

Mathematische Modelle

angefertigt

im mathematischen Institut der k. technischen Hochschule in München.

XXVIII.

3 Typen von Cycliden mit einem System sphärischer Krümmungslinien.

Von Dr. S. Finsterwalder.

Die im Nachfolgenden zu besprechenden Flächen bieten in mehrfacher Hinsicht Interesse: erstens als Wellenflächen gewisser optisch einfach zu definirender Strahlensysteme; zweitens als Cycliden in dem von Darboux u. A. gebrauchten erweiterten Sinne; drittens als allgemeine Typen von Flächen 4. Ordnung, deren einer Mantel der Centrafläche in einen Kreis degenerirt.

Wir wurden auf diese Flächen aufmerksam bei Beantwortung der Frage, die Wellenflächen eines Strahlensystemes zu finden, das durch Reflexion eines Lichtbündels an einer, als unendlich dünne Kanalfläche gedachten, spiegelnden Curve entsteht. Wir nehmen als solche einen Kreis A vom Radius r an und denken uns den leuchtenden Punkt P ausserhalb des Kreises in einer Entfernung p von der Ebene desselben. Die Entfernung des Centrums von A von dem durch P gehenden Lote zur Ebene des Kreises sei q . Jeder Strahl, der von P aus nach einem Punkte der spiegelnden Curve geht, wird dort an einem ganzen Büschel von Tangentialebenen reflectirt und daher in einen Rotationskegel von Strahlen zertheilt, dessen Axe die Tangente an die spiegelnde Curve und dessen eine Erzeugende der einfallende Strahl selbst ist.

Es lässt sich demnach das System der reflectirten Strahlen aus den Erzeugenden der Rotationskegel zusammensetzen, deren Spitzen Punkte, deren Axen Tangenten der spiegelnden Curve sind, und welche ausserdem durch den leuchtenden Punkt gehen. Eine der Wellenflächen dieses

Strahlensystemes ist offenbar die Enveloppe von Kugeln, welche durch P gehen und ihren Mittelpunkt auf A haben. Die Gleichung dieser Wellenfläche lautet:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - p^2 - 2qx)^2 - 4r^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Dabei hat der leuchtende Punkt die Coordinaten $x = 0$, $y = 0$, $z = p$; der spiegelnde Kreis die Gleichung:

$$(x - q)^2 + y^2 = r^2$$

Die Fläche ist 4. Ordnung und enthält den unendlich fernen Kugelkreis als Doppelcurve; sie ist daher eine Cyclide im Sinne von Darboux. An Singularitäten hat sie ausserdem noch 2 konische Knoten, den einen im leuchtenden Punkte P , den andern im Gegenpunkte P' desselben in Bezug auf die Ebene des Kreises A . Die Klasse beträgt daher $36 - 4 - 2 \cdot 2 = 28$.

Zwei consecutive erzeugende Kugeln schneiden sich in einem Kreise, der ganz auf der Fläche liegt und durch die beiden Knotenpunkte P und P' geht. Derselbe gehört einem System von Krümmungslinien an. Um das zweite System zu finden, fasst man die Fläche als Bestandtheil einer dreifach orthogonalen Schaar auf und erhält dann die Krümmungslinien als Schnitte mit den einzelnen Flächen der Schaar. Zu diesem Zwecke transformirt man die Fläche durch Inversion vom leuchtenden Punkt als Pol aus. Die Ordnung 8 der inversen Fläche wird durch den unendlich fernen Kugelkreis um 4 und durch den Knotenpunkt P im Inversionscentrum um 2 erniedrigt. Da die transformirte Fläche wegen des zweiten Knotenpunktes P' der Originalfläche selbst einen Knotenpunkt enthalten muss, so ist sie nothwendig ein Kegel 2. Ordnung. Den Erzeugenden entsprechen die Kreise auf der Cyclide. Der Kegel bildet mit seinen Confocalen und den concentrischen Kugeln eine dreifach orthogonale Schaar, aus der wir durch Inversion eine zweite erzeugen können, welcher unsere Cyclide angehört. Die concentrischen Kugeln gehen dabei, wie man leicht übersieht, in ein Kugelbüschel über, das die Punkte P und P' zu Nullkugeln hat. Dieses Kugelbüschel schneidet aus unserer Fläche die zweite Schaar von Krümmungslinien aus. Bezeichnet c den Radius einer Kugel des Büschels, so kann man die Gleichung unserer Fläche in Polarcoordinaten φ , φ (Länge), ψ (Breite) und dem Parameter c folgendermassen schreiben:

$$q^4 - 2q^2 \frac{p^2(p^2 + q_1^2 + c^2) + 2q_1^2 c^2}{p^2 + q_1^2 + c^2} + p^4 = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{q_1^2 + p^2}{c^2}; \quad q_1 = r - q \cos \varphi.$$

Den Werthen $\varphi = \text{const}$ entspricht die erste aus Kreisen bestehende Schaar von Krümmungslinien, den Werthen $c = \text{const}$ eine Schaar sphärischer Curven (Sphero-Quartics), welche das zweite System der Krümmungslinien bilden.

Zwei der Modelle, das ringförmige und das hornförmige, stellen Flächen dar, für welche p rein imaginär ist, die beiden Doppelpunkte also conjugirt imaginär auftreten; bei letzterer besteht ausserdem zwischen den Constanten die Beziehung $p^2 + (r - q)^2 = 0$, welche die Existenz eines dritten (reellen) Doppelpunktes zur Folge hat. Der Umriss der Flächen von dem unendlich fernen Punkte der Z -Axe gesehen, ist eine bicirculare Curve 4. Ordnung (Cartesisches Oval, resp. Paskal'sche Schnecke). Der Umriss, von dem unendlich fernen Punkte der Y -Axe gesehen, zerfällt in zwei Kreise und eine doppelt zu zählende Parabel $z^2 - 2qx - p^2 - r^2 = 0$, welche beide Kreise doppelt berühren. Die Fläche ist dem entsprechenden parabolischen Cylinder doppelt eingeschrieben.

Das dritte, herzförmig gestaltete Modell stellt die Fläche für den Fall $p = 0$, $q = r$ dar. Hier sind die bei dem hornförmigen Typus getrennt auftretenden Knoten zu einem uniplanaren Knotenpunkt vereinigt, welcher die Klasse um 6 reducirt. Dieselbe beträgt nun 26. Die Gleichungen der Fläche in dem Parameter c lauten:

$$q^2 = \frac{16r^2c^2\sin^4\frac{\varphi}{2}}{4r^2\sin^4\frac{\varphi}{2} + c^2} \quad \text{tg } \psi = \frac{2r\sin^2\frac{\varphi}{2}}{c}$$

Die Kugeln, welche die zweite Schaar der Krümmungslinien auf der Fläche ausschneiden, berühren sämtlich die Ebene des spiegelnden Kreises im leuchtenden Punkte. Der Umriss der Fläche in der XY -Ebene ist eine Cardioide.

Um die parabolische Curve der speciellen Fläche (auf dem Modell in rother Farbe angegeben) zu finden, kann man diese dadurch auf eine Kugeloberfläche abbilden, dass man Parallele zu ihren Normalen durch den Mittelpunkt der Kugel zieht. Der ersten Schaar von Krümmungslinien entspricht dann ein System von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einem grössten Kreise C der Kugel liegen. Die Enveloppe E dieses Systemes von Kreisen ist dann das sphärische Bild der parabolischen Curve auf unserer Fläche, denn jedem Punkte von E entsprechen zwei benachbarte parallele Normalen der Fläche, deren Fusspunkt also der parabolischen Curve angehört. Es seien K und K' zwei benachbarte Kreise, die Bilder consecutiver Krümmungslinien. Der Abstand ihrer Mittelpunkte auf C sei $d\alpha$. Betrachtet man die zugehörigen Normalenkegel der Fläche, so findet man leicht, dass die Differenz der sphärischen Radien von K und K' $\frac{1}{2}d\alpha$ beträgt. Zieht man alsdann nach den Berührungspunkten mit der Enveloppe E die sphärischen Radien R , R' der Kreise K , K' , so zeigt sich, dass dieselben mit dem grössten Kreise C einen Winkel von 60° einschliessen. Sind nämlich c , c' die Mittelpunkte von K , K' und e , e' die Fusspunkte der Radien R , R' auf der Enveloppe, so kann man, indem man ce auf

$c'e'$ von e' aus abträgt, zu einem Punkte d gelangen, der mit c verbunden das infinitesimale Dreieck $cc'd$ liefert, das die Hypotenuse $cc' = d\alpha$ und eine Kathete $cd = \frac{1}{2}d\alpha$, also den Winkel $cc'd = 60^\circ$, enthält.

Alle zur Enveloppe E normalen Radien RR' haben demnach gegen den Kreis C eine Neigung von 60° und umhüllen daher einen Kreis L vom sphärischen Radius $= 30^\circ$, und dieser ist die sphärische Evolute von E .

Um die Punkte von E auf die Cyclide zu übertragen, bemerke man, dass dieselben auf den entsprechenden Kreisen K einen Winkelabstand $= 60^\circ$ von dem einen Schnitte mit C , dem Bilde der Symmetrieebene, haben, und dass dieser Winkelabstand bei der Uebertragung erhalten bleibt. Die der Enveloppe E entsprechende parabolische Curve wird daher dadurch erhalten, dass man jeden der durch P gehenden Krümmungskreise in 6 Theile theilt, und die ersten Theilpunkte von P aus durch eine Linie verbindet. Daraus folgt, dass sie auch von einem Kreiskegel von 60° Oeffnungswinkel ausgeschnitten wird, der seine Spitze in P hat, und dessen Axe senkrecht zur Ebene des Kreises A steht.