# I.

## Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. Schwarz'scher Differentialausdruck.

Frl. Th. Mader.

Hinweis darauf, daß die Funktion
$$u = u(t),$$
welche die Abbildung eines allgemeinen Kreisbogenpolygons der complexen $u$-Ebene auf die obere $t$-Eb. leistet, einer gewissen Differentialgleichung 3. Ordnung genügt, welche auf Grund der geometrischen Angaben aufgestellt werden kann u. welche für die fragliche konforme Abbildung charakteristisch ist.

In dieser Diff.-Gl. hat man dann den Ersatz für die formelmäßige Aufstellung der Abbildungsfunktion zu erblicken.

Denke das Kreisbogenpolygon $\Pi$ mit den Winkeln $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots \alpha_n\pi$ konform auf die $t$-Halbebene abgebildet, sodaß den Ecken successive die Punkte $a_1, a_2, \ldots a_n$ der reellen Achse entsprechen.

Fortsetzg. über die reelle $t$-Achse: nach einer geraden Anzahl von Spiegelungen ~~entspricht~~ kehrt man zu gleichen $t$-Werten zurück. Dieser Operation entspricht in der $u$-Ebene eine lineare Transformation:
$$u^* = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}.$$

Selbst wenn sich die Polygonfigur in der $u$-Ebene nach der Spiegelung nicht schließt, $t(u)$ keine eindeut-

-loge Funktion von $u$ ist, ist demnach

$$t(u^*) = t(u).$$

$t$: automorphe Funktion.

$u(t)$: linear polymorphe Funktion.

$u(t)$ ist außer für $t = a_1 \ldots a_n$ in der Umgebung jedes Punktes (mit evtl. noch einer Ausnahme von endlich vielen im Innern der $t$-Ebene) eindeutig und ist nirgends wesentlich singulär.

Umläuft $t$ einen der Werte $a_\nu$, so erfährt $u$ eine lineare Substitution. Hierdurch werden in die allgemeine Lösung der Abbildungsfunkt. $u$ 3 willkürl. Konstante eingeführt, welche Lage und absolute Größe der Figur bestimmen.

Nämlich: $u = u(t)$, durch welche die Figur $T$ der $t$-Ebene auf eine Figur $U$ der $u$-Ebene abgebildet wird, so auch $u^* = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$ eine solche Funktion, nur liegt die Figur in der $u$-Eb. an einer andern Stelle und ist in einem andern Maßstab ausgeführt.

Kommt es nur darauf an, die <u>charakteristischen Eigenschaften</u> der conformen Abbildung einer Figur $T$ auf eine Figur $U$ aufzufinden, so muß eine Abhängigkeit zwischen $t$ und $u$ aufgesucht werden, welche von der besonderen Lage und abs. Größe der Figur in der $u$-Ebene unabhängig ist, d.h.: $u$ wird einer Differentialgleichung genügen, in deren allgemeinem Integral noch 3 Constante als Integrationskonstante auftreten.

Der Differentialausdruck selbst wird invariant sein gegenüber allen linearen Transformationen von u.

Um den Diff-Ausdruck zu erhalten, hat man die Relation

$$u^*(\gamma u+\delta)=\alpha u+\beta$$

nach u zu differentiieren.

Nach 3maliger Differentiation ergibt sich:

$$\frac{u^{*'''}}{u^{*'}} - \frac{3}{2}\left(\frac{u^{*''}}{u^{*'}}\right)^2 = \frac{u'''}{u'} - \frac{3}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2,$$

in welchem jetzt die Constanten nicht mehr auftreten.

Setze also

$$\frac{u'''}{u'} - \frac{3}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2 = \frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}\right)^2 = \{u,t\}$$

so ist

$$\{u^*,t\}=\{u,t\}.$$

$\{u,t\}$ = Schwarz'sche Differentialausdruck.

Man geht weiter so vor, daß man diese Funktion in der Nachbarschaft der verschiedenen Punkte auf ihr analyt. Verhalten untersucht.

Betrachte etwa eine Ecke, in welcher die beiden Kreisbögen den Winkel $\alpha\pi$ einschließen. Del. Transformation (geeignete Wahl der Constanten $\alpha:\beta:\gamma:\delta$) kann man erreichen, daß die von den Kreisbögen gebildete Ecke übergeht in eine von geradlinigen Strecken gebildete.

Entspricht dem ~~Wert~~ Eckpunkt der Wert $t=t_0$, so hat die charakteristische Funktion für die Abbildung eines Geradenpolygons, d.i. die Funktion $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ (– ~~diese~~ nur unabhängig von ganzen linearen Transform. ~~[illegible]~~ von u!) für die in der Umgebung $t=t_0$ liegenden Werte von t eine Potenzreihenentwicklung welche bekannt ist.

Daraus folgt für $\{u,t\} = \{u^*,t\}$ die Entwicklung für $t=t_0$:

$$\frac{1}{2}\,\frac{1-\alpha^2}{(t-t_0)^2} + \frac{\gamma_1}{t-t_0} + \gamma_2 + \gamma_3(t-t_0) + \dots \quad | \; \gamma_\nu \text{ reell.}$$

Also hat $\{u,t\}$ in den Eckpunkten $a_1, \dots a_n$ Pole $2^{\text{ter}}$ Ordnung. (falls die Ecke nicht nach $t=\infty$ fällt!)

In der Weise ermittelt man das Verhalten für die übrigen Punkte.

Enthält die von dem Kreisbogenpolygon begrenzte Fläche in ihrem Innern keinen Windungspunkt — $u(t)$ keinen Pol — so hat die Funktion $\{u,t\}$ für alle Werte des Argumentes $t$, welche den im Innern der Halbebene liegenden Punkten entsprechen, den Charakter einer ganzen Funktion, da dieselbe für alle reellen Werte $t$ ebenfalls reelle Werte hat, und den Charakter einer rationalen Funktion, so ist

$$\{u,t\} = R(t)$$

eine rationale Funktion von $t$.

Die Aufgabe der conformen Abbildung der Fläche eines von Kreisbogen gebildeten Polygons auf die Fläche einer Halbebene ist also zurückgeführt auf die Integration einer gewissen Differentialgleichung und die Bestimmung einer Anzahl von Constanten.

Die Lösung läßt sich auch leicht auf den Fall ausdehnen, daß die Fläche des betrachteten Kreisbogenpolygons in ihrem Innern Windungspunkte enthält. Es wird dann die rationale Funktion $\{u,t\}$ ~~in die~~ auch noch für gewisse complexe Werte von $t$ bestimmt unendlich und die Anzahl der zu bestimmenden Constanten und der zu erfüllenden Bedingungsgleichungen wird größer.

Nehmen wir zunächst den Fall, daß im Innern keine singulären Punkte liegen.

Es hat

$$\{u,t\} = R(t)$$

in allen Stellen $t = a_1 \dots a_n$ (keiner nach $t=\infty$!) einen Pol $2.^{ter}$ Ordnung.

Da für $t=\infty$ $R(t)$ eine $0^4$-Stelle hat, ist $\{u,t\}$ der Quotient einer ganzen rationalen Funktion vom Grad $2n-4$ und des Produktes

$$\left\{\prod_{\nu=1}^{n}(t-a_\nu)\right\}^2.$$

Also:
$$\{u,t\}\prod_{\nu=1}^{n}(t-a_\nu) - \frac{G_{2n-4}(t)}{(t-a_1)\cdots(t-a_\nu)}$$

Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\{u,t\}\prod_{\nu=1}^{n}(t-a_\nu) = 2G_{n-4} + \sum \frac{A_\nu}{t-a_\nu}.$$

Zur Bestimmung der $A_\nu$ ist links nach Potenzen von $(t-a_\nu)$ zu entwickeln, Koeffizienten gleich hoher Potenzen zu vergleichen.

Also:
$$\{u,t\} = \frac{2}{\prod_\nu (t-a_\nu)}\left\{2G_{n-4}(t) + \sum \frac{A_\nu}{t-a_\nu}\right\}$$

in $G_{n-4}(t)$: $(n-3)$ unbekannte Constante = <u>access. Parameter</u>.

($n=3$: $G$ tritt nicht auf!)

Es ist sehr leicht, eine Lösung dieser Differentialgleichung $3^{ter}$ Ordnung zu gewinnen, falls man folgenden Sachverhalt heranzieht.

Sind $y_1, y_2$ 2 particuläre Integrale der Gleichung

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2p\frac{\partial y}{\partial t} + qy = 0,$$

deren Quotient $\frac{y_1}{y_2} = \frac{v_1}{v_2}$, dem Quotienten der Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + Jv = 0,$$

ist, so befriedigt dieser Quotient $\frac{y_1}{y_2} = u$ gesetzt die Differentialgleichung

$$\{u, t\} = 2J.$$

$J$ ist die Invariante der Gleichung (*) gegenüber linearer Transformation der abhängigen Variablen; es ist

$$J = q - \frac{\partial p}{\partial t} - p^2$$

Also: $2J(t) = \{u, t\} = 2\left(q(t) - \frac{\partial p(t)}{\partial t} - p^2(t)\right)$.

[(*) eine Diff.-Gl. der Fuchs'schen Klasse; $y_1, y_2$ 2 Fundamentalsysteme von Lösungen. —]

Anwendung auf die conforme Abbildung des eingespannten Minimalflächenstückes, bzw. des ^entspr.^ Kreisbogenpolygons der compl. $u$-Ebene auf die $t$-Ebene.
Bestimmung der auftretenden Constanten.

Ziehe die homogene Form der Weierstraß'schen Darstellung heran:

$$X = x + i x' = \int (\mathfrak{G}^2 - \mathfrak{H}^2)\, dt \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}(t), \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}(t).$$
$$iY = i(y + i y') = \int (\mathfrak{G}^2 + \mathfrak{H}^2)\, dt$$
$$Z = (z + i z') = \int 2\, \mathfrak{G}\mathfrak{H}\, dt.$$

Setze $u = \lambda \frac{\mathfrak{G}(t)}{\mathfrak{H}(t)}$, wo $\mathfrak{G}(t)$, $\mathfrak{H}(t)$ 2 Particularlösungen der Gleichung
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + q y = 0$$
sind. $\lambda$ ein geeignet zu wählender reeller Parameter.

Aus den 2 Darstellungen für die Minimalfläche ergibt sich ~~die~~ eine Beziehung zwischen $\mathfrak{G}(t)$, $\mathfrak{H}(t)$ und $F(u)$.

Falls $u = \psi(t)$, $\rightarrow du = \psi'(t)\, dt$.

Es folgt:
$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G}(t) &= \psi(t) \sqrt{F(u)\, \psi'(t)} \\ \mathfrak{H}(t) &= \sqrt{F(u)\, \psi'(t)} \end{aligned}\right\} *)$$

Durch Differentiation von $u = \lambda \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}}$
$$\rightarrow \frac{du}{dt} = \lambda \frac{\mathfrak{G}'\mathfrak{H} - \mathfrak{H}'\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}^2}$$
$$\mathfrak{H}^2 \frac{du}{dt} = \lambda (\mathfrak{G}'\mathfrak{H} - \mathfrak{H}'\mathfrak{G}) = \lambda F(u) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \quad (\text{aus } \cancel{\text{nach}}\ *)).$$

Da $F(u)\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ willkürlich bleibt bis auf einen reellen Parameter, können wir $\lambda = 1$ annehmen, also:
$$u = \frac{\mathfrak{G}(t)}{\mathfrak{H}(t)}.$$

G, H sind auch auszudrücken durch $x', y', z'$.

Durch die Fläche in dem gewählten Rahmen sind G und H bestimmt; d.h. ihre Entwicklungen in den verschiedenen Punkten der Fläche bekannt.

Ausserdem ist bekannt:

1.) Translation lässt G, H ungeändert.

2.) Durch Drehung transformieren sich G u. H linear:

$$G^* = \alpha G + \beta H$$
$$H^* = \gamma G + \delta H.$$

Eine lineare Substitution des $u$ ist demnach stets gegeben durch

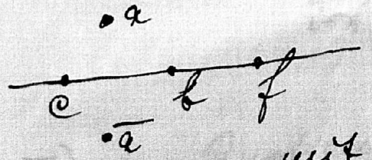
$$u^* = \frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta} = \frac{G^*}{H^*}.$$

3.) G und H sollen Lösungen der aufgeschriebenen Differentialgleichung 2.ter Ordnung sein. Das ergibt 2 Gleichungen zur Bestimmung von $p$ u. $q$.

Man findet: $p$ und $q$ sind rationale Funktionen von $t$, in gewöhnl. Punkten der Fläche regulär, für reelle Werte $t$ reell.

→ Fortsetzung über die reelle Achse mit konjugiert complexen Funktionswerten.

Falls weder die sing. Punkte der Fläche in der $t$-Eb. die Bildpunkte ergeben: $a, \bar a, b, c, f$, so folgt:




$p, q$ rationale Fn. von $t$ mit allein Polen in allen Stellen $a, \bar a, b, c, f$.

Anzahl der sing. Flachpunkte: $2A + B - m$

" " " Eckpunkte: $E + F = n$.

Durchlaufe $t_i$ die sing. Punkte $a, \bar{a}, b, e, f$,

so gilt:

In den Pkten $t_i$: $\quad p: \infty^1$, Anzahl $m+n$

$\quad q: \infty^2$, " $m+n$

In $t = \infty$: $\quad p: 0^1$, " $1$

$\quad q: 0^2$, " $1$.

Danach:

I.) $p$ = rationale Funktion darstellbar als ganze Funktion $+ \Sigma$, die sich auf die Pole bezieht.

Also: $p = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\rho_i}{t - t_i} + G(t)$.

für $t = \infty$: $p: 0^1 \rightarrow G(t) = 0$.

$t = \infty$: $p = -\frac{4}{t} + \cdots$

Man erhält aus dem Residuensatz zugleich die Fuchs'sche Relation:

$$\sum_{i=1}^{n+m} \rho_i = -4.$$

II.) $q$ = Quotient einer ganzen Funktion $(2(n+m)-2)^{\text{ten}}$ Grades durch $\prod_{i=1}^{n+m}(t - t_i)^2$.

Bilde $q\prod_i (t-t_i)$, durch Partialbruchzerlegung folgt:

$$q\prod_{i=1}^{n+m}(t-t_i) = 2\,G_{n+m-2} + \sum_{i=1}^{n+m}\frac{s_i}{t-t_i}(t_i-t_1)\cdots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\cdots(t_i-t_{n+m})$$

Dabei: $G_{n+m-2} = t^{n+m-2} + C_1 t^{n+m-3} + \dots + C_{n+m-2}$.

$C_1, \dots C_{n+m-2}$ = accessorische Parameter der Differentialgleichung.

Die Theorie der linearen Diff-Gleichungen zeigt, daß für die vorliegende Glchg. stets 2 Lösungen $G(t)$, $H(t)$ in der Umgebung des Punktes $t = t_i$ existieren.

Es könnten in den Entwicklungen noch Logarithmen auftreten; es zeigt sich, daß das der Fall sein könnte für die Flachpunkte $a, \bar{a}, b$ und den Punkt $t=\infty$. Diese Punkte = „Nebenpunkte" nach Klein, „ausserwesentlich sing. Pkte" nach Weierstraß. (Für solche Punkte sind die Lösungen regulär.)

G und H sollen unsere Fläche bestimmen; für sie sind G und H stets logarithmenfrei.

Also sind die accessorischen Parameter $C_\nu$ noch (n+1) Bedingungen für die Nebenpunkte unterworfen, damit keine Logarithmen in den Lösungen auftreten.

<u>Zähle</u> die Constanten zusammen.

Nehme an: das gesuchte Flächenstück abgebildet auf die obere $t$-Halbebene. Die Punkte $a, \bar{a}, b$ ($m = 2A+B$) $e, f$ ($n = E+F$) vorgegeben.

<u>Constante</u> der Differentialgleichung:

$$\underbrace{(n+m-3)}_{\text{n+m = Anzahl der Pole; 3 abzuziehen da eine lineare Transformation 3 bel. Stellen in 3 vorgeg. überführt.}} + \underbrace{(n+m-2)}_{\text{acc. Par.}} - \underbrace{(m+1)}_{\text{G, H logar.-frei}} = \underline{\underline{2n+m-6}}.$$

(<u>reelle</u> Constante!)

Für die Lösungen:

sind $G_0, H_0$ 2 Lösungen, so:

$$G = \alpha_0 G_0 + \beta_0 H_0$$
$$H = \gamma_0 G_0 + \delta_0 H_0$$

die allgemeinsten.

$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ im allgemeinen complex, also 8 reelle Constante.

Es enthalten daher $G$ und $H$ noch

$2n+m+2$ reelle Constante.

Wir müssen bilden: $u = \frac{G(t)}{H(t)}$.

Wenn $t$ die $t$-Halbebene durchläuft, beschreibt $u$ ein Kreisbogenpolygon auf der Kugel mit den Winkeln $\alpha_\nu \pi$; $\nu = 1, 2, \dots n$.

Ein Kreis auf der Kugel ist durch 3 reelle Const.

bestimmt.

Daher wird: Kreisbogenpolygon abgeb. auf die obere $t$-Halbebene best. durch $2n$ reelle Const.

($3n$ Const. für $n$ bel. Kreise

$3n-n$ " " $n$ Kreise mit geg. $\measuredangle\, \alpha_\nu \pi$.)

Da die Begrenzung von Krümmungslinien und Asymptotenlinien gebildet sein soll:

$$F(u)\,du^2 = (\mathfrak{G}'\mathfrak{H} - \mathfrak{H}'\mathfrak{G})\,dt^2 = C\prod \frac{(t-a)(t-\bar{a})(t-b)}{(t-e)(t-f)^{\frac{1}{2}}}$$

von 1 Constanten $C$ abhängt, so ergeben sich für die Abbildung des speziellen Kreisbogenpolygons

$2n+1$

Bedingungen.

Stellt man die Punktkoordin. $x, y, z$ der Minimalfläche her, so treten noch 3 weitere Integrationsconstante dazu.

Danach haben wir

$$2n+m+2+3-(2n+1) = m+4.$$

Das Minflstck., begrenzt von einer zu gegebenen parallelen Kette, hängt ab von $m+4$ reellen Constanten.

Schon festgestellt: Kette, die zu gegebenen parallel ist, hängt ab von $E + \frac{3}{2}F$ Constanten.

Eine Lösung möglich, falls

$$m+4 = 2A+B+H \leq E + \tfrac{3}{2}F.$$

Bem.: $2A+B = \frac{3}{2}F + E - 4$ nur in dem Fall, dass Flächplatte niedrigster Ordnung ($\varsigma = 3$) und Ecken einfachster Art ($\varsigma = 1$) vorliegen.