

Faden-Modelle einiger einfachen Flächen

zum Gebrauche für Studierende.

Von

Dr. H. Wiener,

Professor der Math. an der Grossh. technischen Hochschule zu Darmstadt.

1. Bewegliches Modell von Umdreh-Hyperboloiden mit zwei Schaaren von Geraden.
2. Raumkurve vierter Ordnung mit unendlich fernem isolirtem Doppelpunkte als Schnitt eines Umdreh- und zweier parabolischen Cylinder.
- 3a. und 3b. Rechtwinkliges Paraboloid.
- 4a. und 4b. Cylinderd.
5. Cylinderd und rechtwinkliges Paraboloid vereint.

Nr. 1. Von einem Umdrehcylinder, der durch zwei zu seiner Axe senkrechte Ebenen begrenzt ist, kann man leicht ein Fadenmodell verfertigen, indem man die beiden Grenzkreise des Cylinders durch Drahringe darstellt, und zwischen beiden Ringen, die man mit Löchern versieht, z. B. in gleichen Abständen eine Anzahl gleich langer Fäden als Cylindererzeugende zieht. Hält man dann den einen (oberen) Ring in horizontaler Lage, so stellt sich der andere (untere) Ring von selbst horizontal ein, und die Fäden hängen sich vertikal zum Cylinder aus.

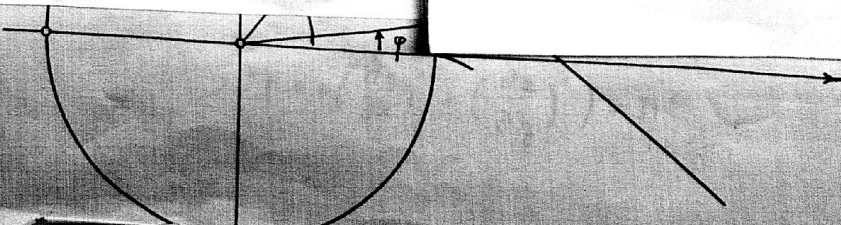
Fast man aber beide Ringe und dreht den einen um die Cylinderaxe, so stellen sich die Fäden zur Axe windschief, während sich gleichzeitig die Grenzkreise einander nähern. Die Fäden bilden dann ein einschaliges Umdreh-Hyperboloid, und man erhält durch Veränderung des Drehwinkels eine ganze Schaar solcher Flächen mit den Grenzfällen des Cylinders (in der Anfangslage) und des Kegels (bei einer Halbumdrehung).

Durch eine kleine Aenderung in der Anordnung dieses Modells kommt man zu Umdreh-Hyperboloiden mit zwei Schaaren von Erzeugenden. Hierzu braucht man nur durch Aufeinanderlegen zweier gleich grossen Ringe den oberen Grenzkreis doppelt darzustellen und von jedem dieser oberen Ringe, unabhängig vom anderen, Fäden nach dem unteren Ringe zu ziehen. Dreht man an dem so verfertigten Modell die beiden oberen Ringe in entgegengesetzter Richtung um denselben Winkel, so wird sich der untere Ring nicht drehen, sondern nur in der Richtung der Axe etwas heben. Beiderlei Fäden, die nach dem unteren Ring gezogen sind, werden für sich eine Regelschaar eines Umdreh-Hyperboloids bilden, und zwar ist es beide Male dasselbe Hyperboloid, dessen beide Schaaren Erzeugender die Fäden darstellen.

Das Modell Nr. 1 zeigt diese Anordnung. Am unteren Ringe sind noch drei in einem Knoten zusammenlaufende Fäden angebracht, um durch Anhängen eines Gewichtes die Fäden straffer ziehen zu können. Befestigt man die beiden oberen Ringe nach der Drehung durch Klammern an einander, so kann man den unteren Theil des Modells nach oben kehren und so an dem beigegebenen dreifüssigen Gestell aufhängen.

Die drei zusammengeknöteten Fäden dienen auch dazu, nach Entfernung der Klammern das Modell wieder zum Cylinder auszuhängen; nach einer Ueberdrehung oder bei Verwirrung der Fäden lässt sich durch ein solches Aushängen sofort wieder Ordnung schaffen. Will man das Modell platt hinlegen, so empfiehlt sich, um Wirrungen zu vermeiden, es erst zum Kegel zusammenzudrehen.

Nr. 2. Wenn man eine Sinuslinie so auf einen Kreiscylinder aufwickelt, dass sie sich nach zwei vollen Wellen schliesst, so erhält man eine Raumkurve vierter Ordnung, die gleichzeitig auf einem ganzen Büschel von Flächen zweiter Ordnung liegt, und unter diesen Flächen sind ausser dem Kreiscylinder noch zwei parabolische Cylinder, die so liegen, dass ihre Scheitelerzeugenden einander senkrecht kreuzen und die Axe des Kreiscylinders



senkrecht treffen. Die Kurve hat in dem unendlich fernen Punkt dieser Axe, in dem sich die parabolischen Cylinder berühren, einen isolirten Doppelpunkt, sodass der Kreiscylinder doppelt zu rechnen ist, und kein weiterer Cylinder oder Kegel dem Büschel angehört.

Das Modell Nr. 2 enthält diese 3 Cylinder, dargestellt durch Fäden, welche in einem aus Messingstreifen verfertigten Rahmen gespannt sind. Dabei ist nicht eine reine Sinuslinie auf den Cylinder aufgewickelt gedacht, sondern eine solche, die in der Richtung der Cylindererzeugenden affin gestreckt ist.

Nr. 3 u. 4. Die eben erwähnte Raumkurve vierter Ordnung hat zwei Symmetrieebenen, nämlich diejenigen, die gleichzeitig für die parabolischen Cylinder Symmetrieebenen sind, ferner drei einander senkrecht schneidende Symmetrieebenen, nämlich die Cylinderaxe und zwei andere, welche durch die Mitte des Stückes gehen, das zwischen den beiden Scheitelerzeugenden dieser Cylinder liegt. Denkt man sich diejenigen Punkte der Raumkurve mit einander verbunden, welche sich an der einen oder anderen jener Symmetrieebenen ineinander spiegeln, so erhält man die beiden parabolischen Cylinder. Denkt man sich die Punkte verbunden, welche symmetrisch zu einer der beiden letztgenannten Symmetrieebenen liegen, so erhält man eine Regelschaar eines rechtwinkligen Paraboloids, und ebenso bei Benutzung der anderen Symmetrieebene die andere Schaar desselben rechtwinkligen Paraboloids. Dieses Paraboloid gehört zu dem erwähnten Büschel von Flächen zweiter Ordnung.

Verbindet man endlich solche Punkte, die symmetrisch zur Cylinderaxe liegen, so erhält man die Geraden eines Cylindroids (Plücker'schen Konoids).

In den Modellen Nr. 3 und 4 ist die Raumkurve 4. Ordnung durch einen Messingdraht dargestellt, der so gebohrt ist, dass durch verschiedenartiges Spannen der Fäden das rechtwinklige Paraboloid (Modell Nr. 3) oder das Cylindroid (Nr. 4) entsteht.

Diese Flächen sind in zwei Ausführungen hergestellt: a) in der Gestalt der Raumkurve, wie beim Modell Nr. 2 und b) in einer Gestalt, bei der die reine Sinuslinie auf den Cylinder aufgewickelt ist, wie sie nachher auch im fünften Modell auftritt. In jedem rechtwinkligen Paraboloid und in jedem Cylindroid giebt es einen Cylinder, der die Fläche in einer Kurve gerade von dieser Gestalt schneidet. Jedem Modell ist ein Gestell beigegeben, das es mit der Axe lothrecht aufzustellen gestattet.

Nr. 5. Sind zwei windschiefe Geraden gegeben und man sucht zu ihnen:

- 1) alle Punkte, die von beiden Geraden den gleichen Abstand besitzen,
- 2) alle Mittelebenen zwischen je einem Punkt der einen und einem Punkt der anderen Geraden,
- 3) alle Geraden, die als Axen einer Drehung dienen können, welche die erste der gegebenen Geraden im einen oder anderen Sinne in die zweite überführt, so erhält man die Punkte, die Berührebenen und die beiden Schaaren erzeugender Geraden eines rechtwinkligen Paraboloids.

Ist umgekehrt ein rechtwinkliges Paraboloid gegeben, und man sucht zu ihm das Geradenpaar, aus dem es in der angegebenen Weise hervorgehen kann, so ist diese Aufgabe nicht ein-, sondern unendlich vieldeutig lösbar. Man erhält nämlich alle Geraden eines Cylindroids, und zwar in solchen Paaren, die symmetrisch zu dem beiden sich senkrecht schneidenden Geraden des Paraboloids liegen. Schneidet man das Paraboloid mit einem Umdrehcylinder, der seine Axe in der des Paraboloids liegen hat und der das Paraboloid in einer aufgewickelten reinen Sinuslinie schneidet, so trifft er das Cylindroid in einer damit kongruenten Kurve. Beide Kurven liegen um einen rechten Winkel gegen einander gedreht, so dass die beiden einander senkrecht schneidenden Erzeugenden des Cylindroids mit denen des Paraboloids zusammenfallen.

Das Modell Nr. 5 zeigt das Cylindroid und das rechtwinklige Paraboloid in dieser Lage vereint und begrenzt durch zwei kongruente Kurven vierter Ordnung, die wieder mittelst durchbohrter Drähte dargestellt sind.

Preis der ganzen Serie 11 Mark
excl. Verpackung und Versandkosten.

Bei Einzelbezug der Modelle kostet Nr. 1: 1 Mark 80 Pf., Nr. 2: 1 Mark 60 Pf., Nr. 3a, 3b, 4a u. 4b je 1 Mark 20 Pf., Nr. 5: 3 Mark.

Darmstadt, 1896.

Die Verlagshandlung

L. Brill.