Ueber Flächen von constantem positiven Krümmungsmass nach Enneper.

Von

Dr. **H. Sievert**,
Studienlehrer in Nürnberg.

(17. Serie, Nr. 3.)

§. 1.

Enneper hat in den Göttinger Nachrichten vom Jahre 1868 die Gleichungen einer Fläche constanten positiven Krümmungsmasses bestimmt, für welche ein System von Krümmungslinien von ebenen oder sphärischen Curven gebildet wird.

Nachdem Hr. Bockwoldt*) die Discussion für eine Fläche dieser Gattung mit Hilfe von Sigmafunctionen durchgeführt hat, sollen im Folgenden die Coordinaten derselben durch die Jacobi'schen Thetafunctionen ausgedrückt, und zugleich ein von Bockwoldt nicht behandelter Fall, der auf trigonometrische Functionen führt, erörtert werden.

Den Parametern u und v, durch welche die Fläche gegeben ist, entsprechen die zwei Schaaren von Krümmungslinien, und zwar ist dasjenige System von Krümmungslinien plan, für welches der Parameter u variirt.

Bezeichnet man den Winkel, welchen die Ebene einer planen Krümmungslinie mit der (xz) Ebene des Coordinatensystems bildet, mit ψ, so lauten die allgemeinen Formeln für die Coordinaten (x, y, z) eines Punktes der Fläche:**)

$$\text{I.}\quad \begin{cases} x = \varrho\cos\psi, \\ y = \varrho\sin\psi, \\ z = \dfrac{a}{\sqrt{C^2+B^2-A^2}}\left\{\int\sqrt{C-A\cos 2iu_1 - iB\sin 2iu_1}\,du_1 + ia\operatorname{cotg} i(u_1+v_1)\dfrac{du_1}{du}\right\}, \\ \varrho = \dfrac{a}{\sqrt{C^2+B^2-A^2}}\cdot\dfrac{1}{\cos i(u_1+v_1)}\cdot\dfrac{1}{\sin\tau}; \end{cases}$$

*) Ueber die Enneper'schen Flächen mit constantem positiven Krümmungsmass. Dissert. Göttingen 1878.

**) Enneper a. a. O., sowie meine Dissertation: Ueber die Zentraflächen der Enneper-schen Flächen etc. Tübingen 1886.

ferner ist:

$$\text{II.}\begin{cases} 1) & \dfrac{d\psi}{dv} = \dfrac{\sqrt{C^2+B^2-A^2}}{a}\sin^2\tau, \\ 2) & \dfrac{1}{\sin^2\tau} = A\cos 2iv_1 - iB\sin 2iv_1 - C, \\ 3) & a\dfrac{du_1}{du} = \sqrt{C - A\cos 2iu_1 - iB\sin 2iu_1}, \\ 4) & a\dfrac{dv_1}{dv} = \sqrt{A\cos 2iv_1 - iB\sin 2iv_1 - C - 1}. \end{cases}$$

τ ist der Winkel, unter dem die Fläche von der Ebene einer planen Krümmungslinie geschnitten wird; die Constante $\frac{1}{a^2}$ ist gleich dem Produkt der Hauptkrümmungsradien.

Setzen wir in den Gleichungen I. und II. $B = 0$, so erhalten wir die Fläche, welche Bockwoldt näher untersucht hat.

Aus der Gleichung (II, 3) ergibt sich zunächst, wenn man in ihr die Substitution:

$$\sin hu_1 = \frac{\sqrt{\dfrac{C-A}{C+A}}\sin\varphi}{\sqrt{1-\dfrac{C-A}{C+A}\sin^2\varphi}} \quad \text{macht,}$$

$$\text{III.}\quad U = \frac{\sqrt{C+A}}{a}u = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \text{ wobei}$$

$$k = \sqrt{\frac{C-A}{C+A}} \text{ und } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ ist.}$$

Durch die Substitution von:

$$\sin hv_1 = \frac{\sqrt{1-\dfrac{2A}{A+C+1}\sin^2\varphi'}}{\sqrt{\dfrac{2A}{A+C+1}}\sin\varphi'}$$

in die Gleichung (II, 4) erhält man ferner:

$$\text{IV.}\quad -V = -\frac{\sqrt{A+C+1}}{a}v = \int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi'}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi'}};$$

hierin ist:

$$k_1 = \sqrt{\frac{2A}{A+C+1}} \text{ und } K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi'}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi'}}.$$

In elliptischen Functionen ausgedrückt, findet man für $\sin hu_1$ und $\sin hv_1$:

$$\text{V.}\quad \begin{cases} \sin h\, u_1 = \dfrac{k\, sn\, U}{dn\, U}, \\ \sin h\, v_1 = \dfrac{dn\, V}{k_1\, sn\, V}. \end{cases}$$

Berücksichtigt man, dass:

$$\sin \iota = \frac{sn\, V}{\sqrt{A+C+1}\,\sqrt{1-\frac{k_1^{\,2}}{k'^{\,2}_1}\, sn^2 V}} \quad \text{ist,}$$

so findet man zunächst für den Winkel ψ das Integral:

$$\text{VI.}\quad \psi = \sqrt{\frac{C^2-A^2}{(A+C+1)^3}} \int_0^V \frac{sn^2 V}{1-\frac{A+C}{A+C+1}\, sn^2 V}\, dV.$$

Macht man hierin, da $\dfrac{A+C}{A+C+1}$ zwischen 1 und $k_1^{\,2}$ liegt die Substitution: $\dfrac{A+C}{A+C+1} = k_1^{\,2}\, sn^2 (i\alpha + K_1)$, so ergibt sich:

$$\psi = -i \int_0^V \frac{k_1^{\,2}\, sn(i\alpha+K_1)\, cn(i\alpha+K_1)\, dn(i\alpha+K_1)\, sn^2 V}{1-k_1^{\,2}\, sn^2(i\alpha+K_1)\, sn^2 V}\, dV =$$

$$= i\, \Pi(V, i\alpha) - \sqrt{\frac{C^2-A^2}{A+C+1}}\, V + \text{arc tang}\left\{\sqrt{\frac{C^2-A^2}{A+C+1}} \cdot \frac{sn\, V\, cn\, V}{dn\, V}\right\}.$$

Durch Einführung der Thetafunctionen erhält man, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\mathfrak{u} = \frac{\pi U}{2K}, \qquad \mathfrak{v} = \frac{\pi V}{2K_1},$$

$$\text{VII.}\quad \psi = -\left\{\sqrt{\frac{C^2-A^2}{A+C+1}} + i\, \frac{\vartheta'(i\alpha)}{\vartheta(i\alpha)}\right\} V - \frac{i}{2} \log \frac{\vartheta(V-i\alpha)}{\vartheta(V+i\alpha)} +$$

$$+ \text{arc tang}\left\{\sqrt{\frac{C^2-A^2}{A+C+1}} \cdot \frac{\vartheta_1(\mathfrak{v})\, \vartheta_2(\mathfrak{v})}{k'_1\, \vartheta(\mathfrak{v})\, \vartheta_3(\mathfrak{v})}\right\}.$$

Da

$$\int_0^{u_1} \sqrt{C - A\cos 2i u_1}\, du_1 = \sqrt{C+A}\left\{U - E(am\, U) + \frac{k^2\, sn\, U\, cn\, U}{dn\, U}\right\}$$

ist, so erhält man für die Coordinaten der Fläche folgende Gleichungen:

$$\text{VIII.}\quad \begin{cases} \varrho = a\sqrt{\dfrac{k}{C-A}} \cdot \dfrac{\vartheta_3(\mathfrak{u})}{\sqrt{k}\,\vartheta_1(\mathfrak{u})\,\vartheta(\mathfrak{v}) - \sqrt{k_1}\,\vartheta_3(\mathfrak{v})\,\vartheta(\mathfrak{u})} \sqrt{k'^2\,\vartheta^2(\mathfrak{v}) - k_1\,\vartheta_1^{\,2}(\mathfrak{v})}, \\ z = \dfrac{a}{\sqrt{C-A}}\left\{\dfrac{K-E}{K}\, U - \dfrac{\pi}{2K} \cdot \dfrac{\vartheta'(\mathfrak{u})}{\vartheta(\mathfrak{u})}\right\} - a\, \dfrac{k'\sqrt{k}}{\sqrt{C-A}} \cdot \dfrac{\vartheta_2(\mathfrak{u})\,\vartheta_3(\mathfrak{u})\,\vartheta(\mathfrak{v})}{\vartheta(\mathfrak{u})\left[\sqrt{k}\,\vartheta_1(\mathfrak{u})\,\vartheta(\mathfrak{v}) - \sqrt{k_1}\,\vartheta(\mathfrak{u})\,\vartheta_3(\mathfrak{v})\right]}. \end{cases}$$

Die Krümmungslinien, für welche v variabel ist, liegen auf Kugelflächen, deren Mittelpunkte in der z-Axe sich befinden; bezeichnet R den Radius einer solchen Kugel, die durch den Punkt (x, y, z) der Fläche geht, und Z den Abstand des Mittelpunktes der Kugelfläche vom Coordinatenanfang, so ist:

$$\text{IX.} \begin{cases} R = \dfrac{du}{du_1} = \dfrac{a}{\sqrt{C - A\cos 2iu_1}}, \\ Z\sqrt{C^2 - A^2} = \displaystyle\int (C - A\cos 2iu_1)\,du + a^2 \frac{\dfrac{d^2u_1}{du^2}}{\dfrac{du_1}{du}}, \end{cases}$$

oder in Thetafunctionen ausgedrückt, erhält man für dieselben:

$$\text{X.} \begin{cases} R = \dfrac{a\sqrt{k}}{\sqrt{C - A}} \cdot \dfrac{\vartheta_3(\mathfrak{u})}{\vartheta_2(\mathfrak{u})}, \\ Z(C^2 - A^2) = a\sqrt{C+A}\left\{U\dfrac{K+E}{K} - \dfrac{\pi}{2K}\cdot\dfrac{\vartheta'(\mathfrak{u})}{\vartheta(\mathfrak{u})}\right\} + a\sqrt{C+A}\,\dfrac{\vartheta_1(\mathfrak{u})\left\{k\vartheta_2{}^2(\mathfrak{u}) - k'\vartheta^2(\mathfrak{u})\right\}}{\vartheta(\mathfrak{u})\,\vartheta_2(\mathfrak{u})\,\vartheta_3(\mathfrak{u})}. \end{cases}$$

Für $u = nK$ wird $R = \infty$, es gibt also unter den sphärischen Krümmungslinien solche, die ganz in einer Ebene liegen. Die Fläche wiederholt sich periodisch in der Richtung der z-Axe, und zwar ist diese Periode:

$$z = \frac{a}{\sqrt{C - A}}\left\{K - E\right\}.$$

Für $u = 0$ erhält der Radius der osculirenden Kugelfläche seinen kleinsten Werth, denn es ist:

$$\vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} \text{ und } \vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}k}, \text{ daher:}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{C - A}}.$$

Da für $u = 0$ auch $Z = 0$ wird, so liegt der Mittelpunkt dieser Kugel im Coordinatenanfangspunkt.

Für $u_1 + v_1 = 0$ hat die Fläche, wie Bockwoldt gezeigt hat, eine räumliche Rückkehrkante.

Zur Anfertigung des Modells wurden die von Bockwoldt berechneten Tabellen benützt.

§. 2.

Hier soll noch eine speciellere Fläche constanten positiven Krümmungsmasses betrachtet werden, deren Existenz Herr Kuen zuerst nachgewiesen hat (Sitzungsber. d. Bayer. Acad. 1884). Dieselbe erhält man,

wenn man in den allgemeinen Gleichungen (I.) des vorigen Paragraphen $A = B = C$*) setzt.

Die Gleichungen II in §. 1 liefern durch diese Substitution zunächst:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} e^{u_1} = \cos h\, \dfrac{\sqrt{C}\,u}{a}, \\ e^{v_1} = \dfrac{\sqrt{C+1}}{\sqrt{C}\cos w} \quad \text{und} \\ \sin\tau = \dfrac{\cos w}{\sqrt{1 + C\sin^2 w}}, \end{cases}$$

wo $$w = \frac{\sqrt{C+1}}{a}\, v \quad \text{ist.} \quad \ldots\ldots \quad \text{(II.)}$$

Führen wir noch einen neuen Parameter ein durch die Substitution:

$$\text{II.}\quad e^{\frac{\sqrt{C}}{a}u} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2},$$

wo denn also: $\cos h\, u = \dfrac{1}{\sin\varphi}$ ist, so gehen die Gleichungen der Fläche über in:

$$\text{III.}\quad \begin{cases} \varrho = 2a\sqrt{\dfrac{C+1}{C}} \cdot \dfrac{\sqrt{1 + C\sin^2 w}}{C + 1 - C\sin^2\varphi\cos^2 w} \cdot \sin\varphi, \\ z = \dfrac{a}{\sqrt{C}} \log \operatorname{tang}\dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{2a(C+1)}{\sqrt{C}} \cdot \dfrac{\cos\varphi}{C + 1 - C\sin^2\varphi\cos^2 w}, \\ \operatorname{tang}\psi = \dfrac{[\sqrt{C+1} - 1]\operatorname{tang} w}{1 + \sqrt{C+1}\operatorname{tang}^2 w}. \end{cases}$$

Aus dem Ausdruck:

$$\sin\tau = \frac{\cos w}{\sqrt{1 + C\sin^2 w}}$$

folgt, dass die Fläche die xz-Ebene und alle Ebenen durch die z-Axe, für welche $w = n\pi$ ist, senkrecht trifft, und dass ferner für $w = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$ die Ebene einer planen Krümmungslinie Tangentialebene wird; es ist also wegen der Symmetrie der Fläche die Krümmungslinie $w = \dfrac{\pi}{2}$ Rückkehr-

*) In der Abhandlung von Kuen zu dem Modell der Fläche von constantem negativen Krümmungsmass nach Bianchi (Ser. VIII, Nr. XX dieses Verlags) findet sich die Fussnote:

„Eine analoge Flächengattung von positivem Krümmungsmass existirt nicht wegen der für diese bestehenden Realitätsbedingung

$$[A] \geq [C] + 1.$$“

Diese Bemerkung beruht auf einem Irrthum; denn jene Bedingungsgleichung gilt nur für den Fall, dass $B = 0$, aber nicht, wenn $B = A$ ist.

kante der Fläche. Eine räumliche Rückkehrkante besitzt diese Flächengattung nicht.

Aus der Gleichung der osculirenden Kugelflächen:

$$x^2 + y^2 + \left\{ z + \frac{a}{\sqrt{C}} \log \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} + \frac{a}{\sqrt{C}} \cos \varphi \right\}^2 = \frac{a^2}{C} \cos \varphi$$

geht hervor, dass für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ eine ebene Krümmungslinie unter dem System der sphärischen vorhanden ist; dieselbe verläuft in der xy-Ebene. In dieser Ebene besitzt die Fläche gleichzeitig eine Doppelcurve. Setzt man nämlich $z = 0$, so erhält man als Gleichung der Durchschnittscurve der xy-Ebene mit der Fläche:

$$\frac{a}{\sqrt{C}} \log \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} + \frac{2a(C+1)}{\sqrt{C}} \cdot \frac{\cos \varphi}{C + 1 - C \sin^2 \varphi \cos^2 w} = 0.$$

Diese Gleichung wird aber nicht allein für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, sondern auch für $\varphi = \pi + \varphi'$ befriedigt.

Im Modell wurde die Grösse C so gewählt, dass für $w = n\pi$, $\psi = 90^0$ wird, so dass sich die Fläche schliesst.

Die Constante C wird für diese Voraussetzung gleich 3; als Krümmungsmass wurde für beide Flächen $a = 4{,}33$ gewählt. *)

Nürnberg, im März 1890.

*) Das Krümmungsmass ist hiernach in Uebereinstimmung mit demjenigen der Kugel-, Rotations- und Schraubenflächen von constantem positiven Krümmungsmass der V. Serie dieses Modellverlags, auf welche alle somit die Fläche abwickelbar ist.