Mathematische Modelle

angefertigt

an der Grossh. badischen technischen Hochschule zu Karlsruhe

unter Leitung von Prof. Dr. **Wiener.***)

(Zu Serie XVIII.)

Modelle der Regelflächen dritten Grades.

Von stud. techn. **C. Tesch.**

Sind als Leitlinien einer Regelfläche gegeben ein Kegelschnitt k, eine die Ebene des k in E_1 treffende Gerade e, und eine den k selbst in D_1 schneidende Gerade d, so ist die Fläche vom dritten Grade. Ihre Erzeugenden erhält man auf folgende Weise.

Man lege durch die e eine Ebene; dieselbe schneidet den k in zwei reellen oder imaginären Punkten K und K^*, die d in einem Punkte D. Es sind dann DK und DK^* zwei Erzeugende der Fläche, welche die e in den Punkten E bezügl. E^* treffen. Legt man durch d eine Ebene, so schneidet diese den Kegelschnitt k ausser in D_1 noch in einem Punkte K, die e in einem Punkte E, und es ist EK eine Erzeugende der Fläche, welche durch einen Punkt D der d geht. Durch jeden Punkt der d gehen also zwei Erzeugende, während durch jeden Punkt der e nur eine Erzeugende geht; es ist daher d eine Doppellinie, e eine einfache Linie der Regelfläche.

*) Modelle der oben bezeichneten Art befinden sich in der Sammlung für darstellende Geometrie an der technischen Hochschule zu Karlsruhe und wurden für die beiden ersten Fälle der getrennten Leitgeraden von dem Studierenden Herrn Heinr. Schaumkell in den Jahren 1882 und 83, und eines für den Fall der zusammenfallenden Leitgeraden oder für die Cayley'sche Fläche im Jahre 1887 von dem Studierenden Herrn Barth. Hendriks angefertigt. Der Verfasser unterzog in dem von Herrn Geh. Hofrath Prof. Dr. Wiener geleiteten Seminar für darstellende Geometrie diese Flächen zum Zwecke der Veröffentlichung einer neuen Bearbeitung und fügt den Modellen eine Darstellung der geometrischen Entstehungsweise und eine Herleitung der Gleichungen der Flächen bei.

304

Legt man durch e eine Ebene so, dass ihr Schnitt mit der Ebene des k diesen in dem Punkte B berührt und ist C der Schnitt jener Ebene mit der d, so fallen in CB zwei benachbarte Erzeugende zusammen und bilden eine Kante. C ist ein Kuspidalpunkt der Regelfläche.

Liegt der Punkt E_1 ausserhalb des k, so giebt es aus E_1 zwei reelle Tangenten E_1B und E_1B^*, also auch zwei reelle Kanten BC und B^*C^*, sowie zwei reelle Kuspidalpunkte C und C^*. Es ist dann die d in ihrem einen Teile CC^* eine reelle Doppellinie, in ihrem anderen Teile eine isolierte Linie der Fläche. Legt man durch e eine Ebene parallel der d, und schneidet diese den Kegelschnitt k nicht in reellen Punkten, so gehen durch den unendlich fernen Punkt der d auch keine reellen Erzeugenden. Es ist also dann der endliche Teil CC^* der d reelle Doppellinie, der durch das Unendliche gehende Teil isolierte Linie. Schneidet dagegen diese Ebene den k in reellen Punkten, so gehen durch den unendlich fernen Punkt der d zwei reelle Erzeugende, und es ist der endliche Teil CC^* die isolierte Linie. Ein Übergang findet statt, wenn beide Schnittpunkte zusammenfallen, also jene Ebene den Kegelschnitt k in dem Punkte B^* berührt. Es fällt dann der eine Kuspidalpunkt C^* in das Unendliche, und die Kante B^*C^* wird der d parallel.

Den Fall, in welchem der endliche Teil CC^* isolierte Linie ist, erhält man auch, wenn man als Leitkegelschnitt die unendlich ferne Kurve eines Kegels zweiten Grades annimmt, von welchem eine Erzeugende parallel ist der Doppellinie. Diese Entstehungsweise ist für das Modell gewählt.

Ist dagegen E_1 ein innerer Punkt des k, so sind die Kanten und Kuspidalpunkte imaginär, und es ist die d in ihrem ganzen Verlaufe reelle Doppellinie.

Die Erzeugenden der Regelflächen dritten Grades können auch angesehen werden als Schnittlinien entsprechender Ebenen eines involutorischen Ebenenbüschels d und eines dazu projektiven Ebenenbüschels e, deren Träger d und e sich nicht schneiden, wie man durch folgende Überlegung erkennt.

Je zwei Punkte des k, K und K^* werden aus E_1 durch einen einzigen Strahl, aus D_1 aber durch zwei conjugierte Strahlen projiciert. Es ist also das einfache Strahlenbüschel E_1 dem involutorischen Büschel D_1 projektiv, folglich sind es auch die Ebenenbüschel e und d, deren Schnitt mit der Ebene des k die beiden Strahlenbüschel E_1 und D_1 sind. Das involutorische Ebenenbüschel d schneidet auf e eine involutorische, das einfache Ebenenbüschel e auf d eine einfache Punktreihe ein, und es sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Reihen Erzeugende der Regelfläche, denn sie sind die Schnittlinien entsprechender Ebenen der Ebenenbüschel.

Die durch die Berührungspunkte B und B^* gehenden Ebenen des Büschels d sind die Doppelebenen der Involution. Jhnen entsprechen die Doppelpunkte A und A^* der involutorischen Punktreihe e, diesen wieder die Kuspidalpunkte C und C^* auf d. Längs der Kanten AC und A^*C^* wird die Fläche von den Kuspidalebenen, den den Doppelebenen der Involution entsprechenden Ebenen eC und eC^* des einfachen Ebenenbüschels e berührt.

Noch sei erwähnt, dass das Ebenenbüschel d auf k und e einfache projektive Punktreihen einschneidet, während das Ebenenbüschel e auf k eine involutorische, auf d eine einfache zu der des k perspektive Punktreihe bestimmt, und man demnach die Regelfläche auch durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser Reihen erhält.

Schneidet eine gerade Punktreihe e eine mit ihr projektive Reihe eines Kegelschnittes k in nicht perspektiver Lage, so erhält man durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte die Cayley'sche Fläche als besonderen Fall der Regelflächen dritten Grades. In ihr fallen die geraden Punktreihen d und e zusammen, wie man durch folgende Überlegung erkennt.

Man ziehe bei noch getrennter Lage der d und e in der Ebene des k die Verbindungslinie des Schnittpunktes E_1 der e und der Ebene des k mit dem dem Punkte E_1 der e entsprechenden Punkte des k, so schneidet diese den k noch in einem zweiten Punkte D_1, dem Schnittpunkte der d mit k. Fallen aber D_1 und E_1 zusammen, so ist die, durch E_1 (D_1) schneidend gegen irgend zwei Erzeugende der Fläche gelegte einzig mögliche Gerade sowohl e als d. Die Berührungspunkte B und B^* der aus E_1 an k gezogenen Tangenten fallen dann in E_1 zusammen, also auch die ihnen entsprechenden Doppelpunkte A und A^* der Involution auf e, und zwar in dem dem Punkte E_1 des k entsprechenden Punkt A der e, wie aus der projektiven Beziehung der Punktreihen e und k folgt.

Die Punktreihe e ist eine involutorische mit der Punktreihe d projektive Reihe. Die Doppelpunkte der Involution fallen in A zusammen, also liegt ein Punkt eines jeden Paares auf e in A, welcher Punkt dann jedem Punkte der d entspricht. Die anderen Punkte der Paare auf e bilden dann eine einfache mit der d projektive Reihe, und zwar fallen die entsprechenden Punkte der d und e als Schnittpunkte mit denselben Erzeugenden zusammen. Demnach fallen auch die den Doppelpunkten A und A^* der e entsprechenden Kuspidalpunkte C und C^* der d in A. Es ergiebt sich hieraus, dass die Leitgerade e eine Doppellinie und zugleich eine Kante der Fläche ist. Sie wird ihrem ganzen Verlaufe nach von der Ebene der e und der in E_1 an k gezogenen Tangente berührt, ausserdem aber in jedem von A verschiedenen Punkte P der e von einer wechselnden Ebene, die bestimmt ist durch die Gerade e und die durch diesen Punkt P gehende Erzeugende der Fläche.

306

Es mögen noch die Gleichungen der Fläche für die in den vorliegenden Modellen dargestellten Fälle hergeleitet werden, zunächst für die drei ersten Fälle als besondere Arten eines etwas allgemeineren sie umfassenden Falles.

Es stehe die d senkrecht auf der Ebene des als Leitkegelschnitt gewählten Kreises k, dessen Halbmesser r sei. Die d sei zur z-Axe des rechtwinklichen Koordinatensystems gewählt. Der kürzeste Abstand der e von d sei a und treffe die d in O, welcher Punkt als Koordinatenursprung angenommen sei. Die z-Axe sei positiv gezählt im Sinne von O nach dem Kreise k hin, dessen Abstand von O c sei. Als positive x-Axe sei der kürzeste Abstand a der d und e gewählt. Die y-Axe steht senkrecht zu beiden, positiv in einem Sinne, dass sich die e auf die yz-Ebene projiciert in den Winkel $(+y, +z)$. Die Mittelpunktskoordinaten des Kreises k sind

$$x = +m, \; y = n = +\sqrt{r^2 - m^2}, \; z = c.$$

Eine durch die z-Axe unter dem Winkel φ gegen die xz-Ebene (φ gezählt im Sinne $+x$, $+y$) gelegte Ebene schneidet den Kreis in einem Punkte, von dem zwei Koordinaten sind $x_1 = 2m \cos^2\varphi + 2n \sin\varphi \cos\varphi$, $z_1 = c$, die e in einem Punkte, für welchen $x_2 = a$ und $z_2 = a \,.\, \operatorname{tg}\varphi \,.\, b$, wenn b die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der e gegen die xy-Ebene bedeutet. Die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte schneidet auch die d oder z-Axe, und ist eine Erzeugende der Fläche. Wenn x, y, z die Koordinaten eines allgemeinen Punktes dieser Erzeugenden, also auch der Fläche sind, so gilt

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2}.$$

Setzt man die obigen Werthe in die letztere Gleichung ein und beachtet, dass

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \text{ und } \cos\varphi \sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

so ergiebt sich:

$$(z - c)(x - a) = \left(x - 2m \frac{x^2}{x^2 + y^2} - 2n \frac{xy}{x^2 + y^2}\right)\left(z - ab \frac{y}{x}\right).$$

Löst man die Klammern auf, multipliciert mit $\frac{x^2 + y^2}{ab}$ und ordnet, so erhält man

$$y^3 + x^2 y + \frac{2m - a}{ab} x^2 z - \frac{1}{b} y^2 z - 2m xy - 2n y^2 + 2 \frac{n}{ab} xyz$$
$$- c\left(\frac{1}{ab} x^3 + \frac{1}{ab} xy^2 - \frac{1}{b} x^2 - \frac{1}{b} y^2\right) = 0.$$

Setzt man hierin $c = 0$ und $n = 0$, so wird $m = +r$, und man erhält die Gleichung der Fläche für den ersten und zweiten Fall

$$y^3 + x^2 y + \frac{2r - a}{ab} x^2 z - \frac{1}{b} y^2 z - 2rxy = 0.$$

Für den ersten Fall ist $a < 2r$ für den zweiten $a > 2r$.

Setzt man dagegen $m = 0$, so wird $n = r$, also

$$y^3 + x^2 y - \frac{1}{b} x^2 z - \frac{1}{b} y^2 z - 2ry^2 + \frac{2r}{ab} xyz$$

$$- c\left(\frac{1}{ab} x^3 + \frac{1}{ab} xy^2 - \frac{1}{b} x^2 - \frac{1}{b} y^2\right) = 0.$$

Schiebt man jetzt den Kreis k parallel mit sich fort von O weg und lässt ihn gleichzeitig wachsen, so dass sein Halbmesser proportional mit dem Abstande von O zunimmt, dass also $r = ch$, wo h eine Constante, und lässt dann $c = \infty$ werden, so bleiben in der allgemeinen Gleichung nur die Glieder stehen, die ein c oder ursprünglich ein r enthalten. Teilt man durch c und multipliciert mit $-ab$, so erhält man die Gleichung

$$x^3 + xy^2 + \left(2h - \frac{1}{b}\right) aby^2 - ax^2 - 2hxyz = 0.$$

Will man, wie es im Modell geschehen ist, den Leitkreis durch eine Ellipse ersetzen, deren mit x parallele Halbaxe $= r$, deren mit y parallele Halbaxe $= fr$ ist, wo f eine beständige Zahl, so kann man die Umwandlung dadurch bewirken, dass man die frühere Fläche affin verwandelt, indem man die xz-Ebene als Affinitätsebene und die y-Ordinaten als Affinitätsstrahlen betrachtet; die früheren y gehen dann in $y' = fy$ über, während die x und z ungeändert bleiben. Die Neigung b der e wird zu $b' = \frac{1}{f} b$. Setzt man hiernach $y = \frac{1}{f} y'$, $b = fb'$ in die obige Gleichung ein und lässt die Striche weg, so erhält man die Gleichung der Fläche des Modelles

$$x^3 + \frac{1}{f^2} xy^2 + \left(2h - \frac{1}{fb}\right) \frac{ab}{f} y^2 - ax^2 - \frac{2h}{f} xyz = 0.$$

Den vierten Fall oder die Cayley'sche Fläche behandelt man aus dem Gesichtspunkte der projektiven Punktreihen auf dem Kreise k und auf der den Kreis schneidenden Geraden $e (= d)$. Man hätte alle Fälle aus diesem Gesichtspunkte für nicht schneidende k und e behandeln, und daraus alle Fälle ableiten können: doch scheint mir dadurch eine grössere Verwicklung zu entstehen. Die projektive Verwandschaft von k und e ist durch drei Paare entsprechender Punkte beider Linien bestimmt. Dem unendlich fernen Punkte U der e entspreche U' des k, dem Punkte V' des k, welcher auf demselben Durchmesser wie U' liegt, entspreche V der e, und dem allgemeinen Punkte W des k der Punkt W' der e. Es sei O der Schnittpunkt ek, und es stehe e senkrecht zur Ebene des k. Es

308

sei nun O zum Ursprung des rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt; die z-Axe falle mit der e zusammen, der Mittelpunkt des Kreises k liege auf der positiven x-Axe. In das Strahlenbüschel $O\,(U', V', W')$ kann man die Punktreihe e leicht perspektiv legen, wenn man e parallel OU' legt, also senkrecht OV', V in OV' bringt und e verschiebt, bis W in OW' fällt, wobei $OV = b$ werde. OV' bilde mit der positiven x-Axe den (unveränderlichen) Winkel β, OW' den veränderlichen φ. Dann ist $VW = b\,\mathrm{tg}\,(\varphi - \beta)$. Wird nun e beliebig in die z-Axe gelegt und sei $OV = a$, so entspricht dem Winkel φ ein Punkt des k mit den Koordinaten $x_1 = 2r\cos^2\varphi$, $z_1 = 0$, und ein Punkt der e mit den Koordinaten $x_2 = 0$, $z_2 = a + b\,\mathrm{tg}\,(\varphi - \beta)$. Die Gleichungen der Erzeugenden, welche beide Punkte W' und W verbindet, sind dann

$$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\varphi;\quad \frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2},$$

und man erhält durch Einführung der obigen Werthe in die letztere Gleichung:

$$(x - 2r\cos^2\varphi)\,(z - a - b\,\mathrm{tg}\,(\varphi - \beta)) = xz.$$

Beachtet man, dass, wenn man $\mathrm{tg}\,\beta = c$ setzt,

$$\cos^2\varphi = \frac{x^2}{x^2 + y^2},\quad \mathrm{tg}\,(\varphi - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\varphi\,.\,\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{y - cx}{x + cy},$$

so erhält man

$$2rz\,\frac{x^2}{x^2 + y^2} + ax - 2ra\,\frac{x^2}{x^2 + y^2} + bx\,\frac{y - cx}{x + cy}$$
$$- 2rb\,\frac{y - cx}{x + cy}\cdot\frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Entfernt man durch Multiplikation die Nenner, führt aus, ordnet und teilt durch $x\,(a - bc)$, so erhält man

$$x^3 + \frac{b + ac}{a - bc}\,y^3 + \frac{b + ac}{a - bc}\,x^2 y + \frac{2r}{a - bc}\,x^2 z - xy^2$$
$$+ \frac{2rc}{a - bc}\,xyz - 2rx^2 - 2r\,\frac{b + ac}{a - bc}\,xy = 0.$$

Karlsruhe, im Juli 1890.