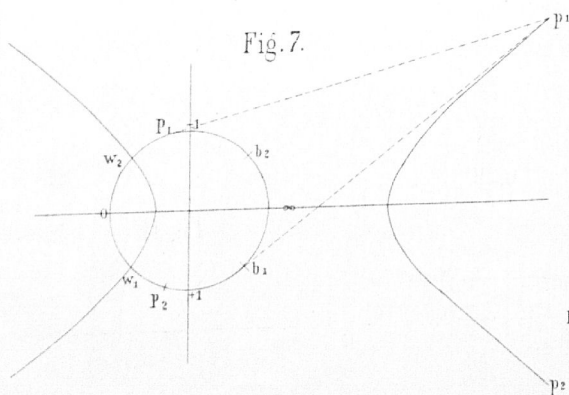


Fig. 8.

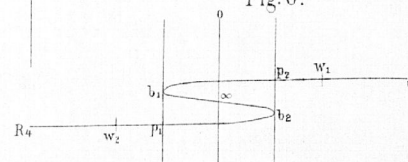


Fig. 10.

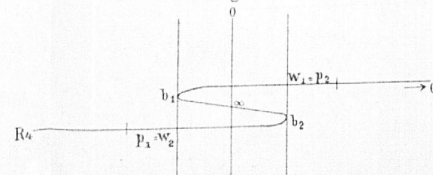


Fig. 11.

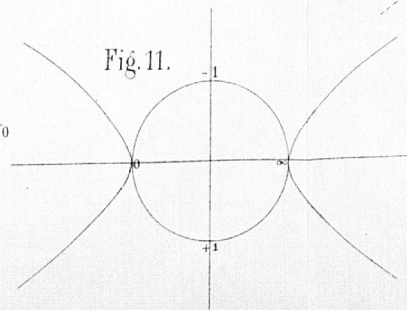


Fig. 9.

