

Aus (38) ergibt sich:

$$\sum_{\beta=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \lambda \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi_\beta}$$

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial u} = \sum_{\beta=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \lambda \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial u}$$

also

$$(39) \quad \frac{\partial x_\alpha}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} u(u)$$

Für $\frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha}$ erhalten wir $\frac{1}{\rho} \frac{1-u^2}{2}$ bzw. $\frac{i}{\rho} \frac{1+u^2}{2}$ bzw. $\frac{1}{\rho} u$,
die bekannten Ausdrücke in den Formeln von Weierstrass.

In der Tat lässt sich aber ~~annehmen~~ ^{angenommen} dass die Stützebe-
nenfunktion ~~bei einem Minimum~~ ^{gewählt werden kann} homogen ersten Grades ~~ist~~ ^{annehmen.}
~~Wird aber ein~~

II.

Physikalisches zum Plateau'schen Problem.

Vorträge Ing. G. Grütz.

Wie schon oben erwähnt, verdankt die Theorie der Mini-
malflächen dem Variationsproblem $\iint \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy = \text{Min.}$
ihre Entstehung (Legendre 1760/61).⁶ Die Euler'sche Gleichung
dieses Problems erweist sich mit der Bedingung des Verschwindens
der mittleren Krümmung

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

identisch, womit der Anschluss an die vorangehenden Ueberle-
gungen gewonnen ist.

Die Euler'sche Gleichung stellt bekanntlich nur eine
notwendige Bedingung für das Eintreten eines Extremums dar und
setzt die Existenz einer Lösung voraus. Auf die sich hieran

schliessenden Fragen soll aber hier nicht eingegangen werden ¹⁾ sondern das "Plateau'sche Problem", d.h. die Aufgabe, durch eine gegebene geschlossene Kurve eine Minimalfläche zu legen, nur von ihrer physikalischen Seite her behandelt werden. Hierzu ist es nötig, etwas auf die Theorie der Kapillarität einzugehen.

Die Theorie der Kapillarität ist 1805 von Thomas Young und 1806 von Laplace begründet worden. Laplace (Nachtrag zur *mécanique céleste*, Werke Bd. IV S. 349 ff), leitete zwei Hauptsätze ^{ab} von denen der folgende erste für unsere physikalische Erzeugung der Minimalflächen wichtig ist: In jedem Punkt der Flüssigkeitsoberfläche wirkt infolge der Kapillarkräfte ein spezifischer Druck P , der in die Richtung der inneren Flächennormalen fällt und die Grösse.

$$\rho \left(K + \frac{A}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right)$$

hat; ρ ist die Flüssigkeitsdichte K und A sind für ein und dieselbe Flüssigkeit konstant, sie hängen nur von ihrer physikalischen und chemischen Natur ab. R_1 und R_2 sind die Hauptkrümmungsradien der Fläche in dem betreffenden Punkt und sind positiv zu rechnen, wenn die Oberfläche (nach aussen) konvex ist, negativ, wenn sie konkav ist.

(Der zweite Laplace'sche Hauptsatz sagt aus, dass dieselbe Flüssigkeit dieselbe feste Substanz stets unter demselben (also von der Flüssigkeitsoberfläche unabhängigen) Winkel schneidet.)

Die Begründung dieses Satzes ist bei Laplace nicht ganz einwandfrei. Um ihn abzuleiten, geht er folgendermassen schrittweise vor: Er berechnet das Potential, das eine Flüssigkeitsskugel auf eine kapillare Flüssigkeitssäule ausübt, die auf der

1) Man vergleiche hierüber z.B. Hilbert, Jahresber. dt. Mathem.-Vereing. Bd. 8 (1900) u. S. Bernstein, Math. Ann. Bd. 64, Müntz, Math. Ztschrft. 1925.

Kugel senkrecht steht, und nach aussen ragt. Dabei macht er nur folgende Voraussetzungen über das Gesetz der molekularen Attraktion: Die Kraft, mit der sich zwei Massenelemente anziehen, hat die Richtung der Verbindungsgeraden und die Grösse $m_1 m_2 f(r_{12})$ wo r_{12} die Entfernung der Massen bedeutet und $f(r_{12}) = 0$ ist für „endliche“ Werte r_{12} . Indem er nur von dieser Eigenschaft der molekularen Attraktion Gebrauch macht, findet er, dass die Kapillarsäule mit der Kraft $\rho d\sigma (K + \frac{A}{R})$ angezogen wird und also den Druck $\mathcal{P} = K + \frac{A}{R}$ auf die Kugeloberfläche in dem betreffenden Punkt ausübt. Da Teile der Kapillare, die von der Kugeloberfläche endlich weit entfernt sind, wegen der Eigenschaft der Funktion $f(r_{12})$, für endliches Argument null zu sein, keinen Einfluss auf den Kapillardruck haben, kann man $\mathcal{P} = (K + \frac{A}{R})\rho$ einfach als den an der Kugeloberfläche herrschenden Druck infolge molekularer Attraktion ansprechen. Dieses erste Resultat verallgemeinert nun Laplace, indem er auf ihm die Wirkung einer Kugel auf eine in ihr Inneres ragende Kapillare berechnet; er findet $\mathcal{P} = K - \frac{A}{R}$. Damit hat er schon den Kapillardruck einer sphärisch konvex und einer sphärisch konkav gekrümmten Oberfläche. Wenn nun endlich eine Flüssigkeit mit einer beliebig gekrümmten Oberfläche vorliegt, dann ersetzt sie Laplace zur Berechnung ihrer kapillaren Wirkung in jedem Punkt durch ein oskulierendes Ellipsoid, indem er den Einfluss der Schicht, um die sich der von der Fläche begrenzte Flüssigkeitskörper und das Ellipsoid unterscheiden, vernachlässigen zu können glaubt. Das Ellipsoid zerlegt er durch Ebenen durch die Flächennormale in Sektoren und berechnet die Kapillarwirkung des Ellipsoides durch Summierung der Wirkungen der einzelnen Sektoren. Jeden Sektor wiederum ersetzt Laplace durch geeignete Kreisscheiben. Den durch solch einen Kugelsektor induzierten Kapillardruck kennt er aber schon. Durch Integration über \mathcal{J} von 0 bis 2π findet er als den Druck, der durch die molekulare Wirkung des Flüssigkeitsellipsoides und also der ganzen Flüssigkeitsmasse im Flächenpunkt \mathcal{P}

erzeugt wird, den Wert

$$K + \frac{A}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

wo R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche in dem Punkt sind. Wenn die Fläche konkav ist, findet man auf demselben Weg $K - \frac{A}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$, und Laplace verallgemeinert das Resultat dahin, dass er allgemein

$$p = K + \frac{A}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

setzt, $R_1, R_2 \geq 0$, je nachdem die Krümmung der Fläche in der einen bezw. anderen Hauptkrümmungsrichtung konvex oder konkav ist. Nachdem er so die Formel für den Kapillardruck sehr elegant, aber nicht sehr streng abgeleitet hat, stellt er die Gleichung für die freie Oberfläche einer Flüssigkeit auf, die für den Fall, dass die Flüssigkeit "gewichtlos" ist, die Form $p = \text{const.}$ auf der ganzen Oberfläche hat.

Der Mangel an Exaktheit, den die ^{flue}Lafrange'sche Ableitung mehrfach zeigt, hat Poisson veranlasst, in seiner "nouvelle théorie de l'action capillaire" vom Jahre 1831 die Laplace'sche Methode zu verbessern; besonders wirft er Laplace vor, die Aenderung der Flüssigkeitsdichte in der Nähe der Oberfläche nicht berücksichtigt zu haben, die für das Auftreten der Kapillarerscheinungen wesentlich ist, wie Poisson fälschlich behauptet. Man hat nachgewiesen, dass man mit der Annahme konstanter Flüssigkeitsdichte auskommt.

Eine wirklich neue Theorie der Kapillarität hat dagegen Gauss geliefert, und sie genügt auch allen Ansprüchen, was die Exaktheit der Ableitung der Resultate angeht. Die Gauss'sche Arbeit hat den Titel "principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii" 1830, Werke Bd. 5. Gauss geht von genau denselben Voraussetzungen über die Kräfte der molekularen Anziehung aus wie Laplace, nämlich dass zwischen m_1 und m_2 die Kraft $R = m_1 m_2 f(r_{12})$ wirkt in Richtung der Verbindungsgeraden, und dass $f(r_{12}) = 0$ ist für endlich grosses Argument, und

er gelangt auch zu genau denselben Resultaten (Differentialgleichung für die freie Oberfläche der Flüssigkeit, die bei Laplace in deren Satz $q = \text{const}$ längs F enthalten ist!). Sein Weg ist aber völlig von dem Laplace'schen verschieden. Er geht folgendermassen vor.

Als Gleichgewichtsbedingung für ein System von n freien Massenpunkten m_λ kann man ja das Prinzip der virtuellen Verrückungen benutzen: $\delta A = \sum_\lambda Q_\lambda \delta u_\lambda = 0$ bei allen virtuellen Verrückungen. Wenn die Kräfte ein Potential φ haben, wenn also $Q_\lambda = \text{grad}_{u_\lambda} \varphi = \frac{d\varphi}{du_\lambda}$ gilt, wird $\delta A = \sum_\lambda \frac{d\varphi}{du_\lambda} \delta u_\lambda = \delta \varphi$; man hat dann also als Gleichgewichtsbedingung "das Potential φ muss einen stationären Wert haben." Dieses Gleichgewichtsprinzip wendet Gauss auf die Flüssigkeitsteilchen an, indem er von dem System von n freien Massenpunkten zu dem Kontinuum übergeht, $m(x, y, z)$ und als einzige Bewegungseinschränkung Konstanz des Gesamtvolumens verlangt. Die Hauptaufgabe ist also, das Potential der auf die Massenelemente wirkenden Kräfte zu finden und seine Variation zu berechnen, die dann Null zu setzen ist. Gauss nimmt an, dass auf jedes Massenelement folgende drei Arten von Kräften wirken:

1) die Schwere, 2) molekulare Anziehung von Seiten anderer Flüssigkeitsteile, 3) molekulare Anziehung von Seiten der Teile der festen Wand, in die die Flüssigkeit eingeschlossen ist.

Das Potential für die Schwerkraft ist offenbar $K_g = -\varepsilon g \int \frac{z}{r} d\sigma$ (ε Dichte der Flüssigkeit), durch Grenzübergang entstanden, aus der Summe $\sum_\lambda -g m_\lambda z$. Dass auch die anderen beiden Arten von Kräften Potentiale haben, will ich nur für den zweiten Fall zeigen; der dritte wird analog erledigt.

Wir gehen von dem System von n Massenteilchen m_1, \dots, m_n aus; sie mögen sich an den Orten u_λ befinden.

Zwischen m_λ und m_ν wirkt eine Kraft $\vec{Q}_{\lambda\nu} = m_\lambda m_\nu f(r_{\lambda\nu}) \vec{w}_{\lambda\nu}$
 $\vec{w}_{\lambda\nu}$ sei Einheitsvektor $\xrightarrow{m_\lambda} \xrightarrow{m_\nu}$ von m_λ
 nach m_ν ; $\vec{Q}_{\lambda\nu}$ ist die Kraft, die von m_ν auf m_λ
 ausgeübt wird. Daher wirkt im ganzen auf m_λ die Kraft
 $\vec{Q}_\lambda = \sum_\nu \vec{Q}_{\lambda\nu} = \sum_\nu m_\nu f(r_{\lambda\nu}) \vec{w}_{\lambda\nu}$ Daher ist die Elementararbeit, die
 bei Verrückung von m_λ um $d\vec{w}_\lambda$ geleistet wird

$$\vec{Q}_\lambda d\vec{w}_\lambda = m_\lambda \sum_\nu m_\nu f(r_{\lambda\nu}) \vec{w}_{\lambda\nu} d\vec{w}_\lambda$$

und daher der gesamte Arbeitszuwachs

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_\lambda \vec{Q}_\lambda d\vec{w}_\lambda = \sum_\lambda m_\lambda \sum_\nu m_\nu f(r_{\lambda\nu}) \vec{w}_{\lambda\nu} d\vec{w}_\lambda \\ &= \sum_{\lambda,\nu} m_\lambda m_\nu f(r_{\lambda\nu}) \vec{w}_{\lambda\nu} d\vec{w}_\lambda \end{aligned}$$

In dieser Summe tritt jeder Index zweimal auf; ich
 fasse entsprechende Glieder zusammen:

$$\delta A = \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\nu} m_\nu m_\lambda f(r_{\lambda\nu}) (\vec{w}_{\lambda\nu} d\vec{w}_\lambda + \vec{w}_{\nu\lambda} d\vec{w}_\nu)$$

es dann ist $r_{\lambda\nu} = r_{\nu\lambda}$! Nun gilt aber

auf Grund nebenstehender Figur $\vec{w}_{\lambda\nu} r_{\lambda\nu} = d\vec{w}_\nu$

und daher $d\vec{w}_\lambda + d\vec{w}_{\lambda\nu} r_{\lambda\nu} + \vec{w}_{\lambda\nu} d\vec{w}_{\lambda\nu} = d\vec{w}_\nu$

und nach Multiplikation mit $\vec{w}_{\lambda\nu}$:

$$\vec{w}_{\lambda\nu} d\vec{w}_\lambda + 0 + d\vec{w}_{\lambda\nu} r_{\lambda\nu} = \vec{w}_{\lambda\nu} d\vec{w}_\nu \quad \text{oder} \quad \vec{w}_{\lambda\nu} d\vec{w}_\lambda + \vec{w}_{\nu\lambda} d\vec{w}_\nu = d\vec{w}_{\lambda\nu} r_{\lambda\nu}$$

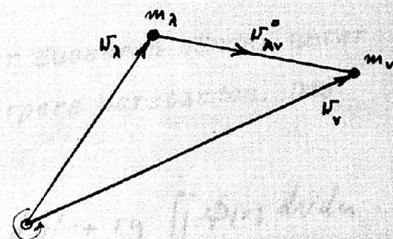
$$\delta A = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda,\nu} m_\nu m_\lambda f(r_{\lambda\nu}) dr_{\lambda\nu};$$

das ist ein vollständiges Differential:

$$\delta A = \delta \left(-\frac{1}{2} \sum_{\lambda,\nu} m_\nu m_\lambda \int_{r_{\lambda\nu}} f(r) dr \right)$$

und als Potential der Anziehungskräfte haben wir

$$K_i = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda,\nu} m_\nu m_\lambda \int_{r_{\lambda\nu}} f(r) dr$$



und wenn wir wieder den Grenzübergang von n Massenteilen zu einer kontinuierlichen Flüssigkeitsmenge ~~machen~~, dann wird

$$K_i = -\frac{1}{2} \iint dm dm' \int f(r) dr$$

wobei beide Integrationen über das ganze Flüssigkeitsvolumen zu erstrecken sind. Setzen wir noch $\int f(r) dr = c - \varphi(r)$ und die Dichte der Flüssigkeit gleich ε , so ist

$$K_i = \frac{\varepsilon^2}{2} \iint \varphi(r) dv dv';$$

die Konstante ist unwesentlich; r ist der Abstand zweier Volumenelemente.

Ganz analog erhält man auch ein Potential für die Kräfte, die auf jedes Massenelement infolge der Anziehung durch die festen Wände wirken. Das Anziehungsgesetz sei wie oben, nur heisse die Funktion jetzt $F(r)$. Wird dann $\int F(r) dr = C - \Phi(r)$ gesetzt, so ist

$$K_a = \varepsilon \gamma \iint \Phi(r) dv dv'$$

das Potential der Molekularattraktion der äusseren Wände, unter γ die Dichte des umgebenden festen Körpers verstanden. Das Gesamtpotential ist also

$$K = -\varepsilon g \int z dv + \frac{\varepsilon^2}{2} \iint \varphi(r) dv dv' + \varepsilon \gamma \iint \Phi(r) dv dv'.$$

Bevor Gauss nun die Gleichgewichtsbedingung in der Form $\delta K = 0$ aufstellt, nimmt er zwei Umformungen mit dem Ausdruck K vor, die ich hier bloss im Resultat angeben will.

Die erste Umformung ist rein mathematischer Natur und bedeutet eine Umbwandlung der sechsfachen Integrale in vierfache, wobei ausserdem noch Glieder von endlichen (integrierter) Form auftreten. Es wird

$$K = -\varepsilon g \int z dv + \frac{\varepsilon^2}{2} (4\pi V \varphi(\infty) - \int(\infty) \pi \Theta + \iint \alpha(r) do do') + \varepsilon \gamma (\pi \Theta(\infty) \Theta_f + \iint \beta(r) do do');$$

darin ist $\psi(r) = c_1 - \int \phi(r) r^2 dr$ $\psi(0) = \psi(r)|_{r=0}$

$\mathcal{D}(r) = c_2 - \int \psi(r) dr$ O Gesamtoberfläche der Flüssigkeit

$\Theta(r) = c_2 - \int (c_1 - \int \phi(r) r^2 dr) dr$ O_f benetzter Teil des Körpers

Die zweite Umformung des Potentials gibt ihm nun endlich eine brauchbare Gestalt. Bis jetzt haben wir noch gar nicht davon Gebrauch gemacht, dass die zwischen den Massenelementen wirkenden Kräfte Molekularkräfte sind, d.h. einen sehr kleinen Aktionsradius haben, wie experimentell gezeigt wird (zwei Quecksilbertropfen üben aufeinander keine Kräfte aus, solange ihr Abstand auch nur noch mikroskopisch gemessen werden kann, usw.) Der mathematische Ausdruck dafür ist, dass $f(r) = 0$ ist für endliches Argument. Daraus kann man dann ableiten, dass das Integral der ersten Klammer genau Null ist, und dass das Integral der zweiten Klammer von höherer Ordnung klein ist gegen die anderen Summanden des Potentials.

Schliesslich hat also das Potential folgende Gestalt

$$K = -\epsilon g \int \xi d\tau + 2\pi\epsilon^2 \psi(0) \mathcal{V} - \frac{\pi}{2} \epsilon^2 \mathcal{D}(0) O + \epsilon \gamma n O_f \Theta(0)$$

Da bei der Bildung von $\int K$ das Volumen konstant zu halten ist, (das war ja die einzige Bewegungseinschränkung unseres "Punktsystems" m) ist der zweite Teil von K belanglos - seine Variation ist Null. Ferner zerlegen wir O in $\mathcal{F} + \mathcal{G}$, wo $\mathcal{G} = O_f$ die gemeinschaftliche Oberfläche von Flüssigkeit und Wandung und \mathcal{F} die freie Oberfläche ist und haben schliesslich die Variation von $2\pi\epsilon^2 \mathcal{V} \psi(0) - K = K'$ gleich Null zu setzen:

$$K' = \epsilon g \int \xi d\tau + \alpha^2 \mathcal{F} + (\alpha^2 - \beta^2) \mathcal{G}$$

$$\alpha^2 = \frac{\pi}{2} \epsilon^2 \mathcal{D}(0)$$

$$\beta^2 = \pi \epsilon \gamma \Theta(0)$$

α^2 und β^2 sind Konstante, deren Werte theoretisch nicht berechnet werden können; man kann sie nur experimentell bestimmen, indem man die Gleichgewichtsbedingung $\delta K' = 0$ auf spezielle, der Messung zugängliche Fälle anwendet.

Wenn wir noch einen Augenblick nicht von der Nebenbedingung $\delta U = 0$ Gebrauch machen, haben wir die gesamte potentielle Energie des Systems Flüssigkeit + Gefäss in der Form $K = -K''$

$$K'' = \varepsilon g \int z \, dv + \alpha^2 F + (\alpha^2 - \beta^2) G + \gamma^2 U;$$

man unterscheidet die drei Teile: $\varepsilon g \int z \, dv$, das Potential der Schwere. Dann: $\alpha^2 F + (\alpha^2 - \beta^2) G$, das Potential der Oberflächenspannungen, eine flächenhaft verteilte Energie, die proportional ist der Grösse der Oberfläche; die Proportionalfaktoren hängen von den aneinanderstehenden Medien ab. Schliesslich $\gamma^2 U$ die potentielle Energie der Kohäsionskräfte, eine räumlich verteilte, dem Volumen proportionaler Energie. Diese Einteilung entspricht ganz den Anschauungen der modernen Kapillaritätstheorie. (Man vergleiche etwa den Artikel "Kapillarität" von Minkowski, Enzyklop. Bd. V.)

Der Vollständigkeit wegen müsste man wohl den Ausdruck der potentiellen Energie noch dahin ergänzen, dass man die potentielle Energie der Schwere der Luft hinzufügt und evtl. auch noch das Potential der Kohäsionskräfte in der Luft, um wirklich alle Teile des Systems zu berücksichtigen, dessen Gleichgewicht man untersuchen will.

Die räumlich verteilte Energie will ich indessen jetzt fortlassen, da sie bei einer virtuellen Verrückung doch konstant bleibt. Dann hat also die potentielle Energie der drei Medien

Luft	Flüssigkeit	Gefäss
A	B	C

die sich in den Flächen F_{AB} bzw. F_{BC}

berühren und die Volumina V_A, V_B, V_C bzw. die Dichten ρ_A, ρ_B, ρ_C

$$\begin{matrix} V_A & V_B & V_C \\ \rho_A & \rho_B & \rho_C \end{matrix}$$

haben, folgenden Wert:

$$K = -g\rho_A \int_{V_A} z dv - g\rho_B \int_{V_B} z dv - g\rho_C \int_{V_C} z dv + \Gamma_{AB} F_{AB} + \Gamma_{BC} F_{BC} + \Gamma_{CA} F_{CA}$$

Γ_{AB}, \dots sind die Konstanten der Oberflächenspannung.

Wenn Gleichgewicht zwischen A, B und C herrschen soll, muss $\delta K = 0$ sein, und, was die Stabilität des Gleichgewichts betrifft: Das Gleichgewicht ist stabil, wenn K ein Minimum darstellt.

Wir wenden dieses Resultat auf folgenden Fall an: die Flüssigkeit soll als sehr dünne Haut zwischen einem in sich zurücklaufenden dünnen Draht ausgespannt sein, oder, mathematisch formuliert: die Flüssigkeit soll als Fläche zwischen einer geschlossenen Raumkurve verlaufen. Virtueller soll nur eine Gestaltsänderung sein, bei der die Flüssigkeit an dem Draht überall haften bleibt. In dem Energieausdruck sind der dritte, fünfte und sechste Summand konstant; die Oberfläche der Flüssigkeit B gegen die Luft A besteht aus den beiden Seiten F_{AB}^+ und F_{AB}^- . Also haben wir die Gleichgewichtsbedingung



Also haben wir die Gleichgewichtsbedingung

$$\delta \left(-g\rho_A \int_{V_A+V_B} z dv - g(\rho_B - \rho_A) \int_{V_B} z dv + \Gamma_{AB} (F_{AB}^+ + F_{AB}^-) \right) = 0$$

Es ist $\int \int z dv = 0$, da $V_A + V_B$ konstant ist; der Voraussetzung über die geringe Dicke $h < 1$ der Flüssigkeitshaut entspricht der Ansatz

$$V_0 = \int_{V_B} dv = h \int_{O_B} d\sigma = h \int_{O_B} \sqrt{1+p'^2+q'^2} dx dy.$$

Daher ist

$$\int \int_{V_B} z dv = h \int_{O_B} \int z \sqrt{1+p'^2+q'^2} dx dy$$

indem man annimmt, dass sich die Dicke der Haut bei einer Verschiebung nicht ändert. Da der Integrationsbereich in der xy -Ebene fest ist, wird

$$\int \int_{V_B} z dv = h \int \frac{\partial}{\partial \varepsilon} z \sqrt{1+p'^2+q'^2} d\varepsilon dx dy = h d\varepsilon \int \frac{\partial}{\partial \varepsilon} z \sqrt{\dots} dx dy$$

und solange sich $z(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ mit dem Parameter ε so ändern, dass das Integral einen endlichen Wert hat, ist

$$\delta \int \int z dv = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int \int z dv d\varepsilon$$

wegen des Faktors h klein gegen den letzten Ausdruck

$\delta (\Gamma_{AB} (\mathcal{F}_{AB}^+ + \mathcal{F}_{AB}^-))$. Daher ist in unserem Fall notwendig und hinreichend für das Verschwinden der ersten Variation von K

$$\delta \Gamma_{AB} \mathcal{F}_{AB} = 0 \quad \text{ist, also } \delta \mathcal{F}_{AB} = 0$$

Der Flächeninhalt der Flüssigkeitshaut muss also einen stationären Wert haben, d.h. es muss \mathcal{F}_{AB} eine Minimalfläche sein. Soll die Gleichgewichtsform stabil sein, dann muss ja K ein Minimum, kein blosses Extremum haben, also auch \mathcal{F}_{AB} : das Gleichgewicht ist stabil, wenn die Haut die Form einer eigentlichen Minimalfläche annimmt.

Zu demselben Resultat, dass eine dünne Flüssigkeitshaut, die einen geschlossenen Draht verbindet, sich als Minimalfläche ausbildet, kommen wir auch von dem Laplace'schen Resultat aus,

nachdem infolge der Kapillarkräfte in jedem Punkt der freien Oberfläche der Flüssigkeit der Druck $p = \rho \left(K + \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right) \cdot h$ ist; das Potential der Kapillarkräfte ist also ρ . Dann folgt aus der Euler'schen Bewegungsgleichung für Flüssigkeiten

$$\rho \frac{dv}{dt} = \text{grad}(\gamma z - p)$$

für den Gleichgewichtsfall, dass $\gamma z + p$

längs der Oberfläche (da in jedem Punkt) denselben Wert haben muss. Wenn wir nun die Flüssigkeitshaut so dünn machen, dass das Gewicht eines Teilchens der Haut sehr klein ist gegen die Kapillarkräfte - offenbar kann man das erreichen, denn das Gewicht des Teilchens $dv = h \cdot d\sigma$

mit h zu Null ab - , dann können wir γz gegen p vernachlässigen und haben $p = \rho \left(K + \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right) = \text{const}$ auf der ganzen Oberfläche; also gilt, da ρ, K, A ohnehin konstant sind

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const.}$$



Wir ~~brauchen~~ benutzen diese

Gleichung für zwei Punkte der Haut, die sich "gegenüber" liegen. In dem einen seien die Hauptkrümmungsradien R_1^0 und R_2^0 ; dann sind die Hauptkrümmungsradien in dem Gegenpunkt, da die Dicke der Haut sehr klein ist, $-R_1^0$ und $-R_2^0$. Aus der Gleichung

$$\frac{1}{R_1^0} + \frac{1}{R_2^0} = - \left(\frac{1}{R_1^0} + \frac{1}{R_2^0} \right)$$

folgt aber, dass $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ sein muss; d.h. die Haut stellt eine Minimalfläche dar.

Die experimentelle Demonstration der Minimalflächen stammt von Plateau, der sie in seinem Buch *statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires* (1873) beschreibt. Er realisiert auch Flächen beliebiger

konstanter mittlerer Krümmung, die sich, wie man beweist, als freie Oberflächen gewichtsloser Flüssigkeiten im Gleichgewichtszustand einstellen. Die gewichtslosen Flüssigkeiten werden bei diesem Experiment dadurch hergestellt, dass man Oel in ein Alkohol-Wassergemisch von gleichem spezifischem Gewicht giesst. Dann wird das Gewicht des Oeles gerade von dem Auftrieb kompensiert und die Oberfläche des Oeltropfens genügt der Gleichung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const.}$

Man kann auch mit Hilfe dünner Flüssigkeitshäute Flächen mit konstanter von Null verschiedener mittlerer Krümmung herstellen. Wenn man nämlich eine geschlossene Flüssigkeitshaut erzeugt, kann man nicht mehr wie oben schliessen, dass $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist; es bleibt bestehen $H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const.}$ auf der Oberfläche; die ^{se} besteht aber jetzt aus zwei getrennten Teilen, und die beiden Konstanten $c_i = \frac{1}{R_1^i} + \frac{1}{R_2^i}$ und

$c_a = \frac{1}{R_1^a} + \frac{1}{R_2^a}$ sind nicht notwendig gleich wie oben. Da aber $R_1^i = -R_1^a$, $R_2^i = -R_2^a$ ist, folgt $c_i = -c_a = c$

Also übt die Haut in jedem Punkt einen resultierenden Druck von der Grösse $\rho \left(K + \frac{A}{2} c - \left(K - \frac{A}{2} c \right) \right) = \rho A c$ aus, der je nach dem Richtungssinn von der eingeschlossenen Gasmenge oder der umgebenden Atmosphäre aufgenommen werden muss. Wenn die Fläche nicht geschlossen ist, ist auf beiden Seiten der Druck gleich, nämlich Atmosphärendruck. Also muss $\rho A c = 0$ sein, d.h. $c = 0$, unser obiges Resultat.

Wenn ich jetzt verschiedene Minimalflächen experimentell vorführe,¹⁾ dann ist in jedem speziellen Fall der Existenzbeweis erbracht, der mathematisch so grosse Schwierigkeiten macht. Nicht so einfach ist die Frage nach der Eindeutigkeit der physikalischen Lösung der Aufgabe zu beantworten. Wir sahen oben, dass nur wirkliche Minimalflächen Formen stabilen Gleichgewichts vorstellen. Es könnte daher wohl sein, dass ausser der Mini-

1) Vgl. Modellammlung N=121 a, b, c.

malfläche, die sich tatsächlich einstellt, noch labile Gleichgewichtszustände möglich sind, die aber eben der Instabilität wegen nicht beobachtet werden, d.h. Flächen, die Extremalen, aber nicht Minimalflächen sind.

Was die analytische Darstellung der zu gegebenen Randwerten gehörigen Minimalfläche betrifft (die meist nicht möglich ist) führt in gewissen einfachsten Fällen eine funktionentheoretische Methode zum Ziel.

Man bildet das vom Rand \mathcal{L} begrenzte Minimalflächenstück A zweimal konform ab; einmal durch parallele Normalen auf die Einheitskugel, sein Bild sei B_1 , ein einblättriger Bereich. Dann wird A auf die Ebene abgebildet, in der die Krümmungslinien Koordinatenachsen sind: B_2 .

Wenn wir die Weierstrass'sche Darstellung benutzen:

$$\begin{aligned}x &= R \left(\int (1-\tau^2) F(\tau) d\tau \right) \\y &= R \left(\int i(1+\tau^2) F(\tau) d\tau \right) \\z &= R \left(\int 2\tau F(\tau) d\tau \right)\end{aligned}$$

brauchen wir also nur $F(\tau)$ zu bestimmen, um den analytischen Ausdruck der Fläche zu haben. Setzen wir $\sigma = \int \sqrt{2} F(\tau) d\tau$, dann stellen $R(\sigma) = \text{const}$, $I(\sigma) = \text{const}$ die Krümmungslinien dar; daher ist σ die komplexe Koordinate der zweiten Bildebene.

Andererseits ist durch τ die sphärische Abbildung bestimmt, denn man zeigt, dass τ die komplexe Koordinate in der Aequatorebene ist, wenn man die Bildpunkte, die man durch die Normalen erhalten hat, vom Nordpol aus projiziert:

Wenn es nun gelingt, das sphärische Bild $B_1(\tau)$ konform auf das Bild $B_2(\sigma)$ ~~abzubilden~~ abzubilden, dann hat man die Funktion $\sigma(\tau)$ gefunden und damit $F(\tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2$.

Dieser Fall tritt ein, wenn \mathcal{L} aus gradlinigen Strecken besteht. Denn die sphärischen Bilder der geradlinigen Begrenzungsstücke sind Bogen grösster Kugelkreise; B_1 ist also

ein sphärisches Polygon, dessen Seiten der Lage nach vollständig gegeben sind.

Andererseits sind die der Fläche angehörigen Geraden Haupttangentialkurven; als solche bilden sie (auf Minimalflächen) ein Orthogonalsystem, das das der Krümmungslinien halbiert. Daher wird der Bereich B_2 in der Ebene, in deren Koordinatenachsen die Krümmungslinien übergehen, von Geraden ^{die} ~~(unter~~ $\pm \frac{\pi}{4}$ zu den Achsen ~~begrenzt~~ ^{gezeigt sind} begrenzt.

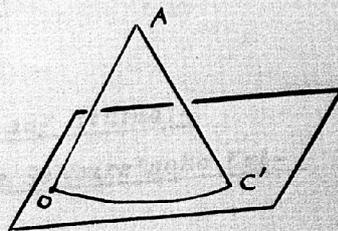
Auch noch in dem allgemeineren Fall kann man so vorgehen, den H.A. Schwarz formuliert: Gegeben sei eine zusammenhängige geschlossene Kette von geraden Strecken und Ebenen ("Schwarz'sche Kette"). Es soll ein einfach zusammenhängendes von den Geraden und Ebenen begrenztes Minimalflächenstück bestimmt werden, so, dass die Fläche die Ebenen senkrecht schneidet.

Die geradlinigen Teile der Begrenzung sind Haupttangentialkurven, die ~~Krummlinigen~~ Teile sind Krümmungslinien in den zur Fläche senkrechten Ebenen, da ja Krümmungskurven dadurch definiert werden können, dass sich successive Flächennormalen schneiden. Die Flächennormalen liegen also sämtlich in den Ebenen der Kette, daher bilden sich

die Krümmungslinien in Großkreise

der Kugel ab, deren Ebenen zu den Ebenen der Krümmungslinien parallel sind.

Das sphärische Bild der durch die Kette gelegten Minimalfläche ist daher ein aus Hauptkreisbogen gebildetes n -Eck. Das zweite konforme Bild der Fläche ist ein n -Eck, das von Geraden begrenzt wird, die zu einer der Koordinatenachsen oder zu deren Winkelhalbierenden parallel sind. In dem einfachsten Fall, (den Neovius in seinem Buch: "Bestimmung zweier spezieller periodischer Minimalflächen" behandelt) sind zwei Strecken gegeben, die von einem



*(vgl. Figuren auf S. 31.)

Punkt ausgehen und in einer Ebene mit bestimmter Neigung münden.
Die Bildbereiche sind : Auf der Kugel ein sphärisches
Dreieck, in der Ebene mit den Krümmungslinien als Koordinaten-
achsen ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck.

Wesentliche Voraussetzung für die Anwendung dieser Metho-
de der konformen Abbildung ist, dass das Minimalflächenstück
von singulären Stellen in seinem Innern frei ist; jedenfalls
macht Neovius diese Voraussetzung, ohne die die Aufgabe viel
schwieriger würde. Dabei sind unter singulären Stellen solche
verstanden, an denen die Konformität der Abbildung gestört wird.
Das geschieht in all den Punkten der Fläche, durch die mehr als
zwei Haupttangentialkurven gehen. Solche Punkte mögen "Flachpunk-
te" heissen.

Ueber die Anzahl dieser singulären Stellen, die auf ei-
ner von n Strecken begrenzten Minimalfläche auftreten können,
gibt der folgende Satz Auskunft :

Sei J die Anzahl der im Innern, R die Anzahl der
auf dem Rande liegenden singulären Punkte, so ist $n - 4 = 2J + R$.

Da dieser Satz in etwas allgemeinerer Fassung auch für
spätere Ueberlegungen von Bedeutung sein wird, so soll hierüber
eine längere Einschaltung gemacht werden.

Anzahlrelationen für Flachpunkte auf Minimal-
flächen die in Polygone oder allgemeine Schwarz'sche Ket-
ten eingespannt sind.

Problemstellung : Die Haupttangentialkurven bilden ein
Vierecksnetz auf der Fläche; ist es möglich, die ganze Fläche
derart mit einem Vierecksnetz zu überziehen, dass sich in keinem
Punkte mehr als zwei Haupttangentialkurven schneiden? Antwort :
Nein, im Allgemeinen, d.h. abgesehen von den beiden Fällen
"Viereck" und "zwei Kanten und eine Ebene" müssen immer, entweder

im Innern oder am Rande der Fläche, solche "Flachpunkte" auftreten. Zwischen ihrer Anzahl und der Anzahl der Elemente der Kette besteht eine feste Relation.

1. Polygonale Begrenzung.

Die Fläche sein in ein (nicht ebenes) n -Eck eingespannt $n > 3$. Sie sei mit einem festen Vierecksnetz endlicher Mascheinweite überzogen; die Polygonkanten selbst gehören als Haupttangentialkurven der Fläche diesem Netz an. Es bedeute:

e Anzahl der Knotenpunkte

k " " Kanten

f " " Vierecke

dieses Netzes. Unter der Voraussetzung der Schlichtartigkeit der Fläche besteht dann zwischen diesen Zahlen auf Grund des Euler'schen Polyedersatzes die Relation

$$(1) \quad e - k + f = 1.$$

Es bedeute nun:

R_i : die Anzahl der Eckpunkte des Begrenzungspolygons in denen genau i Haupttangentialkurven zusammenstossen; es ist also $i \geq 2$:

\bar{R}_i : die Anzahl der auf den Polygonkanten gelegenen Netzknoten, in denen genau i Haupttangentialkurven zusammenstossen; also $i \geq 2$. In beiden Fällen bedeutet also $i > 2$ das Auftreten eines Flachpunktes am Rande; schliesslich

J_i : die Anzahl der Netzknoten im Innern, in denen sich genau i Haupttangentialkurven schneiden; $i \geq 2$. $i > 2$ "Flachpunkt" im Innern.

Dann ist also, unter m eine hinreichend grosse Zahl verstanden,

$$e = \sum_{i=2}^m R_i + \sum_{i=1}^m \bar{R}_i + \sum_{i=2}^m J_i$$

$$2k = \sum_{i=2}^m i R_i + \sum_{i=2}^m (i+1) \bar{R}_i + 2 \sum_{i=2}^m i J_i$$

$$4f = \sum_{i=2}^m (i-1) R_i + \sum_{i=2}^m i \bar{R}_i + 2 \sum_{i=2}^m i J_i$$

also nach (1)

$$4(e - k + f) = 4 = \sum_{i=2}^{\infty} (3-i) R_i + \sum_{i=2}^{\infty} (2-i) \bar{R}_i \\ + 2 \sum_{i=2}^{\infty} (2-i) J_i = \sum_{i=2}^{\infty} R_i + \sum_{i=2}^{\infty} (2-i) (R_i + \bar{R}_i + 2J_i).$$

Nun ist, wenn m die höchste vorkommende Vielfachheit eines Knotenpunktes angibt,

$$\sum_{i=2}^{\infty} R_i = m,$$

es ist also

$$m - 4 = \sum_{i=3}^{\infty} (i-2) (R_i + \bar{R}_i + 2J_i),$$

wo also rechts wegen $i \geq 3$ nur noch über Flachpunkte summiert wird. Bedeutet R_i ~~anzahl~~ die Anzahl derselben, die am Rande liegen (wobei i die Vielfachheit angibt, also $i \geq 3$), so ist also

$$(2) \quad m - 4 = \sum_{i=3}^{m_1} (i-2) R_i + 2 \sum_{i=3}^{m_2} (i-2) J_i.$$

wobei die Summen bei

(3)

$$m_1 = m - 2$$

bzw.

(4)

$$m_2 = \left[\frac{m}{2} \right]$$

abbrechen.

2. Allgemeine Schwarz'sche Kette.

Die Bedeutung von e, k, f sei dieselbe wie früher, sobald die Fläche mit einem Vierecksnetz ganz überzogen ist. Da die Ebenen der Schwarz'schen Kette nicht Haupttangente - sondern Krümmungskurven auf der Fläche definieren, ^{so} müssen, zur Bildung

eines Vierecksnetzes die an diese Kurven anstossenden Dreiecke zu Vierecken ergänzt werden. Dies geschieht dadurch, dass man die Unterseite der Flächen nochmals mit demselben Netz von Haupttangentialkurven überzieht wie die Oberseite, die Kanten in der Begrenzung doppelt zählt, dafür aber an den Ebenen ohne Ueberschreitung einer Haupttangentialkurve zur Unterseite übergeht. Der Schwarz'schen Kette (entspricht von Fig. 1) dann eine nur noch polygonal begrenzte Fläche wie in Fig. 2 angegeben.

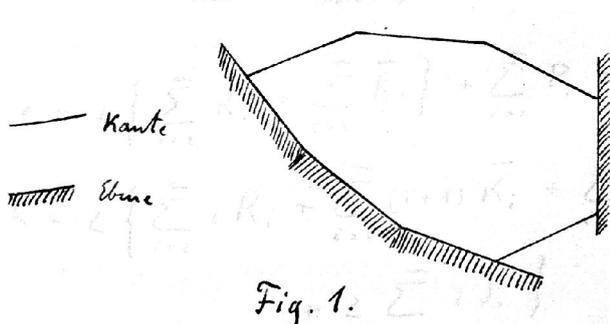


Fig. 1.

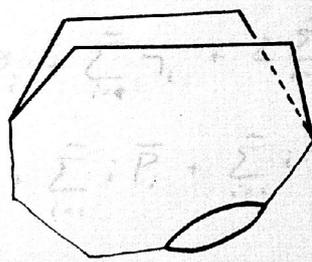


Fig. 2.

Dabei treten allerdings mehrere Züge geschlossener Randkurven auf. Sei ν ihre Anzahl; sei ferner p das Geschlecht der entstehenden Fläche (der Fall von Fig. 1 führt nach Fig. 2 auf $p = 0$, aber Fig. 3 ergibt z.B. $p = 1$), so tritt nun an Stelle von (1) die Formel

$$(5) \quad e - k + f = 2 - 2p - \nu$$

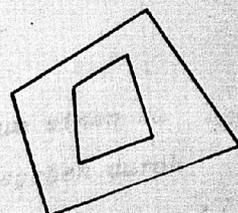


Fig. 3.

R_i und \bar{R}_i mögen dieselbe Bedeutung haben wie oben; es sei

P_i die Anzahl der von Ebenen miteinander gebildeten Ecken, in denen genau i Haupttangentialkurven münden, also (noch auf der Oberseite allein verstanden) ($i \geq 1$, da zwischen zwei Krümmungskurven mindestens eine Haupttangentialkurve münden muss.

\bar{P}_i die Anzahl der auf einer Ebene der Kette gelegenen Knotenpunkte des Netzes. Es ist also ($i \geq 2$, da^a bereits im regulären Falle das Aussehen eines solchen Eckpunktes des

Haupttangennetztes das in Fig. 4 angegebene sein muss.

Schliesslich sei γ_i die Anzahl derjenigen unter den "ungleichartigen"

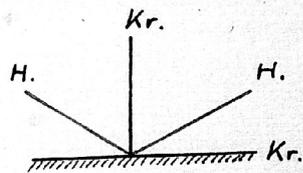


Fig. 4.

Ecken der Schwarz'schen Kette (Ebene - Kante), in der i Haupttangentenkurven zusammenlaufen, d.h. es sei hier $i \geq 1$.

Dann gilt also für die doppelseitig genommene Fläche :

$$e = 2 \left\{ \sum_{i=2}^m R_i + \sum_{i=2}^m \bar{R}_i \right\} + \sum_{i=1}^m P_i + \sum_{i=2}^m \bar{P}_i + \sum_{i=1}^m \gamma_i + 2 \sum_{i=2}^m J_i$$

$$2k = 2 \left\{ \sum_{i=2}^m i R_i + \sum_{i=2}^m (i+1) \bar{R}_i + \sum_{i=1}^m i P_i + \sum_{i=2}^m i \bar{P}_i + \sum_{i=2}^m i \gamma_i + 2 \sum_{i=2}^m i J_i \right\}$$

$$4f = 2 \left\{ \sum_{i=1}^m (i-1) R_i + \sum_{i=1}^m i \bar{R}_i + \sum_{i=1}^m i P_i + \sum_{i=2}^m i \bar{P}_i \right\} + \sum_{i=1}^m (2i-1) \gamma_i + 4 \sum_{i=2}^m i J_i$$

Es ist nämlich die Anzahl der Vierecke, die um einen zu beitragenden Eckpunkt liegen, nach Fig. 5 gegeben durch

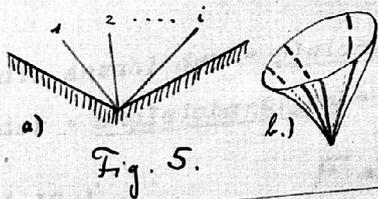


Fig. 5.

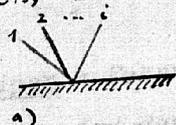


Fig. 6.

$2 + 2(i-1) = 2i$
bezw. für \bar{P}_i nach

Fig. 6 durch $2 + 2(i-1) = 2i$
bezw. für eine un-

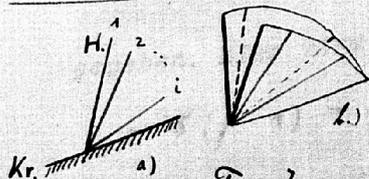


Fig. 7.

gleichartige Ecke nach Fig. 7 durch $1 + 2(i-1) = 2i-1$.

Bildet man nunmehr $4(e-k+f)$ d.h.

nach (5) die Zahl $4(2(1-p) - v)$, so ergibt sich hieraus unmittelbar

$$\begin{aligned}
 4(e-k+f) &= 4(2(1-p) - v) = \\
 &= 2 \sum_{i=2}^m (3-i) R_i + 2 \sum_{i=2}^m (2-i) \bar{R}_i + \\
 &2 \sum_{i=1}^m (2-i) P_i + 2 \sum_{i=2}^m (2-i) \bar{P}_i + \\
 &\sum_{i=1}^m (3-2i) \gamma_i + \\
 &4 \sum_{i=1}^m (2-i) J_i.
 \end{aligned}$$

Nun ist die Anzahl der Randkurven gegeben durch die halbe Anzahl der "ungleichartigen" Ecken der Kette, also

$$(6) \quad v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \gamma_i;$$

ferner ist

$$(7) \quad n_{kk} = \sum_{i=2}^m R_i$$

die Anzahl der Ecken der Kette zwischen Kanten und Kanten,

$$(8) \quad n_{ff} = \sum_{i=1}^m P_i$$

die zwischen Flächen und Flächen, also

$$(9) \quad E = n_{kk} + n_{ff} = \sum_{i=1}^m (R_i + P_i)$$

die Anzahl der "gleichartigen" Ecken der Kette. Die Anzahl der "ungleichartigen" Ecken wird dann durch

$$(10) \quad F = \sum_{i=1}^m \gamma_i$$

gegeben. Also wird

$$\begin{aligned}
 -8(p-1) &= 2 \left\{ \sum_{i=2}^m R_i + \sum_{i=2}^m (2-i) R_i + \right. \\
 &\sum_{i=2}^m (i-2) \bar{R}_i + \sum_{i=1}^m P_i + \sum_{i=1}^m (1-i) P_i + \sum_{i=2}^m (2-i) \bar{P}_i + \\
 &\left. 2 \sum_{i=2}^m (2-i) J_i \right\} + 3 \sum_{i=1}^m \gamma_i + 2 \sum_{i=1}^m (1-i) \gamma_i =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left\{ \sum_{i=2}^m R_i + \sum_{i=1}^m P_i \right\} + 3 \sum_{i=1}^m \gamma_i \\
&+ 2 \sum_{i=3}^m (2-i) (R_i + \bar{R}_i + \bar{P}_i + 2J_i) \\
&+ 2 \sum_{i=2}^m (1-i) (P_i + \gamma_i),
\end{aligned}$$

wobei also die beiden letzten Terme nur mehr auf Flachpunkte Bezug nehmen. Bezeichnet also $R_i^{(1)}$ die Anzahl der auf den Kanten, $R_i^{(1)}$ der auf den Ebenen gelegenen Randsingularitäten, so hat man also wegen (9) und (10)

$$\begin{aligned}
(11) \quad &E + \frac{3}{2} F + 4(p-1) = \\
&\sum_{i=3}^{m_1} (i-2) R_i^{(1)} + \sum_{i=2}^{m_2} (i-1) R_i^{(1)} + 2 \sum_{i=1}^{m_3} (i-1) J_i
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
(12) \quad m_1 &= E + \frac{3}{2} F + 4p - 2 \\
m_2 &= E + \frac{3}{2} F + 4p - 3 \\
m_3 &= \left[\frac{1}{2} (E + \frac{3}{2} F) \right] + p
\end{aligned}$$

bedeuten.

Die beiden ersten Terme der rechten Seite liessen sich in einen zusammenziehen (die Gliederzahl ist nach (12) dieselbe), wenn man in der Bezeichnung davon absähe, dass in einer durch zwei Ebenen gebildeten Ecke bereits das Zusammentreffen zweier Haupttangentialkurven eine Singularität bedeutet (dann schneiden sich nämlich dort drei Krümmungslinien.)

3. Spezielle Beispiele.

1. Eine polygonale Begrenzung.

Für die fünf niedrigsten Fälle $n = 4, 5, \dots, 8$ ergeben sich die folgenden Möglichkeiten

$$\begin{aligned}
 n = 4: & \quad R = 0 \quad J = 0 \\
 n = 5: & \quad R_3 = 1 \quad J = 0 \\
 n = 6: & \quad \dots
 \end{aligned}$$

Es muss sein

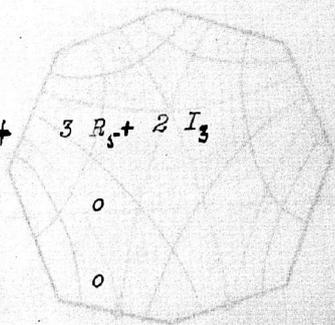
$$2 = R_3 + 2R_4 + 2I_3$$

Das gibt die Fälle :

- 1) $R_3 = 2$
- 2) $R_4 = 1$
- 3) $I_3 = 1$

$$n = 7: \quad 3 = R_3 + 2R_4 + 3R_5 + 2I_3$$

- 1) $R_3 = 3$
- 2) $R_4 = 1$
- 3) $R_3 = 1$
- 4) $R_5 = 1$



$$n = 8: \quad 4 = R_3 + 2R_4 + 3R_5 + 4R_6 + 2I_3 + 4I_4$$

- 1) $R_3 = 4$
- 2) $R_4 = 2$
- 3) $R_3 = 2$
- 4) $R_5 = 1$
- 5) $R_4 = 1$
- 6) $R_6 = 1$
- 7) $I_4 = 1$
- 8) $R_4 = 2$
- 9) $I_3 = 2$

Bei $n = 8$ tritt also das erste Mal ein "4-facher" Flachpunkt im Innern auf.

Diapositiv-Nr. 45 und 46 veranschaulichen die topologischen Verhältnisse in diesen Netzen. Aus der grossen Menge der möglichen Anordnungen sind immer die möglichst symmetrischen herausgegriffen. Für $n = 4, \dots, 7$ sind in jeder Gruppe noch die Fälle gesondert, wo die Randsingularitäten in Ecken oder auf Kanten fallen. Für $n = 8$ sind nur die Extremfälle gezeichnet, in denen alle Randsingularitäten auf Kanten oder alle in Ecken fallen. Auch unter Beschränkung auf Symmetrie ist die Anzahl der Möglichkeiten

eine sehr viel grössere als angegeben. Beispielsweise wäre für

$n = 8, R_3 = 2, I_3 = 1$ auch

eine Anordnung möglich, wie sie

Fig. 8. wiedergibt.

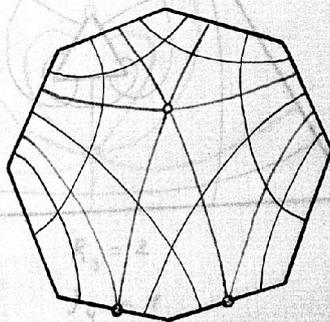


Fig. 8.

Für die äussere Gestalt dieser Flächen vgl. Diapositiv-Nr. 44.

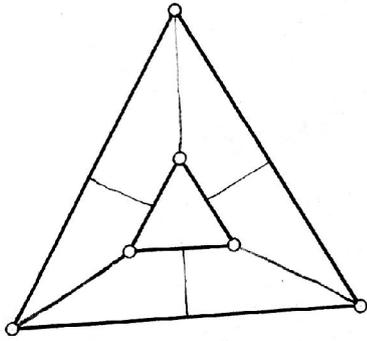
II. $p > 0$

Hier wird die Zahl der Möglichkeiten eine sehr grosse. Bereits im niedersten Fall der zwischen zwei Dreiecke eingespannten Fläche erhält man so viele Fälle, als der Zerlegung von gemäss (11) entspricht, als noch viel mehr Fälle als früher bei $n = 8$. Einzelne Beispiele vgl. die Tafel.

III. Allgemeines Schwarz'sche Kette.

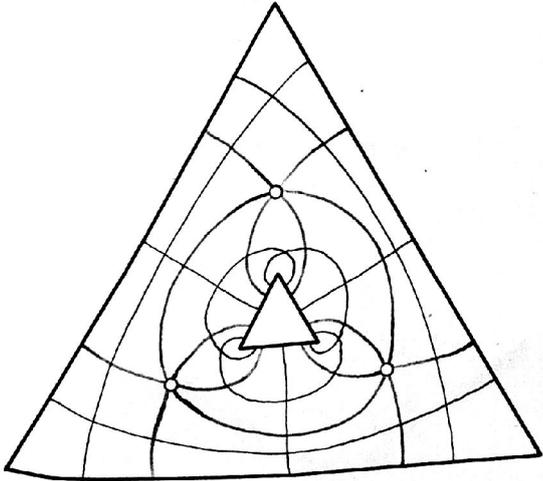
Einzelne Beispiele.

p = 1

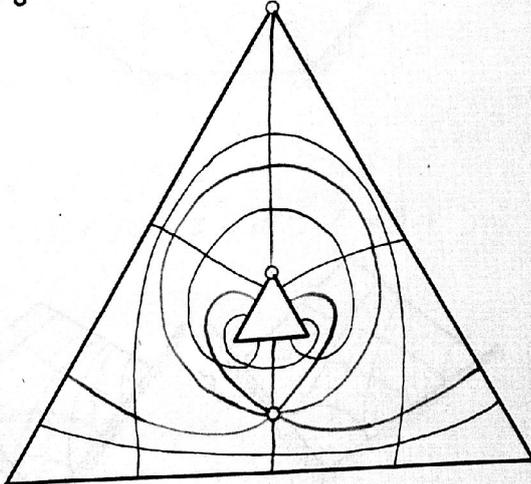


$R_3 = 6$
 $J = 0$

n = 6

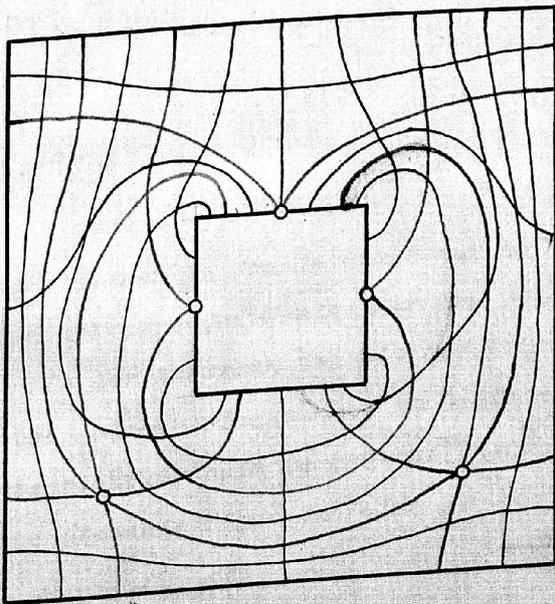


$R = 0$
 $J_3 = 3$



$R_3 = 2$
 $J_4 = 1$

n = 8



$R_3 = 2$
 $R_4 = 1$
 $J_3 = 2$

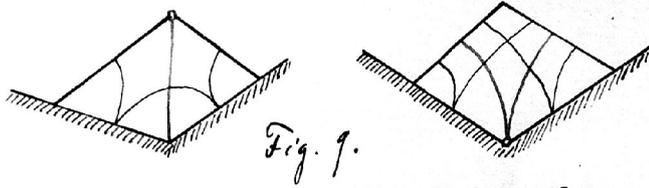


Fig. 9.

$E = 2 \quad F = 2 \quad 1 = R + 2I$ also $R = 1 \quad I = 0.$

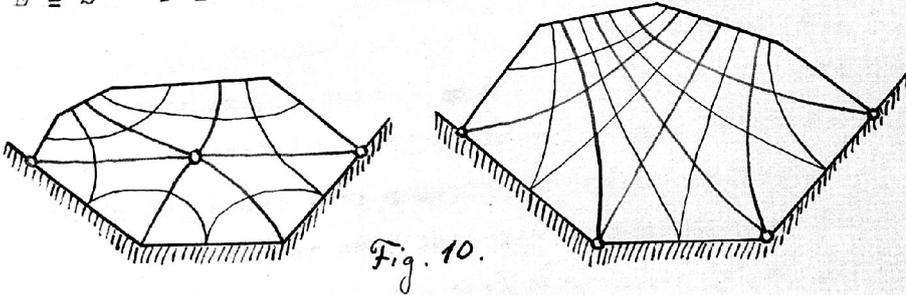


Fig. 10.

$E = 5 \quad F = 2 \quad 4 = R + 2I$

Schliesslich die restlichen Fälle für $E = 2 \quad F = 2 :$

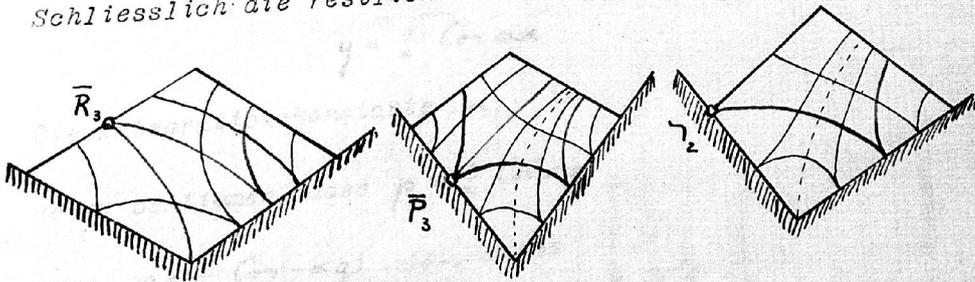


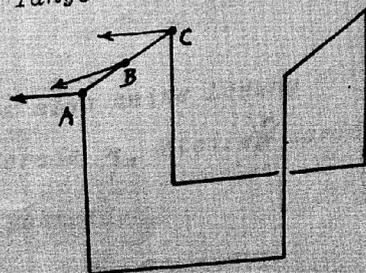
Fig. 11.

Man sieht an diesen Beispielen bereits deutlich, welche Rolle der Verschiedene Grad der Singularitäten an den Kanten bzw. Ebenen spielt.

Nach diesen im Grunde nicht nur auf Minimalflächen beschränkten Erörterungen wenden wir uns wieder diesen Flächen zu.

In der äusseren Gestalt der Flächen äussert sich das Auftreten solcher Flachpunkte am Rande durch ein Umkehren der Tangentenrichtung beim Fortschreiten längs einer Kante, wie es die nebenstehende Figur im Falle

$n = 8$ für die Kante A B C zeigt. In der sphärischen Abbildung



entspricht dieser Kante ein Teil eines grössten Kreises der aber doppelt durchlaufen wird: zunächst von A bis B, dann aber wieder zurück nach $C \approx A$. Im Punkte B hört die Konformität der Abbildung offenbar auf. Diese Erscheinung wird noch im Folgenden ihre analytische Erklärung finden.

Vorher aber soll noch als spezielles Beispiel das Katenoid behandelt werden, das sich durch eine Seifenhaut zwischen zwei parallelen Kreisringen realisieren lässt.

Die erzeugende Kettenlinie habe die Gleichung

$$y = \frac{1}{\alpha} \cos \alpha x$$

Die Integrationskonstante α ist

so zu bestimmen, dass $p = \frac{1}{\alpha} \cos \alpha q$

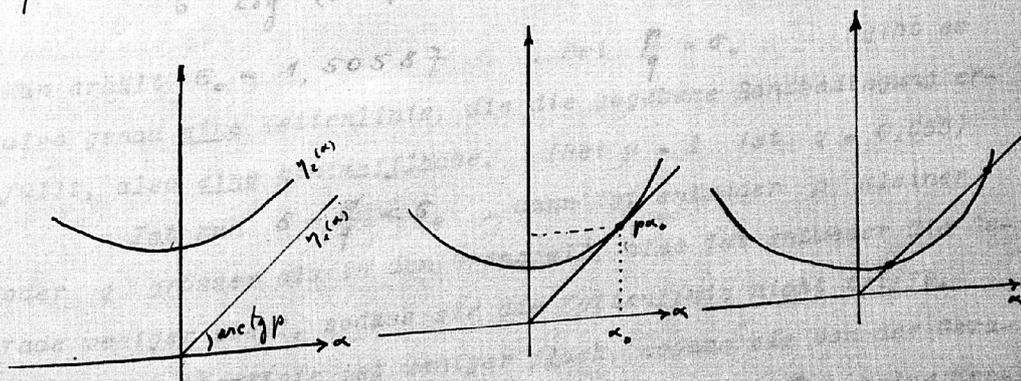
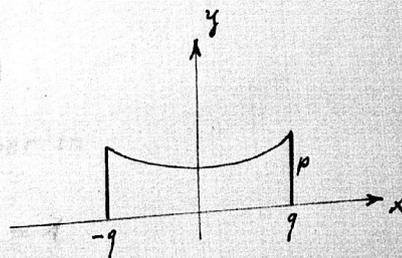
bezw. $p = \frac{1}{\alpha} \cos(-\alpha q)$ ist, wobei

p der Radius der Basiskreise

und q der halbe Abstand ist.

Um die Lösbarkeit der Gleichung $\alpha p = \cos \alpha q$ zu untersuchen (bei gegebenem p und q), zeichne man die Kurven

$\eta_1(\alpha) = \alpha p$ und $\eta_2(\alpha) = \cos \alpha q$.



Für gewisse Wertepaare p, q gibt es also keine Lösung. Wenn nun aber p wächst, wird die Gerade η_1 steiler werden, schliesslich η_2 berühren und dann schneiden.

In dem Berührungsfall ist

$$p \alpha_0 = \cos q \alpha_0 \quad p = q \sin q \alpha_0$$

also

$$p^2 \alpha_0^2 - \frac{p^2}{q^2} = -1$$

d. h.

$$(*) \quad p^2 (\alpha_0^2 q^2 - 1) = q^2$$

und ausserdem aus der zweiten Gleichung

$$\sin q \alpha_0 = \frac{p}{q}$$

woraus

$$q \alpha_0 = \log \left(\frac{p}{q} + \sqrt{\frac{p^2}{q^2} + 1} \right)$$

folgt. Daher geht die Gleichung (*) über in

$$\frac{p^2}{q^2} \left(\log^2 \left(\frac{p}{q} + \sqrt{\frac{p^2}{q^2} + 1} \right) - 1 \right) = 1$$

und daraus kann man $\frac{p}{q}$ berechnen. Das bedeutet, dass der Grenzfall, in dem es ein und nur ein Katenoid gibt, nicht von p und q getrennt, sondern nur vom Verhältnis $\frac{p}{q} = \sigma$ abhängt.

σ_0 sei die Wurzel der Gleichung

$$\sigma^2 \log^2 (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 1}) - 1 = 1.$$

Man erhält $\sigma_0 = 1,50587 \dots$. Bei $\frac{p}{q} = \sigma_0$ gibt es also genau eine Kettenlinie, die die gegebene Randbedingung erfüllt, also eine Minimalfläche. (Bei $p = 1$ ist $q = 0,665$)

Ist nun $\sigma = \frac{p}{q} < \sigma_0$, dann ist entweder p kleiner oder q grösser als in dem Grenzfall, also ist entweder die Gerade weniger steil, sodass sie die Kettenlinie nicht trifft, oder die Kettenlinie ist weniger flach, sodass sie von der Geraden nicht getroffen wird. Also gibt es bei $\sigma < \sigma_0$ keine Kettenlinie und kein Katenoid.

Bei $\sigma > \sigma_0$ schneiden sich Gerade und Kettenlinie in zwei Punkten α_1, α_2 , und jeder Wert α_1 und α_2 liefert

je eine Kettenlinie, die die Randbedingung befriedigt. Die Werte α_1 und α_2 hat man aus $p\alpha = \cos q\alpha$ zu bestimmen.

Die in dem Grenzfall auftretende einzelne Kettenlinie ist dadurch charakterisiert, dass die Tangent-en in den Punkten $\pm q, p$ durch den Ursprung gehen. Denn diese Kettenlinie hat die Gleichung

$$y = \frac{1}{\alpha_0} \cos x\alpha_0$$

wo α_0 die Gleichungen $p\alpha_0 = \cos q\alpha_0$

$$\text{und } p = q \sin q\alpha_0$$

befriedigt. Die Tangente in $+q, p$ hat die Gleichung

$$y = \sin q\alpha_0 (\xi - q) + \frac{1}{\alpha_0} \cos q\alpha_0$$

also ist (für $\xi = 0$)

$$y = -q \sin q\alpha_0 + \frac{1}{\alpha_0} \cos q\alpha_0$$

$$= -p + \frac{1}{\alpha_0} p\alpha_0 = 0.$$

Das ~~zugehörige~~ Katenoid hat also als die beiden Tangentialkegel¹ in den Basiskreisen einen Doppelkegel mit der Spitze im Ursprung.

α_0 wird aus der Gleichung $q\alpha_0 = \log(\sigma_0 + \sqrt{\sigma_0^2 + 1})$ bestimmt. Wählen wir den Radius p als Einheit, dann ist $\sigma_0 = \frac{1}{q}$ und es wird $\alpha_0 = 1,804\dots$ (Kehlkreisradius $\frac{1}{\alpha_0} = 0,554\dots$).

Wenn $\sigma > \sigma_0$ ist und also zwei Kettenlinien existieren, dann ist eine der beiden Konstanten α_1 und α_2 , die die beiden Kettenlinien charakterisieren, grösser und eine ist kleiner als α_0 d. h. $\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$; und für $\sigma \rightarrow \sigma_0$ wird

α_1 und α_2 gegen α_0 konvergieren.

Die Kettenlinien $y_1 = \frac{1}{\alpha_1} \cos \alpha_1 x$

und $y_2 = \frac{1}{\alpha_2} \cos \alpha_2 x$

haben die Kehlkreisradien $\frac{1}{\alpha_1}$ bzw. $\frac{1}{\alpha_2}$;

z.B. gehören zu $p=1$ $q=0,6$ d.h. zu

$$\sigma = 1,667 \dots$$

die Werte $\alpha_1 = 1,3444 \dots$ und $2,8425 \dots$ und
 die Kettenlinie $y_1 = 0,745 \cdot \cos^{1,667} \alpha x$ und $y_2 = 0,352 \cos 2,8425 x$
 mit $y_1' = 0,897$ bzw. $y_2' = 2,661$ für $x=0,6$.

Da $y = \frac{1}{\alpha} \cos \alpha x$ als Funktion von α monoton ist

$$\left(\frac{dy}{d\alpha} = -\frac{\cos \alpha x}{\alpha^2} + \frac{x}{\alpha} \sin \alpha x < 0 \quad \text{für genügend kleine } x\text{-Werte} \right)$$

in der Nähe von $x=0$ liegt die Kettenlinie mit kleinerem
 α („ α_1 “) oberhalb der mit grösserem α („ α_2 “).

Vergleichen wir nun die Oberflächen der beiden möglichen
 Katenoide!

$$-q \leq x \leq q \quad w = \left\{ \rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, x \right\}$$

$$\text{wo } \rho = \frac{1}{\alpha} \cos \alpha x.$$

$$\text{Also: } w_q = \left\{ -\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0 \right\}$$

$$w_q^2 = \rho^2 = \frac{1}{\alpha^2} \cos^2 \alpha x = E$$

$$\text{Ferner: } w_x = \left\{ \sin \alpha x \cos \varphi, \sin \alpha x \sin \varphi, 1 \right\}$$

$$w_x^2 = 1 + \sin^2 \alpha x = \cos^2 \alpha x = G.$$

$$\text{Und: } w_q w_x = F = 0. \text{ Also:}$$

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} d\varphi dx = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} \cos^2 \alpha x \cdot \cos^2 \alpha x} d\varphi dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \cos^2 \alpha x d\varphi dx.$$

Also

$$0 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 d\varphi \frac{1}{\alpha} \cos^2 \alpha x dx = \frac{2\pi}{\alpha} \int_{-1}^1 \cos^2 \alpha x dx$$

$$= \frac{2\pi}{\alpha} (q + p \sin \alpha q).$$

Die beiden Basiskreise haben zusammen den Flächeninhalt $J = 2\pi p^2$

Daher ist

$$A = \frac{O}{J} = \frac{1}{\sigma p^2} (q + p \sin \alpha q)$$

$$= \frac{1}{\sigma \cos q\alpha} + \operatorname{Tg} q\alpha$$

Dazu die Gleichung:

$$\sigma = \frac{\cos q\alpha}{q\alpha}$$

Durch Elimination von $q\alpha$ gelingt es, A als Funktion von σ darzustellen.

Man erhält folgende Werte:

$q\alpha$	σ	A	$1/\alpha$
0,05	20,025	0,09976	0,998
0,1	10,05	0,1987	0,995
0,2	5,1	0,3892	0,980
0,4	2,708	0,721	0,923
0,6	1,979	0,963	0,844
0,8	1,670	1,113	0,749
1,0	1,5343	1,1866	0,652
1,198	1,50587	1,199	0,554
1,5	1,568	1,17665	0,425
2	1,8811	1,1051	0,266
4	6,827	1,00469	0,0366
6	33,6	1,00014	0,00496

Ausser bei $\sigma = \infty$ ist $A = 1$ bei $q\alpha = 0,6392$ $\sigma = 1,8947$.

$\frac{1}{\alpha} = 0,826$

A hat ein Max. bei

$$\frac{dA}{dq\alpha} = \frac{2}{\cos^2 q\alpha} - \frac{2 \operatorname{Tg} q\alpha}{\sigma \cos q\alpha} = 0 \quad \text{d.h.} \quad q\alpha = \cos q\alpha$$

$A(\sigma)$ hat zwei Aeste, deren einer asymptotisch gegen $A=0$, deren anderer gegen $A=1$ strebt; der über $A=1$ liegende Ast stellt das instabile Katenoid dar; bei Annäherung von σ an σ_0 .

wird schliesslich ($\sigma = 1,8947\dots$) auch der untere Ast instabil, das Katenoid zerplatzt aber erst bei $\sigma = \sigma_0$. Die Lösung der Gleichung

$$q\alpha \cos q\alpha$$

ist

$$q\alpha = 1,1993\dots$$

dazu gehört

$$\sigma = 1,5089\dots$$

Es ist (bei $\nu = 1$)

$$A_{\text{min}} = 1,19968\dots$$

und

$$\frac{1}{\alpha_{\text{min}}} = 0,5526\dots$$

Für die äussere Gestalt der verschiedenen möglichen Katenoide vergl. Diapos. Nr. 42. Dabei bedeutet κ_1 den Kehlkreisradius des stabilen, κ_2 den des labilen Katenoids. Aehnlich wie oben findet man für die Oberfläche σ des Katenoids

$$\frac{\sigma}{2r'n} = \frac{\lambda}{\cos \lambda} + \text{Tg } \lambda$$

wenn r den Deckkreisradius angibt, d den Abstand der beiden Deckkreise und λ durch

$$x = \frac{d}{r} = \frac{2\lambda}{\cos \lambda}$$

bestimmt ist. Wie Diapos. Nr. 42 zeigt, so ist nur für $0 \leq x \leq 1,32\dots$ ein stabiles Katenoid möglich. 1)

- 1) Literatur: Lindelöf - Moigno, Calcul des variations, S. 204 ff;
Plateau, Statique des liquides I § 56 ff, 79 ff, 411 ff;
Schwarz, Abh. Bd. I S. 270 ff.