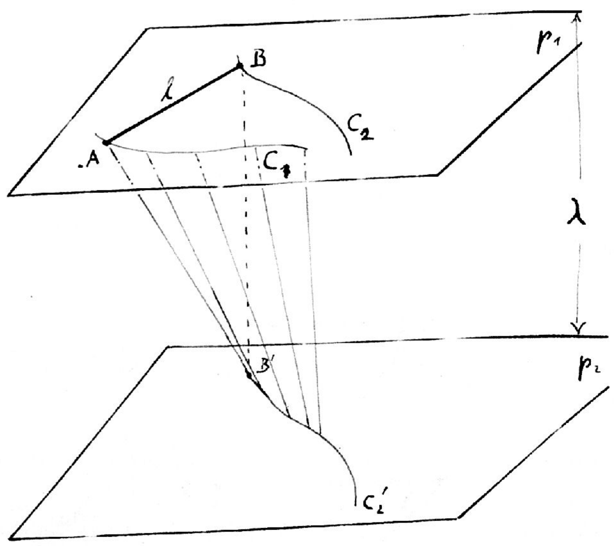
Modelle von Regelflächen, deren Schnitte durch Ebenen parallel einer gegebenen von Mechanismen gezeichneten Kurven sind. ([redacted] [1])



Die Strecke AB von der Länge l bewegt sich irgendwie in der Ebene p_1; die Bahn von B wird orthogonal auf eine zu p_1 parallele Ebene p_2 projeziert. A beschreibt den Weg C_1, B den Weg C_2; seine Projektion sei C_2'.

Zusammengehörige Punkte von C_1 und C_2' werden verbunden durch Gerade; so entsteht eine Regelfläche. Jeder Schnittkurve dieser Regelfläche mit einer im Abstande $c\lambda$ zu p_1 parallelen Ebene p liefert die Bahnkurve desjenigen Punktes der Strecke AB, der von A den Abstand cl hat.

Der Ortsvektor von C_1 sei $\mathfrak{r}_1(t)$, der von C_2 sei $\mathfrak{r}_2(t)$; $\mathfrak{n}$ sei ein Einheitsvektor normal zu beiden Ebenen; λ ihr Abstand. Dann ist $\mathfrak{r}_2'(t) = \mathfrak{r}_2(t) + \lambda\mathfrak{n}$ und die Gerade durch $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2'$ hat die Gleichung $\mathfrak{r}(t,s) = \mathfrak{r}_1(t) + s(\mathfrak{r}_2'(t) - \mathfrak{r}_1(t))$; also die Gleichung der Regelfläche

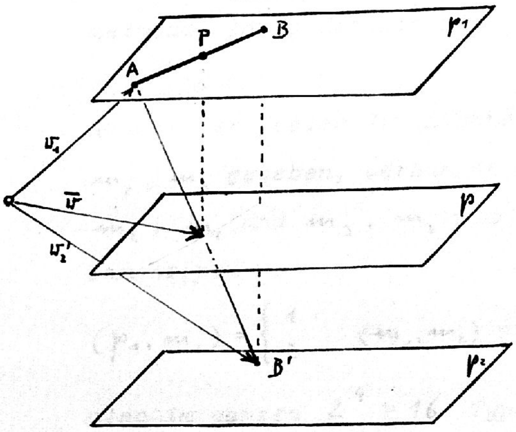
$$\mathfrak{r}(t,s) = \mathfrak{r}_1(t) + s(\mathfrak{r}_2(t) - \mathfrak{r}_1(t) + \lambda\mathfrak{n}).$$

Schnitt der Regelfläche mit einer zu p_1 parallelen Ebene im Abstand $c\lambda$:

---

1) Konstruiert von E.M.Blake. Diese Ausarbeitung von G.Grüss.

Man gelangt zu einem Punkt der Schnittkurve, wenn man von dem Punkt $v_1(t)$ auf der zugehörigen Geraden so weit geht, bis ihre Projektion auf die Normale n gleich $c\lambda$ ist, denn der Abstand dieses Punktes von der Ebene p_1 ist dann $c\lambda$, d.h. der Punkt liegt in der Schnittebene p.



$$(\bar v - v_1) = c\lambda$$

$$\bar v = v(t, \bar s) = v_1 + \bar s(v_2 - v_1 + \lambda n)$$

$$(\bar v - v_1)n = \bar s(v_2 - v_1)n + \bar s\lambda n^2 = c\lambda \quad (v_2 - v_1 \perp n)$$

also $\bar s = c \quad (\lambda \neq 0)$

d.h. die Gleichung der Schnittkurve der Regelfläche mit der Ebene p ist

$$v(t) = v_1 + c(v_2 - v_1) + c\lambda n .$$

Diese Kurve entsteht, wenn man die Bahn des Punktes P der Strecke AB, der von A um $c\lambda$ entfernt ist, auf die Ebene p projiziert:

$$v(t) = v_1(t) + c\lambda \frac{v_2 - v_1}{|v_2 - v_1|} + c\lambda n$$

Die Regelfläche wird von der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten ℓ und λ beschrieben, wenn die Kathete ℓ in der Ebene p_1 bewegt wird und die Kathete λ senkrecht zu p_1 gehalten wird. Dann folgt sofort

$$\frac{AP}{AB} = \frac{c\lambda}{\lambda} \quad ; \quad AP = c\ell .$$

Die Erzeugung der Bewegung der Strecke AB in der Ebene p_1.

Die allgemeine Bewegung von ℓ hat drei Freiheitsgrade. Wir spezialisieren diese Bewegung, indem wir sie durch Mechanismen von einem resp. zwei Freiheitsgraden erzeugen.

Die Mechanismen bestehen aus Ebenen, die mit der Ebene p_1 zusammenfallen und in bestimmter Weise untereinander verbunden sind. Wir unterscheiden zwei Typen solcher Verbindungen : "Kopplung 1" : zwei Ebenen haben immer einen und denselben Punkt gemeinsam (um den sie sich also drehen, Zapfen). "Kopplung 2" : zwei Ebenen haben eine Gerade gemeinsam, längs der sie sich verschieben (gerade Führung).

Ausser der festen Grundebene p_1 seien nun drei Ebenen m_1, m_2, m_3 gegeben, verbunden seien p_1 und m_1, m_1 und m_2, m_2 und m_3, m_3 und p_1. Möglich sind die "Kopplungstypen" :

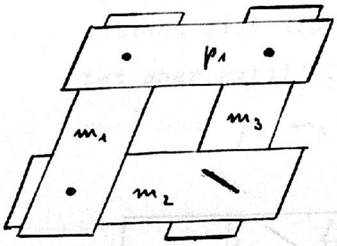
$$(p_1, m_1) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \quad (m_1, m_2) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \quad (m_2, m_3) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \quad (m_3, p_1) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

also im ganzen $2^4 = 16$ Typen.

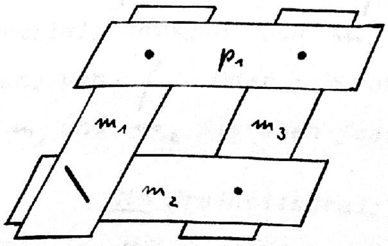
Diese Kopplungstypen sind :

(p_1, m_1)	(m_1, m_2)	(m_2, m_3)	(m_3, p_1)
1	1	1	1
1	1	1	2
1	1	2	1
1	1	2	2
1	2	1	1
1	2	1	2
1	2	2	1
1	2	2	2
2	1	1	1
2	1	1	2
2	1	2	1
2	1	2	2
2	2	1	1
2	2	1	2
2	2	2	1
2	2	2	2

Diese sechzehn Fälle führen nun nicht alle zu verschiedenen Ergebnissen; denn die Nummerierung der Ebenen m_1, m_2, m_3, ist ja willkürlich (während die "feste" Ebene p_1 ausgezeichnet ist), d.h. es sind die Kopplungstypen identisch, die durch Vertauschung bon m_1 mit m_3, m_1 mit m_2 m_2 mit m_3 hervorgehen :



≈

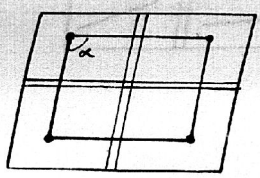


Danach fallen die als gleich gekennzeichneten Typen zusammen und es bleiben folgende zehn wesentlich verschiedene Typen :

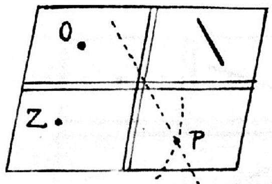
1111, 1112, 1121, 1122, 1212,

1221, 1222, 2112, 2122, 2222.

<u>Untersuchung der Freiheitsgrade der zehn Kopplungstypen:</u>



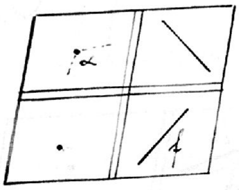
1) Kopplung (1111) <u>Ein</u> Freiheitsgrad, Gelenkmechanismus mit drei Stangen. Wenn fest α gewählt ist, ist das Gelenkviereck starr.



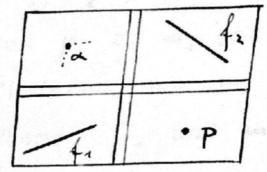
(1112) <u>Ein</u> Freiheitsgrad; denn entweder Ebene p_1 und m_1 festgelegt, dann sind m_2 und m_3 fest, da P auf der Parallelen zur Führung und auf dem Kreis um den Zapfen Z liegt, oder p_1, m_3 fest, dann ist Dreieck PZO durch seine Seiten bestimmt.

(1121) <u>1</u> Freiheitsgrad; wie im vorigen Fall.

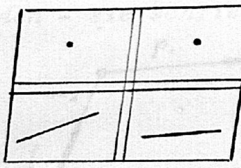
1) Anordnung der vier Ebenen in allen Figuren wie oben ausführlich angegeben.



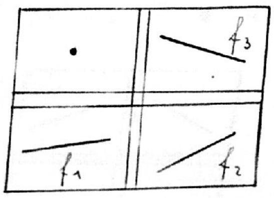
(1122) Ein Freiheitsgrad; da durch Fixierung des Winkels α (Ebene p_1, m_1) die Lage von m_2 und m_3 auch festgelegt ist. Denn bei Bewegung von m_2 beschreiben die Punkte der Führung f Kreisbögen, f verschiebt sich also nicht parallel; Bewegung von m_3 bedeutet aber Parallelverschiebung von f. Oder : Durch Fixierung von p_1, m_3 werden m_1 und m_2 wie oben festgelegt.



(1212) Ein Freiheitsgrad; wenn p_1, m_1 durch Angabe von α fixiert sind, liegen m_2 und m_3 fest, weil P auf dem Schnitt der Parallelen zu f_1 und f_2 liegt.

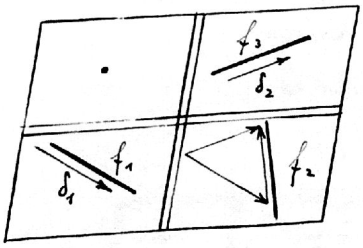


(1221) Ein Freiheitsgrad. Wie im Vorhergehenden.



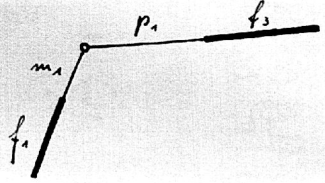
(1222) Ein Freiheitsgrad, denn wenn man die gegenseitige Lage von p_1 und m_3 beispielsweise fixiert, liegen auch m_1 und m_2 fest (wie oben). Wenn man p_1 und m_1 fixiert, also keine Drehung um den Zapfen zulässt, sind m_2 und m_3 noch nicht festgelegt. Denn man kann m_2 in Richtung der Führung f_1 und zugleich m_3 in

Richtung f_3 so verschieben, dass m_2 und m_3 immer längs f_2 zusammenhängen, (es ist nur noch eine Verschiebung von f_2 in sich nötig)



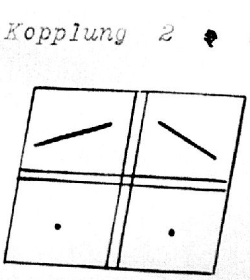
Verschiebungen δ_1 und δ_2 so dass $\delta_2 - \delta_1 = f_2$ ist.

So hat dieser Kopplungstyp scheinbar doch zwei Freiheitsgrade, da das System erst fixiert ist, wenn p_1, m_1 und z.B. m_1, m_2 fixiert sind. In Wirklichkeit kann man die Lage von p_1 zu m_1 gar nicht willkürlich fixieren, so dass die Fixierung von m_1 und m_2 allein genügt. Denn die beiden Ebenen p_1 und m_1 haben eine wohlbestimmte Lage zueinander und können also nicht um den Zapfen gedreht werden, weil die Führungen f_1 und f_3, die ja m_1 und p_1 angehören, stets einen und denselben Winkel miteinander bilden - sie schliessen beide mit f_2 konstante Winkel ein!

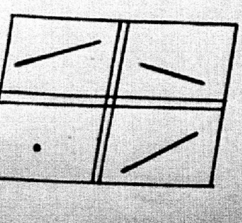


p_1 und m_1 bilden also eine Ebene (Punkt gemeinsam und Winkel zwischen f_1 und f_3 konstant).

Die Bewegung von m_2 besteht also darin, dass m_2 längs der Führung f_1 bewegt wird (dadurch ist die Lage von m_3 mitbestimmt). Der ganze Mechanismus ist also äquivalent einer Kopplung 2 • zwischen p_1 und m_2.

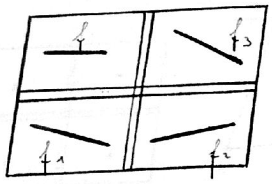


(2112) Ein Freiheitsgrad. Wie oben.

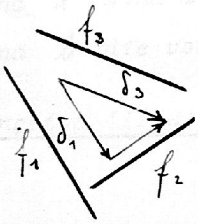


(2122) Ein Freiheitsgrad; die Ebenen m_1 und m_2 sind (wie im vorletzten Fall p_1, m_1)

fest verbunden, die Kopplung 1 ist also überflüssig; man hat drei Ebenen p_1 , m_1 , m_3 , die aneinander in Führungen gleiten. Dieser Kopplungstyp ist also auch <u>einer</u> Kopplung 2 äquivalent.: m_1 gleitet an p_1 , Lage von m_3 ist bestimmt.



(2222) <u>Zwei</u> Freiheitsgrade; denn für jede relative Lage von p_1 zu m_1 gibt es ∞^1 Bogen von m_2 und m_3 .



$$\delta_3 - \delta_1 = \bar{f}_2 \lambda$$

($\bar{f}_2$ Einheitsvektor in Richtung der Führung f_2 , λ Skalarfaktor).

$$\delta_3 = \bar{f}_2 \lambda + \delta_1 \;;$$

zu jedem δ_1 gibt es ein passendes δ_3 .

Wir benutzen die durch die zehn Kopplungstypen bestimmten Mechanismen zue Erzeugung der Bewegung der Strecke l in der Ebene p_1 dadurch, dass wir l in der Ebene m_2 fest gegeben denken und nun m_2 gegen p_1 bewegen.

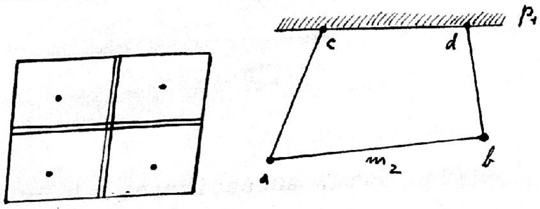
Dabei scheiden zur Konstruktion der Regelflächen die Mechanismen (1222),(2122),(2222) aus; die ersten beiden Mechanismen gestatten ja nur eine Verschiebung von m_2 zu p_1 längs <u>einer</u> Führung, so dass die in m_2 festgelegte~~n~~ Strecke l parallel zu sich selbst verschoben wird. Wir erhalten also als Regelfläche eine Ebene - und dieser triviale Fall soll ausgeschlossen werden.

Der Mechanismus (2222) liefert eine Bewegung von zwei Freiheitsgraden der Strecke l in p_1 ; die Endpunkte von

l beschreiben daher keine Kurven sondern Gebiete von ∞^2 Punkten.

Modelle existieren zu den Kopplungstypen (1111), (1112), (1221), (2112).

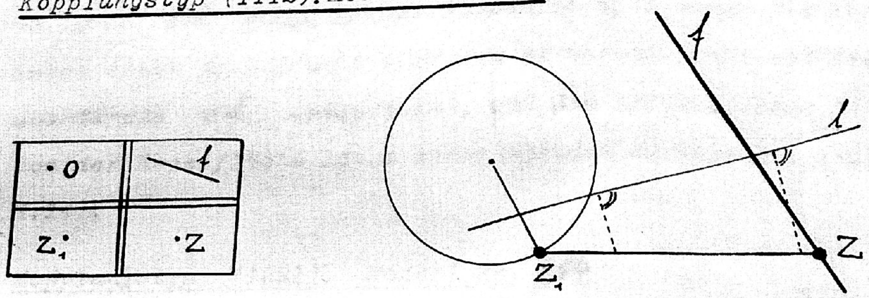
Kopplungstyp (1111), Gelenkviereck. Modell Nr. 642.



Als Strecke l der Ebene m_2, deren Bewegung in p_1 verfolgt wird, ist eine in der Geraden ab liegende Strecke AB genommen.

c und d sind die Kopplungen von p_1 mit m_1 bezw. m_3, a und b die von m_2 mit m_1 bezw. m_3.

Kopplungstyp (1112). Modell Nr. 648



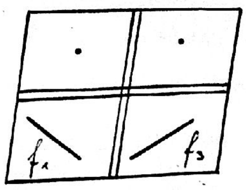
m_3 bewegt sich zu p_1 längs f, also auch längs jeder zu f parallelen Geraden, so dass ich als Führung die durch den Zapfen Z von m_2, m_3 gehende Parallele zu f nehmen kann. Z bewegt sich jetzt also auf einer in p_1 liegenden Geraden. Als Strecke l in m_2 nehme ich eine Strecke, die auf der Geraden durch die beiden Zapfen Z und Z_1 liegt; Z_1 dreht sich um O. Also besteht der Mechanismus (1112) schliesslich in folgendem :

Die Strecke l (deren Endpunkte die Schnitte der Regelfläche mit den Ebenen bilden) liegt auf der Geraden ZZ_1, Z bewegt sich auf der geraden Führung, Z_1 auf dem Kreis um O.

Das Modell ist speziell so konstruiert, dass die Führung den Kreis berührt, und dass ab gleich dem Durchmesser des Kreises $(Z = a,\ Z_1 = b)$ ist.

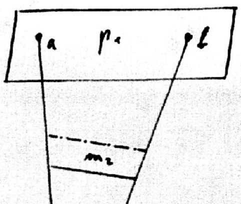
Jeder Punkt der Geraden ab beschreibt eine Kurve, die die Gerade cd in zwei Punkten berührt, nämlich immer dann, wenn b bei seiner Wanderung auf der Peripherie in den Berührungspunkt von Kreis und Gerade kommt, und das passiert bei den speziellen dem Modell zugrundeliegenden Massen zweimal, da a auf beiden Seiten des Berührungsradius liegen. (Wäre ab grösser als der Durchmesser des Kreises, dann würde es zwei getrennte geschlossene Kurven geben). Jede dieser Kurven stellt nun den Schnitt der Regelfläche mit einer bestimmten zur Erzeugenden parallelen Ebene dar; die Gerade cd, die alle Kurven berührt, erzeugt bei orthogonaler Projektion eine zur Ebene p_1 vertikale Ebene. Dass die Kurben die Gerade berühren, bedeutet also, dass die Regelfläche von der Vertikalebene durch cd längs zweier Kurven berührt wird. Die Kurven haben einen Doppelpunkt (der dem Berührungspunkt von Kreis und Gerade cd entspricht), und die Vertikalebene wird von der Regelfläche längs einer Geraden durchsetzt. (Vgl. auch S.14).

Kopplungstyp (1221). Modell Nr. 644.

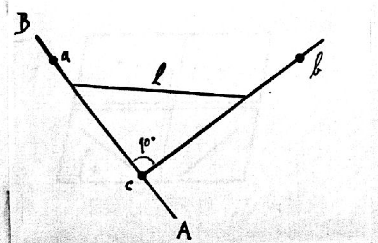


m_2 gleitet längs f an m_1, also auch längs irgend einer zu f parallelen Führung; z.B. längs der durch den Zapfen, der p_1 und m_1 verbindet.

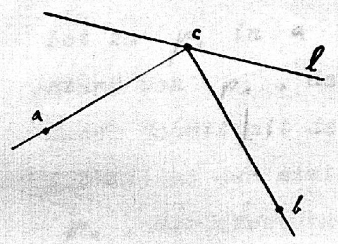
Ebenso kann ich f_3 durch den die Ebenen p_1 und m_3 verbindenden Zapfen zeichnen, ohne zu spezialisieren.

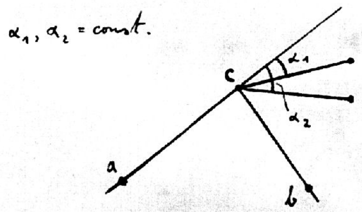


m_2 gleitet also längs den beiden um a und b drehbaren Geraden, Die Strecke l, die wir in p_1 bewegen wollen, liegt in m_2 fest, d.h. schliesst mit den Führungen durch a und b konstante Winkel ein. Das Modell ist durch sehr viel speziellere Lage der Führungen und der Strecke l entstanden : 1. Die beiden Führungen stehen senkrecht aufeinander, so dass ihr Schnittpunkt c einen Kreis bei der Bewegung des Mechanismus beschreibt. 2. Als erzeugende Strecke der Ebene m_2 ist die eine Führung genommen, also eine auf der Geraden ca liegende Strecke AB . Wenn man nur die erste Einschränkung , $\sphericalangle acb = \frac{\pi}{2}$, beibehält, hat man als Strecke l die Hypotenuse irgend eines Dreiecks mit der Spitze c zu nehmen oder eine Strecke durch c selbst, die ihre Lage zu den beiden Schenkeln ac und bc nicht ändert.

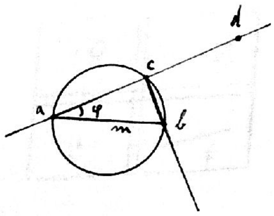


Jede Strecke l erzeugt eine andere Regelfläche; denn ich kann zur Erzeugung der Fläche erstens die Kreisbahn des Punktes c und zweitens die Bahn irgend eines anderen Punktes von l benutzen, so dass die Regelflächen, die bei zwei verschiedenen Lagen von l entstehen, den Kreis gemeinsam haben, während einem und demselben Kreispunkt zwei verschiedene Punkte entsprechen; dann sind aber die beiden erzeugenden Geraden der Flächen gegeneinander geneigt. Die Flächen werden nicht gleich, sie gehen gewissermassen durch eine "Verwindung" ineinander über. (Der Verdrehungswinkel um den Mittelpunkt des von c beschriebenen Kreises ist nicht konstant).





Wir kehren zu dem Spezialfall zurück, dass die Strecke l auf der Geraden ac liegt. Irgend ein Punkt d mit dem Abstand d von c beschreibt eine Pascal'sche

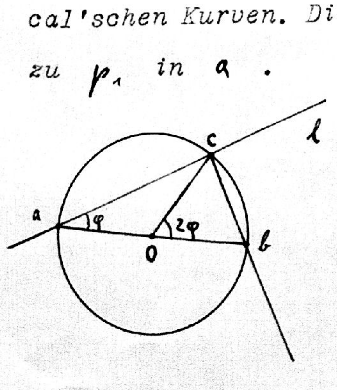


Kurve $\overline{ab} = m$: $r = m\cos\varphi + d$
$d > 0$

(a Anfangspunkt des Polarkoordinatensystems.)

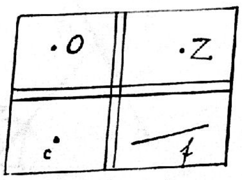
Ist $d < m$, dann ist die Pascal'sche Kurve verschlungen, für $d = m$ geht sie in die Cardeoide über, für $d > m$ ist sie gestreckt. Für $d < 0$ erhält man genau dieselben Kurven, nur dass sich die Argumente um π unterscheiden : $r = -m\cos(\pi - \varphi)$ wo jetzt $d > 0$ ist, $r = -(m\cos(\pi-\varphi) + d)$.
Der Schnitt der Regelfläche mit jeder zur Ebene p_1 (Kreisebene) parallelen Ebene ist also eine Pascal'sche Kurve. Zwei Ebenen schneiden in Cardeoiden, deren Spitzen auf dem Lot zu p_1 in a liegen; diese Ebenen haben gleichen Abstand von p_1, da der Abstand der Ebene, die die Kurve durch Schnitt mit der Regelfläche erzeugt, von p_1 proportional ist dem Abstand des Punktes auf der Strecke l in p_1, der dieselbe Kurve kinematisch erzeugt. (vgl. S.2.) Hier ist $d = \pm m$, die Abstände der Ebenen von p_1 sind also proportional $\pm m$.

Die Ebenen, die zwischen denen, die die Cardenoiden erzeugen, und p_1 liegen, schneiden in verschlungenen Pascal'schen Kurven. Die Doppelpunkte liegen alle auf dem Lot zu p_1 in a.

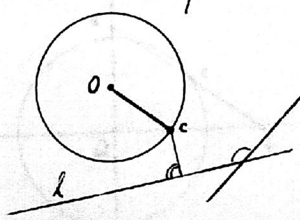


c beschreibt den Kreis doppelt, da sich die Führung ac um den Zapfen a einmal dreht.

Man kann nun c mit O durch ein Gelenk verbinden und die Führung cb aufgeben und erhält so einen Mechanismus vom Kopplungstyp (1121), aber natürlich wieder einen Spezialfall :

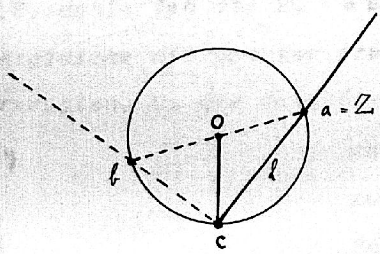


(1121) f kann durch Z gelegt werden ohne Spezialisierung; die Strecke in der Ebene m_2 ist eine beliebige starr mit der Führung f und dem Zapfen c verbundene Strecke.



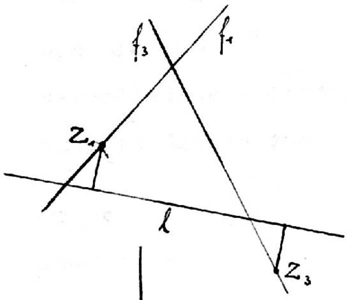
Die Spezialisierung, die diesen Fall in den obigen überführt, besteht darin, dass

1. c auf der Führung f liegt,
2. die Strecke l auf f liegt,
3. der Zapfen Z auf dem von c beschriebenen Kreis liegt.

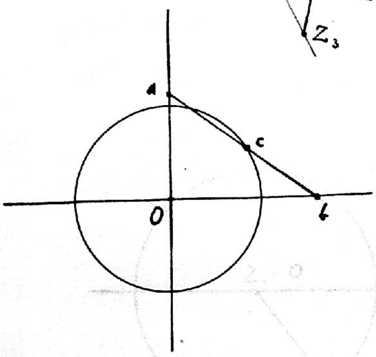


Kopplungstyp (2112). Ellipsograph. Modell Nr. 645.

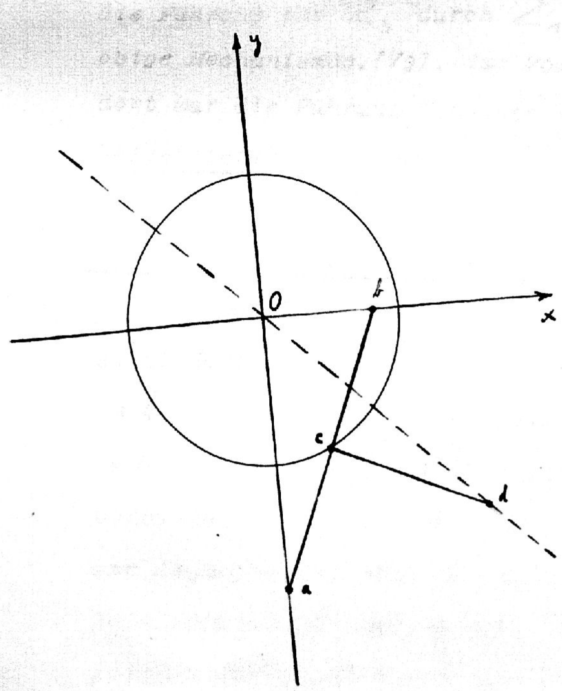
f_1 kann durch Z_1, f_3 durch Z_3 gelegt werden, so dass die Zapfen Z_1, Z_3 in der Ebene μ_1 liegenden Führungen gleiten. Die Strecke l der Ebene m_2 ist eine mit Z_1, Z_2 starr verbundenen Strecke.



Für das Modell ist der Mechanismus dahin spezialisiert, dass die Strecke l in der Geraden Z_1, Z_3 ,liegt und dass zweitens f_1 und f_3 zueinander senkrecht stehen. Dann beschreibt der Mittelpunkt c von ab einen Kreis um O, die anderen Punkte der Geraden ab beschreiben Ellipsen, die für a und b selbst zu Geraden (zweimal durchlaufen) degenerieren.

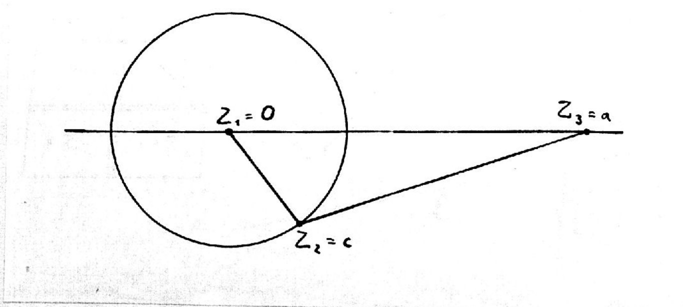


Irgend welche Geraden durch c geben aber nicht dieselben Flächen. Z.B. wähle ich die zu ab in c senkrechte Gerade und vergleiche die von ihr erzeugte Fläche mit der von ca erzeugten. Um die Schnitte der Flächen mit einer zu p_1 parallelen Ebene zu bekommen – durch diese Schnitte und den Kreis von c ~~und~~ in p_1 wird die Fläche bestimmt – , muss man auf beiden Geraden ca und cd gleiche Stücke abtragen. Nimmt man $cd = ca$ = Kreisradius, dann durchläuft, wenn c einmal den Kreis beschreibt, a die y-Achse von $-2|ac|$ bis $2|ac|$, d die



Gerade $y=-x$ von $y=|ac|\sqrt{2}$ bis $y=-|ac|\sqrt{2}$. Einem und demselben Punkt c auf dem Kreis entsprechen Punkte a und d, die durch Drehung von cd um $-\frac{\pi}{2}$ oder von ca um $\frac{\pi}{2}$ ineinander übergehen. So entstehen aber verschiedene Flächen, die sich auch nicht durch eine Drehung im Ganzen ineinander überführen lassen.

Da c einen Kreis beschreibt, kann man ein Gelenk cO anbringen und dafür die Führung Ob weglassen. Man erhält dann einen Mechanismus vom Kopplungstyp (1112).



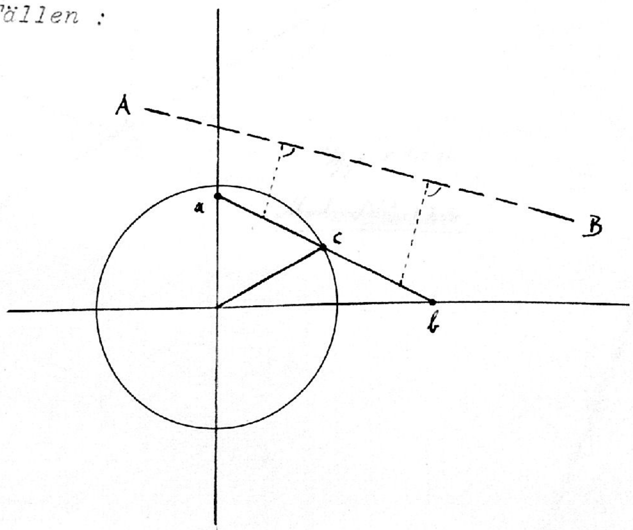
Strecke l der Ebene m_2 fest mit Z_2 und Z_3 verbunden, Z_2 auf Kreis um Z_1, Z_3 auf Führung in p_1.

Zwei Spezialisierungen : l durch Z_2 und Z_3 gelegt und die Führung von Z_3 durch Z_1 gelegt - das ist genau der obige Mechanismus. (Vgl. das Modell für Typ (1112) S. 9); dort war die Führung Tangente an den Kreis! Hier : Schubkurbelgetriebe).

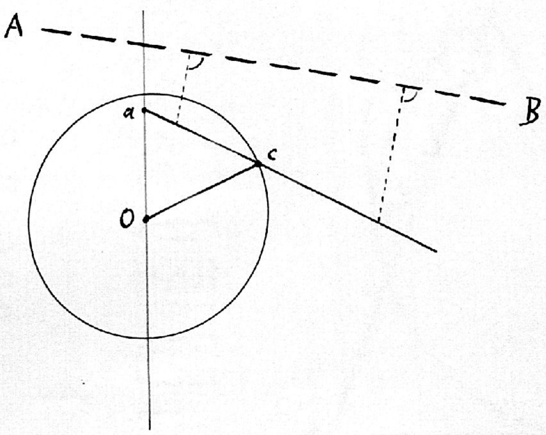
Kopplungstyp (2112) Modell Nr. 646.

Der Unterschied von dem vorhergehenden Modell besteht darin, dass dort die Strecke l der Ebene m_2 auf ab angenommen wurde, dass hier dagegen l nicht auf ab liegt. AB, PQ sind Gerade, die mit ab starr verbunden sind; wenn l auf AB liegt, entsteht die weisse Kegelfläche, wenn l auf PQ liegt, die rote. Der Schnittpunkt d der Geraden AB, PQ erzeugt die Projektion der Schnittkurve der Flächen.

c Da die Führungen der Punkte a und b senkrecht zueinander sind, bewegt sich c wieder auf dem Kreis um O und wir haben wieder die Uebereinstimmung der Kopplungstypen (2112) und (1112) hier nur weniger speziell in beiden Fällen :



(2112)



(1112)

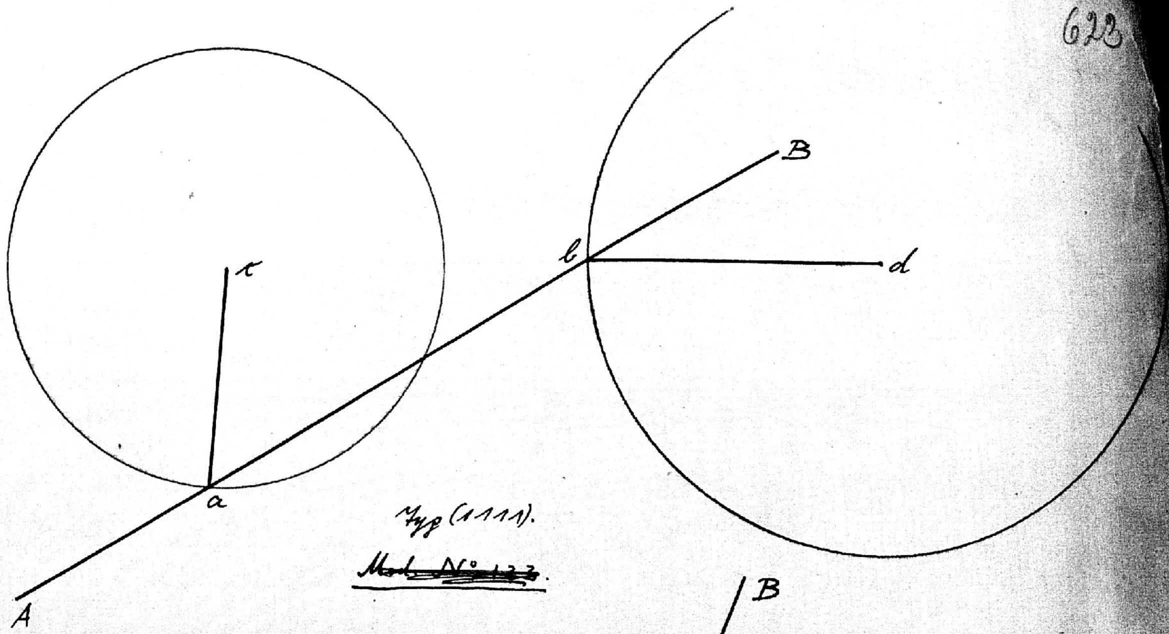


Fig (1111).

Mod. N° 123.

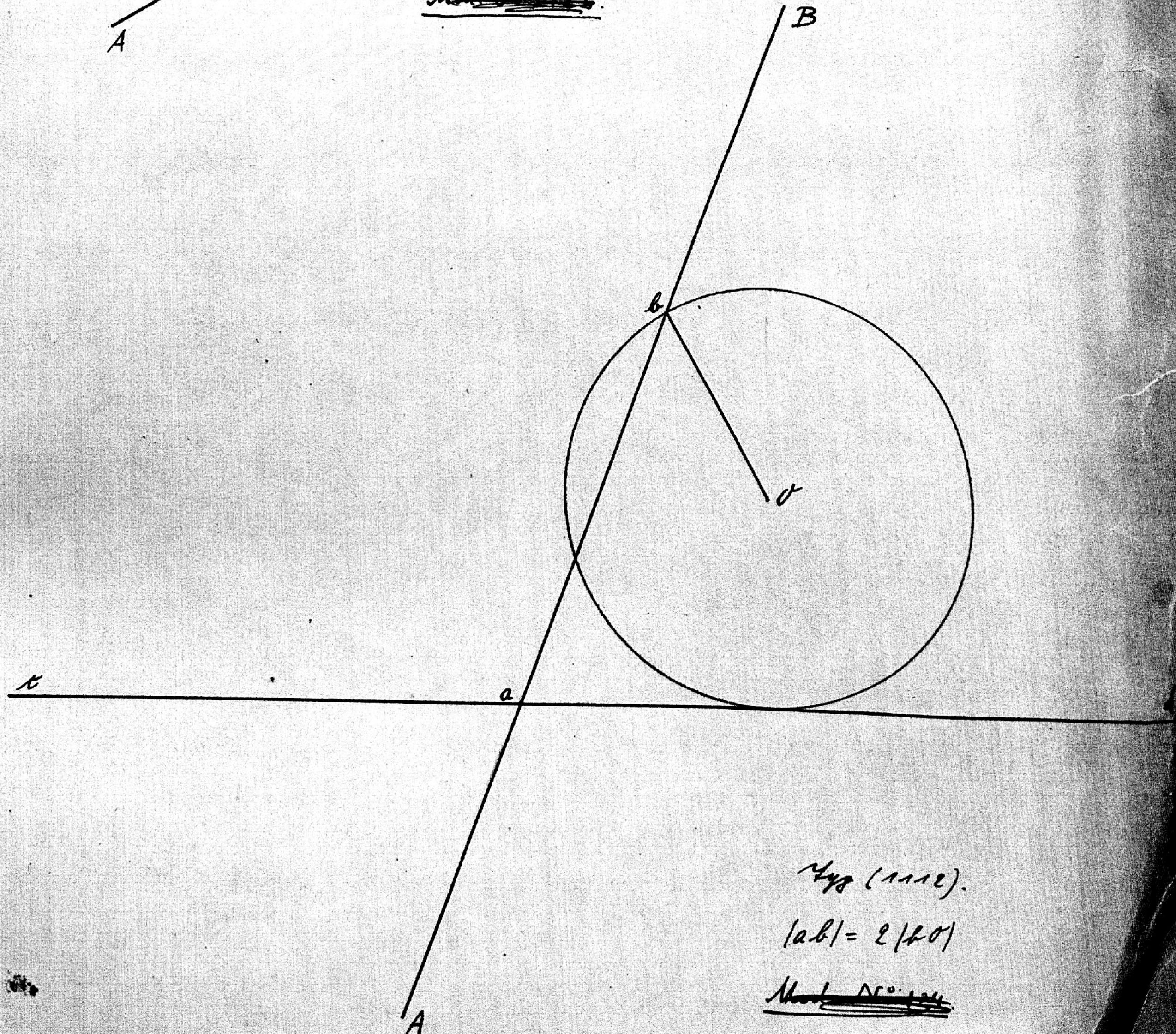
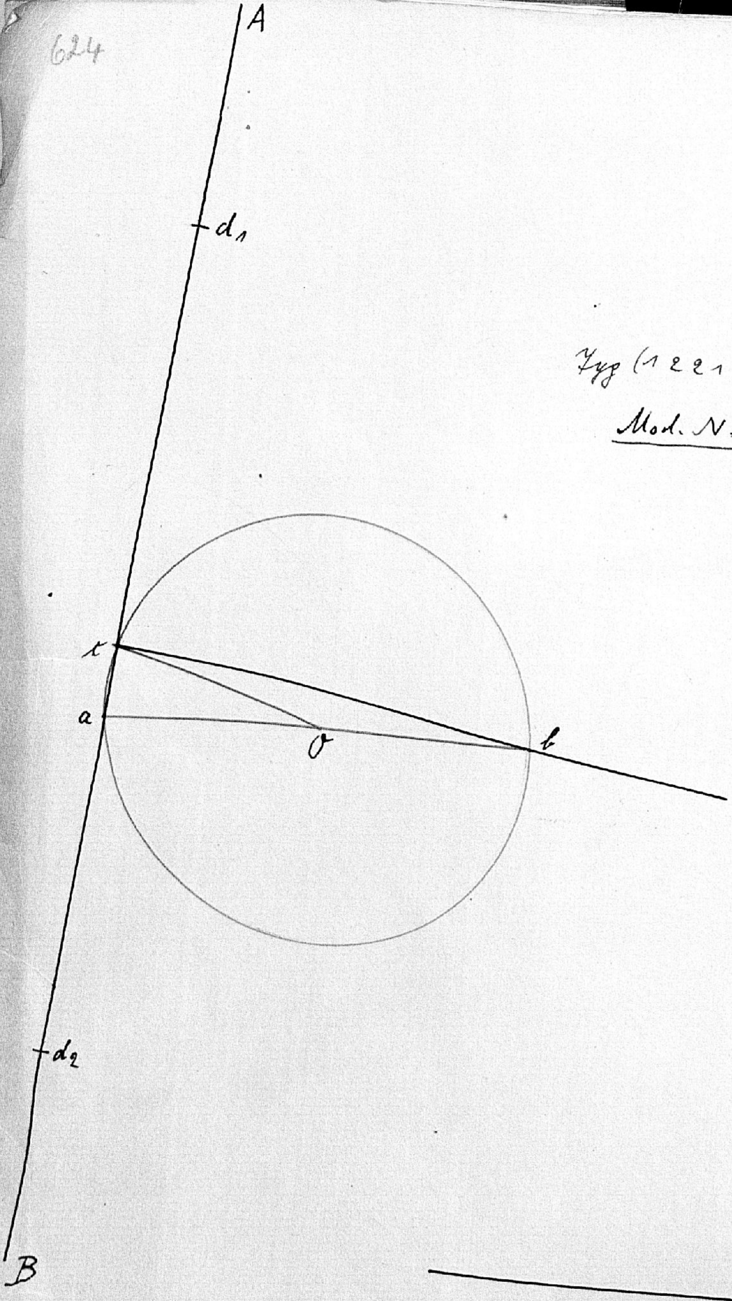


Fig (1112).

$|ab| = 2|bc|$

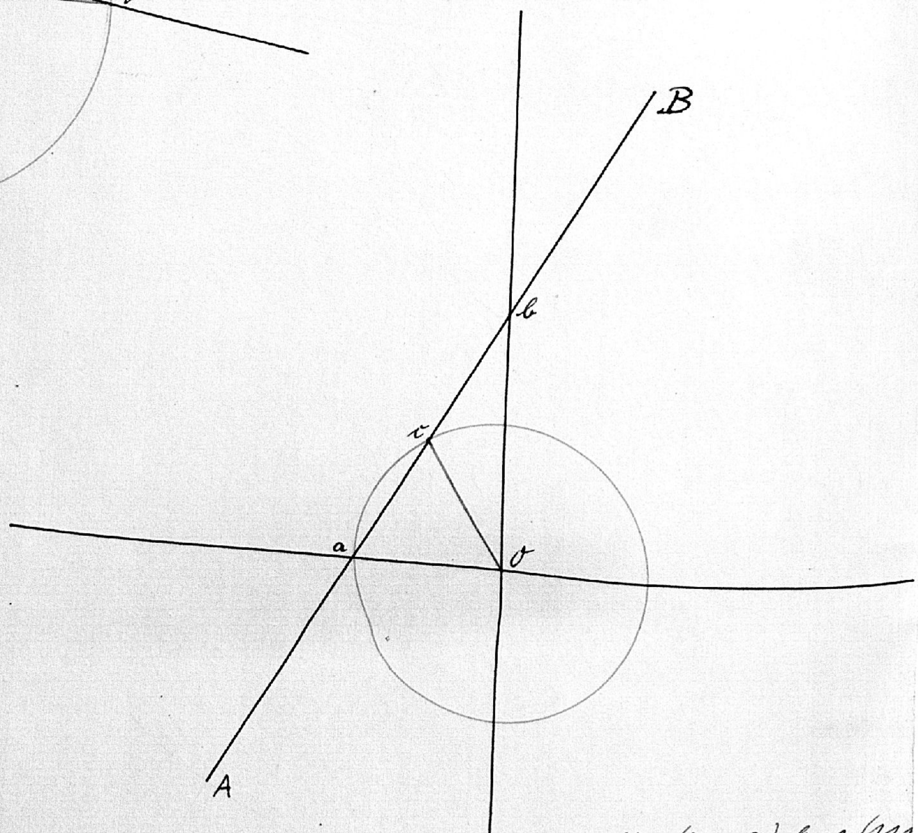
Mod. N° 124.

624



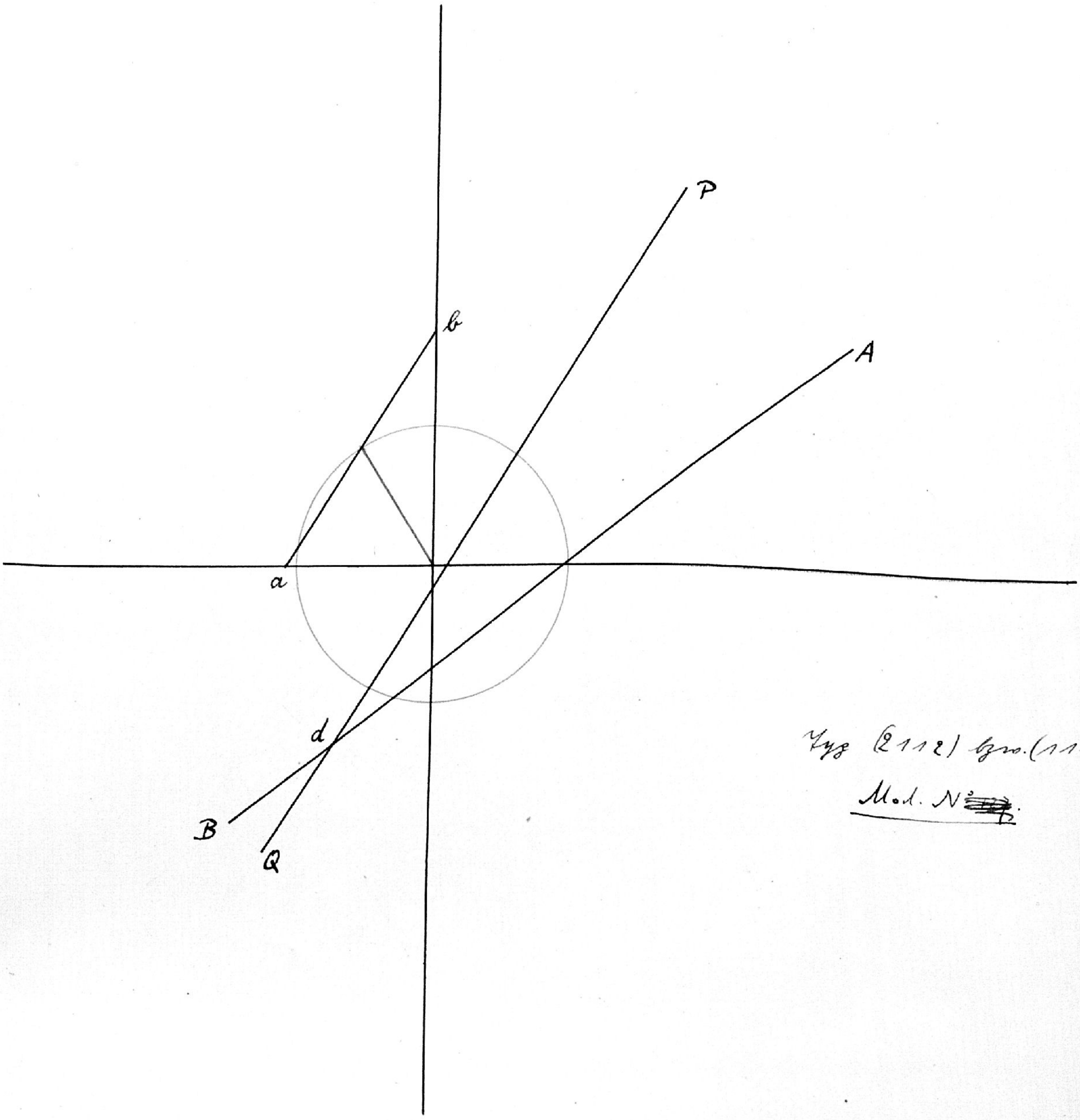
Typ (1221) bzw. (1121)

Mod. N° 118.



Typ (2112) bzw. (111

Mod. N° [illegible].



Typ (2112) bzw. (1112)

Mod. No 12.

der Ebene m_2 ist. Die möglichen Mechanismen dieser Art mit der

1) Von E.M. Blake . Aus einem Brief an F. Klein.