Seminar Courant-Herglotz-Hilbert

1925-26

Spezielle Minimalflächen

Vortrag von
Willy Feller

Spezielle Minimalflächen

Vortrag von

Willy Feller.

Zweck dieses Vortrags ist, die bisher entwickelte Theorie auf konkrete Beispiele anzuwenden, und insbesondre die gestaltlichen Verhältnisse einiger speciellen Minimalflächen zu besprechen. Es soll demnach möglichst wenig gerechnet und überhaupt keine neue Theorie entwickelt werden. Dennach können wir nicht umhin, zuerst eine wichtige und interessante Klasse von Minimalflächen, die Minimaldoppelflächen, auch von theoretischer Seite aus zu betrachten, da sie in diesem Seminar noch überhaupt keine Erwähnung fanden. Sodann ~~übergehen~~ gehen wir zu einigen speciellen Flächen, über ~~denen wir~~, deren Modelle uns zur Verfügung stehen, um endlich auf die Neovius'sche Fläche sprechen zu kommen, welche die Lösung eines speciellen Plateauschen Problems darstellt, und die uns überaus interessante Einblicke in das Wesen und Aussehen der Minimalflächen gewinnen lässt.

Was die Literatur betrifft wären für den ersten Teil, d.h. für die Theorie der Doppelflächen, neben Darboux noch die Originalarbeiten von S. Lie in den Math. Annalen Bd 14 und 15 zu erwähnen. Mit der Bestimmung von Minimalflächen, welche eine Schar gewisser Kurven enthalten, oder eine bestimmte ebene Kurve als geodätische Linie besitzen, befassten sich insbesondre H. A. Schwarz, (s. seine gesammelten ~~Werke~~)+ und Henneberg in seiner Dissertation= und anderen Arbeiten (s. Separata des Lesezimmers). Wir können auf ~~die~~ Einzelheiten dieser Theorien hier nicht eingehen.

+ Abh. Bd. 1

= (Separ. des L. Z. B25)

Die gestaltlichen Verhältnisse im allgemeinen sind beschrieben in den Katalogen math. Modelle von Schilling und Brill. Für die einzelnen Flächen sind zu erwähnen:

Hennebergsche Fl.: Schilling, Diss. Gött., Lesezimmer Bd. B 32

Ennepersche Fl.: Darboux; zuerst kommt sie vor bei Enneper, Ztschr. f. Math. u. Phys. 1864.

Catalansche Fl.: École Polytechnique 37, (1858)

Fl. m. den Lemniskaten als geodätischen Linien: Lichtenfels, Wiener Akad. 10. VI. 1886, Lesez. D 13

Neovius'sche Fl.: H. A. Schwarz und insbesondre Neovius: Bestimmung zweier Minimalflächen, Helsingfors 1883, wo sich auch Lichtbilder eines Modells derselben befinden (Diapos. № 1047 unserer Sammlung)

· I ·

Über Minimaldoppelflächen. Die Henneberg'sche Fläche.

Ausgehen wollen wir von der Lieschen Theorie, nach welcher die Minimalflächen als Schiebeflächen aufzufassen sind, welche in doppelter Weise durch das Gleiten einer isotropen Kurve längs einer anderen entstehen. Sind $\xi_i(\alpha)$ $(i = 1, 2, 3)$ die Koordinaten einer isotropen Kurve so ~~wird~~ ist

$$\xi_1'^2(\alpha) + \xi_2'^2(\alpha) + \xi_3'^2(\alpha) = 0 .$$

Setzen wir daher
$$\frac{\xi_1'(\alpha) + i\,\xi_2'(\alpha)}{\xi_3'(\alpha)} = -u$$

so wird
$$\xi_1' - i\,\xi_2' = \frac{\xi_3'}{u}$$

und daher
$$\frac{\xi_1'}{1-u^2} = \frac{\xi_2'}{i(1+u^2)} = \frac{\xi_3'}{2u} = \frac{1}{2}\cdot\mathfrak{F}(u)\cdot\frac{du}{d\alpha}$$

Die allgemeinste isotrope Kurve wird also bestimmt durch die Formeln

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{2}\int(1-u^2)\cdot F(u)\cdot du \\ \xi_2 = i\cdot\frac{1}{2}\int(1+u^2)\cdot F(u)\cdot du \\ \xi_3 = \int u\cdot F(u)\cdot du, \end{cases}$$

und ersichtlich ergibt auch umgekehrt jede Funktion $F(u)$ in diese Formeln eingesetzt eine isotrope Kurve. Dabei muss aber betont werden, dass die so bestimmten Kurven Träger einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit von Punkten sind, da ja der Parameter $\underline{u}$ beliebiger komplexer Werte fähig ist.

Aus den letzten Gleichungen folgen nach dem gesagten unmittelbar die allgemeinsten <u>Weierstrassischen Formeln</u> für Minimalflächen.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\int(1-u^2)\cdot F(u)\cdot du + \frac{1}{2}\int(1-v^2)\cdot G(v)\cdot dv \\ x_2 = i\frac{1}{2}\int(1+u^2)\cdot F(u)\cdot du - i\cdot\frac{1}{2}\int(1+v^2)\cdot G(v)\cdot dv \\ x_3 = \int u\cdot F(u)\cdot du + \int v\cdot G(v)\cdot dv \end{cases}$$

Bekanntlich wird die Fläche dann und nur dann reell, oder genauer ausgedrückt Träger einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit von reellen Punkten, wenn die Funktionen $F(u)$ und $G(v)$ konjugiert sind, und zwar erhält man die reellen Punkte, indem man den Parametern u und v konjugiert-komplexe Werte erteilt.

Erwähnenswert dürfte noch eine andere Erzeugungsweise der Minimalflächen sein, die unmittelbar aus den Weierstrassischen Formeln abzulesen ist:

<u>Eine Minimalfläche ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Strecken, die irgend einen Punkt einer isotropen Kurve mit irgend einem Punkte einer anderen isotropen Kurve verbinden.</u>

Nach diesen flüchtigen Vorbemerkungen bzw. Erinnerungen können wir zur eigentlichen Theorie übergehen.

Uns interessiert der besondere Fall dass beide erzeugende Kurven kongruent sind, d.h. dass sie durch eine reine Translation in einander übergeführt werden können. Auf dem ersten Blick scheint dieser Fall kein besonderes Interesse zu bieten: die Fläche wird wie jede andere Minimalfläche in zweifacher Weise durch das Gleiten dieser Kurven aneinander erzeugt und durch jeden Punkt der Fläche gehen auch hier zwei isotrope Kurven hindurch. Da aber beide erzeugende Kurven in einer gewissen Lage zusammenfallen, so haben wir auf der Fläche eine doppelt zu zählende Kurve, längs welcher ein Übergang von der einen Schar zur anderen stattfinden kann. M.a.W.: es wird unmöglich auf diesen Flächen zwei Scharen von isotropen Kurven zu unterscheiden; beide Scharen fallen zusammen. Dies ist der Umstand welcher Lie veranlasste, diesen Flächen den Namen <u>Doppelflächen</u> zu geben.

In Anschluss an die zweite oben erwähnte allgemeine Entstehungsweise der Minimalflächen können wir unsere Doppelflächen auch folgendermassen definieren:

Eine Minimaldoppelfläche ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen einer beliebigen isotropen Kurve.

Demnach bestehen allerdings solche Doppelflächen, jedoch bleibt es fraglich, ob sie auch reell sein können. Um diese Frage beantworten zu können wollen wir die Bedingungen aufsuchen denen die Funktionen $F(u)$ und $G(v)$ in den Weierstrassischen Formeln zu unterwerfen sind, damit die Fläche eine Doppelfläche wird. Daraus wird sich gleichzeitig eine überaus interessante Eigenschaft der untersuchten Flächen ergeben.

Aus der Kongruenz der erzeugenden Kurven folgen sofort die Relationen:

$$(1-u^2)\cdot F(u)\cdot du = (1-v^2)\cdot G(v)\cdot dv$$
$$(1+u^2)\cdot F(u)\cdot du = (1+v^2)\cdot G(v)\cdot dv$$
$$u\cdot F(u)\cdot du = \quad v\cdot G(v)\cdot dv$$

oder $$\frac{1-u^2}{1-v^2} = \frac{1+u^2}{1+v^2} = \frac{u}{v}.$$

Durch Ausrechnung folgt neben der trivialen Lösung $u=v$ nur noch $$v = -\frac{1}{u}$$
also $$F(u) = -\frac{1}{u^4}\cdot G\left(-\frac{1}{u}\right).$$

Das ist die gesuchte notwendige Bedingung und man erkennt sofort, dass sie auch hinreichend ist. Falls sie erfüllt ist so entsprechen die homologen Punkte der Kurven den Werten u und $v=-\frac{1}{u}$ der Parameter. Reell (d.h. Träger einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit von reellen Punkten) wird die Fläche wenn G konjugiert ist zu F, und man erhält auf diese Weise unmittelbar reelle Doppelflächen, z.B. indem man etwa
$$F(u) = 1 - \frac{1}{u^4}$$
setzt. Dies ergibt die noch zu besprechende Hennebergsche Fläche.

Reelle Punkte der Fläche erhält man indem man $v=\bar{u}$ setzt. Nun entspricht aber wie gesagt den Wertepaaren $(u,\bar{u})$ und $(-\frac{1}{\bar{u}}, -\frac{1}{u})$ derselbe Punkt der Fläche. Anderseits ist u die komplexe Veränderliche auf der Kugel, und hier entsprechen den Werten u und $-\frac{1}{\bar{u}}$ zwei diametral entgegengesetzte Punkte. In der Tat; die ~~kompone~~ Koordinaten des Bildpunktes auf der Kugel, oder, was dasselbe ist, die Komponenten des Einheitsvektors der Flächennormale sind
$$\xi_1 = \frac{u+\bar{u}}{u\bar{u}+1}, \quad \xi_2 = \frac{1}{i}\cdot\frac{u-\bar{u}}{u\bar{u}+1}, \quad \xi_3 = \frac{u\bar{u}-1}{u\bar{u}+1},$$
und man sieht dass nur die Vorzeichen gewechselt werden, falls man u durch $-\frac{1}{\bar{u}}$ ersetzt. Wenn also der Bildpunkt auf der Kugel auf irgend einem Wege von einem Punkte aus zu dem gegenüber liegenden gelangt, so sind wir auf der Fläche auf einem stetigen, im Endlichen gelegenen Wege, ohne die Fläche zu durchsetzen zum Aus-

gangspunkt zurück gekehrt, so zwar, dass sich der Sinn der Normale dabei geändert hat: die Minimaldoppelflächen sind einseitige Flächen.

Zum Begriff der Doppelflächen wären wir auch dann geführt worden, wenn wir uns auf reelle Fläche beschränkt hätten. Es ist nämlich leicht erkennbar, dass während zu jeder Funktion $F(u)$ in den Weierstrassischen Formeln für reelle Flächen genau eine Minimalfläche gehört, umgekehrt dieselbe Fläche durch zwei im allgemeinen verschiedene Funktionen bestimmt wird. Die Doppelflächen sind nun diejenigen Flächen, bei denen beide zugehörige Funktionen einander gleich werden, zu denen also bloss eine Funktion $F(u)$ gehört.

Um nun diese allgemeinen Entwicklungen zu verlassen, wollen wir uns der schon erwähnten Hennebergschen Fläche zuwenden.

Sie ist die einfachste Minimaldoppelfläche, die einzige 5ter Klasse, da es sich zeigen lässt, dass alle Minimalflächen 5ter Klasse einander ähnlich sind. Die erzeugende Kurve hat die Gleichungen $x_1 = \frac{(1-s^2)^3}{s^3}$, $x_2 = \frac{i(1+s^2)^3}{s^3}$, $x_3 = \frac{3(1+s^4)}{s^2}$, wobei der Übersichtlichkeit halber $s = \frac{u}{2}$ gesetzt wurde; die Gleichungen der Fläche sind

$$\begin{cases} x_1 = \left(\frac{1}{s^3} + \frac{1}{\bar{s}^3}\right) - 3\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{\bar{s}}\right) + 3(s+\bar{s}) - (s^3+\bar{s}^3) \\ x_2 = i\left\{\left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{\bar{s}^3}\right) + 3\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\bar{s}}\right) + 3(s-\bar{s}) + (s^3-\bar{s}^3)\right. \\ x_3 = 3\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{\bar{s}^2}\right) + 3(s^2+\bar{s}^2) \end{cases}$$

Die Ebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ sind Symmetrieebenen der Fläche, die Geraden $x_1 = \pm x_2$, $x_3 = 0$ Symmetriegeraden. Die x_3-Achse (die am Modell nur etwa 10 cm reelle Punkte enthält) ist Doppelgerade der Fläche: längs ihr kann somit ohne Weiteres der Übergang von der einen „Seite" zur anderen vollzogen werden.

· II ·

Weitere spezielle Minimalflächen.

Die ersten Minimalflächen sind fast eben so lange bekannt wie die Theorie der Minimalflächen überhaupt alt ist: es sind dies die gewöhnliche Schraubenfläche und das Katenoid, welche schon Meusnier im Jahre 1776 als Minimalflächen erkannte. Sie ergeben sich aus der partiellen Differentialgleichung unmittelbar wenn man für die Lösungen die Ansätze

$$x_3 = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \quad \text{und} \quad x_3 = f(x_1^2 + x_2^2)$$

macht. Wir wollen uns bei diesen Flächen nicht länger aufhalten, da sie schon wiederholt besprochen und ihre Modelle schon vorgeführt wurden.

Um zu weiteren speziellen Flächen zu gelangen wollen wir irgend eine interessante Eigenschaft vorschreiben, und die zugehörigen Flächen zu bestimmen suchen. So wollen wir beginnen mit der Bestimmung sämtlicher Minimalflächen, welche eine Schar ebener Krümmungslinien enthalten.

Hier vereinfacht sich die Sache ausserordentlich, denn wenn auf einer Minimalfläche eine Schar von Krümmungslinien eben ist, so besteht auch die zweite Schar aus ebenen Kurven.

In der Tat. Längs einer Krümmungslinie umhüllen die Flächennormalen eine abwickelbare Fläche und somit auch deren Rückkehrkannte, welche ihrerseits wieder eine Evolute der Krümmungslinie ist. Da sich aber die zu zwei bestimmten Evoluten gehörigen Normalen einer Kurve unter konstantem Winkel schneiden, so treffen die Flächennormalen die Ebene der Krümmungslinie unter einem festen Winkel. Die zugehörigen Radien der Kugel liegen also auf einen Kreis~~zylinder~~kegel, und daher entspricht jeder Schar von ebenen Krümmungslinien auf der Kugel eine Schar von Kreisen. Die orthogonalen Trajektorien dieser Kreise entsprechen der anderen Schar von

Krümmungslinien und müssen daher mit den Kreisen ein
isothermes Netz bilden. Wenn aber in einem isothermen Netze
~~der~~ die Kurven einen Schar ~~von Kurven~~ Konstante geodätische Krümmung
besitzen, so gilt dasselbe für die Kurven der zweiten Schar.
Demnach bestehen die orthogonalen Trajektorien der Kreise wieder
aus Kreisen, und die zweite Schar von Krümmungslinien wird
offenbar auch eben, wie es behauptet wurde.

Unsere Aufgabe läuft somit darauf hinaus, auf der Kugel
alle orthogonal-isothermen Netze von Kreisen zu ermitteln und
die Minimalflächen zu bestimmen, deren Krümungslinien diesen
Kreisen entsprechen. Die gesuchten Netze erhält man aber einfach
auf die Art, dass man die Kugel durch zwei Ebenenbüschel
schneidet, deren Träger bezüglich der Kugel reciproke Polaren
sind: Im allgemeinen Falle haben alle die Kreise zwei
verschiedene Punkte gemeinsam. Für diesen Fall ergibt sich
die Bonnetsche Fläche:

$$\begin{cases} x_1 = a\varphi + \sin\varphi \cdot \operatorname{ch}\vartheta \\ x_2 = -\vartheta + a \cdot \operatorname{sh}\vartheta \cdot \cos\varphi \\ x_3 = \sqrt{1-a^2} \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{ch}\vartheta, \end{cases}$$

wobei a eine willkürliche Konstante bedeutet. Für $a=0$ erhalten
wir das Katenoid. Im speziellen Falle wo alle Kreise des
Systems durch einen Punkt hindurchgehen, sind die Träger der
beiden Ebenenbüschel konjugierte d.h. senkrechte Tangenten
der Kugel. Setzen wir den Punkt in den Nordpol, um so
können wir die zwei Büschel je einer Achse parallel annehmen,
d.h. wir schneiden die Kugel durch die beiden Büschel:

$$x_1 + \alpha(x_3 - 1) = 0 \quad \text{und} \quad x_2 + \beta(x_3 - 1) = 0.$$

Setzen wir $\qquad u = \alpha + i\beta$
so sind die Koordinaten des Bildpunktes auf der Kugel
gegeben durch die Formeln

$$\xi_1 = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2+1}, \quad \xi_2 = \frac{2\beta}{\alpha^2+\beta^2+1}, \quad \xi_3 = \frac{\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha^2+\beta^2+1}.$$

Für $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ geben diese Gleichungen offenbar
die Schnittkreise mit dem Büschel $\alpha = \text{const.}$ bzw. $\beta = \text{const.}$

Es entsprechen somit den Kurven $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$, und das sind in der u-Ebene gerade die Achsenparallelen, den Krümmungslinien der Fläche. Nun war $F(u)$ die Funktion, welche die beiden konformen Abbildungen der Fläche vermittelte, diejenige nämlich in der Kugelebene und jene, bei welcher den Krümmungslinien Achsenparallele entsprechen. Da dies hier schon in der Kugelebene der Fall ist, so haben wir bloss $F(u) = \text{const.}$ zu setzen, um die sogenannte

Ennepersche Fläche

zu erhalten. Die Grösse der Konstanten hat offenbar nur auf die Grössenverhältnisse Einfluss; setzen wir, wie es beim vorliegenden Modell geschehen ist, speziell $F(u) = 3$, so folgen die Gleichungen der Fläche

$$\begin{cases} x_1 = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3 \\ x_2 = \beta^3 - 3\beta - 3\alpha^2\beta \\ x_3 = 3(\alpha^2 - \beta^2) \end{cases}$$

Sie ist eine algebraische Fläche und zwar von neunter Ordnung, wie es ohne weiteres ersichtlich, wenn man zu den Gleichungen noch zwei lineare in x_1, x_2 und x_3, d.h. die Gleichungen einer Geraden hinzufügt und die Grössen x_1, x_2 und x_3 eliminiert. Es folgen zwei Gleichungen dritten Grades für α und β, so dass die Fläche in der Tat neun Schnittpunkte mit einer Geraden hat.

Durch Elimination von α bzw. β ergeben sich die Krümmungslinien $\alpha = \text{const.}$ bzw. $\beta = \text{const.}$:

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha x_3 + 3\alpha + 2\alpha^3 \\ x_2^2 = \left(\alpha^2 - \frac{x_3}{3}\right)\left(\frac{x_3}{3} + 3 + 2\alpha^2\right)^2 \end{cases} \quad \text{bzw} \quad \begin{cases} x_1^2 = \left(\beta^2 + \frac{x_3}{3}\right)\left(-\frac{x_3}{3} + 3 + 2\beta^2\right)^2 \\ x_2 = -\beta x_3 - 3\beta - 2\beta^3. \end{cases}$$

Es sind also tatsächlich ebene Kurven, und zwar Unikursalkurven dritter Ordnung. Sie sind algebraisch rektifizierbar, d.h. Evoluten von algebraischen Kurven. Überhaupt sind nach Lie alle ebenen algebraischen Krümmungslinien algebraischer Minimalflächen algebraisch rektifizierbar. Nach Henneberg gilt dasselbe sogar von allen ebenen geodätischen Linien, und es trifft sogar für die Querschnitte jedes Zylinders zu, der einer algebraischen Minimalfläche umschrieben ist.

Das Modell der Sammlung veranschaulicht diese Fläche. Die Flächenmäntel sind weiter ins Unendliche fortgesetzt zu denken, denn diese Fläche ist zum Unterschied von allen folgenden nicht periodisch. Das isotherme Netz am Modell besteht aus Krümmungslinien, die diagonalen Linien sind Asymptotenkurven. Der Nullpunkt des Koordinatensystems fällt in den Punkt mit der grössten Gesamtkrümmung, welcher am Modell sofort erkennbar ist. Von diesem Punkte aus gehen zwei gerade Asymptotenlinien, und zwar sind es die Geraden $x_1 = \pm x_2, x_3 = 0$. Die Krümmungslinien liegen hier in den Ebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$.

Die konjugierte Fläche stimmt der Gestalt nach mit der Enneperschen überein; sie ist also auf sich selbst abwickelbar, so zwar, dass Krümmungslinien in Asymptotenkurven übergehen, und umgekehrt. Diese Abwickelung geschieht so, dass beide erwähnten Krümmungslinien zu Geraden verbogen werden und durch eine Drehung um 45° um die x_3-Achse mit den geraden Asymptotenkurven zum decken gebracht werden. Diese Asymptotenlinien gehen dabei selbstredend in die nämlichen Krümmungslinien über.

Indem wir uns nun anderen Flächen zuwenden wollen, bemerken wir noch ausdrücklich wie aus unseren Ausführungen folgt, dass die Bonnet'sche und die Ennepersche Fläche die *einzigen* Minimalflächen mit ebenen Krümmungslinien sind.

Weitere interessante Flächen liefert uns die Forderung, dass eine bestimmte ebene Kurve geodätische Linie der Fläche wird. Dieses Problem ist vollkommen bestimmt, weil ja die Flächennormalen in die Ebene der Kurve fallen müssen. Allgemeiner kann man das Problem betrachten, alle Minimalflächen zu bestimmen auf welchen sich eine Schar gewisser Kurven befindet. Wir lassen uns nicht näher drauf ein, sondern verweisen auf die Arbeiten von H. A. Schwarz, Henneberg, Lie u. A.

Die Catalansche Minimalfläche

hat eine Parabel als geodätische Linie. Ihre Gleichungen sind

$$\begin{cases} x_1 = a\cdot\sin 2\varphi + \frac{a}{2}\cdot v^2 \sin 2\varphi - 2a\varphi \\ x_2 = -a\cdot\cos 2\varphi - \frac{a}{2}\cdot v^2 \cos 2\varphi \\ x_3 = 2av\cdot\sin\varphi \end{cases},$$

wobei aber zu bemerken ist, dass hier ungewohnterweise die x_2-Achse mit der Vertikalen zusammenfällt. Wir halten jedoch wegen den Beziehungen zur folgenden Fläche an dieser Bezeichnung fest.

Aus den Gleichungen ist unmittelbar ersichtlich, dass die Fläche periodisch ist in der Richtung der x_1-Achse; sie besteht aus lauter kongruenten Flächenschalen.

Die Kurven $\varphi = \text{const.}$ sind offenbar Parabeln, die Kurven $v = \text{const.}$ ihre orthogonalen Trajektorien. Das Netz dieser Kurven ist ein isothermes, jedoch sind die Kurven keine Krümmungslinien. Die Scheitel aller Parabeln liegen auf der Kurve $v = 0$, also in der Ebene $x_3 = 0$. Die Gleichungen dieser Kurve sind

$$\begin{cases} x_1 = a\sin 2\varphi - 2a\varphi \\ x_2 = -a\cos 2\varphi \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

und es ist somit eine gemeine Cykloide. Die Achsen aller Parabeln liegen in ihrer Ebene, und es ist für die Konstruktion des Modells bemerkenswert, dass diese Achsen in die Geraden fallen, welche den Mittelpunkt des rollenden Kreises mit dem betreffenden Punkte der Cykloide verbinden. Für $\varphi = n\cdot\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) arten die Parabeln offenbar in Gerade aus.

Die angeheftete Flächenschale scheint der konjugierten Fläche anzugehören.

Durch geometrische Addition der Catalanschen Fläche und der gewöhnlichen Schraubenfläche ergibt sich wieder eine Minimalfläche, welche eine Schar Parabeln enthält.

Sie wurde zuerst von Enneper bestimmt. Die geometr. Addition vollzieht sich so, dass die Parabeln der Catalanschen Fläche den Erzeugenden der Schraubenfläche entsprechen. Somit werden die Gleichungen der Fläche:

$$\begin{cases} x_1 = a \sin 2\varphi + \frac{a^2}{2} v^2 \sin 2\varphi - 2a\varphi + \frac{b}{2} \cdot v \sin\varphi \\ x_2 = -a \cos 2\varphi - \frac{a^2}{2} v^2 \cos 2\varphi - \frac{b}{2} \cdot v \cos\varphi \\ x_3 = 2a v \cdot \sin\varphi + b\varphi \end{cases}$$

Die Kurven $\varphi = \text{const.}$ sind selbstredend wieder Parabeln, und zwar sind ihre Achsen wieder parallel zur Ebene $x_3 = 0$, welche nunmehr wieder horizontal steht. So wie die Modelle stehen müsste also die Catalansche Fläche zuerst umgelegt werden, dann erst könnte die Addition mit der Schraubenfläche vollzogen werden. Die Ebenen der Parabeln bilden mit der Ebene $x_3 = 0$ gleiche Winkel, und zwar ist dieser Winkel beim Modell der Sammlung $= 45°$. Für $\varphi = n\pi$ arten die Parabeln wie zu erwarten ist wieder in Gerade aus. Die zweite Schar von Kurven, die am Modell zu sehen ist, ist die Schar der orthogonalen Trajektorien der Parabeln. Sie bilden, wie auch die Anschauung sagt, ein isothermes Netz, wir wissen aber bereits, dass es keine Krümmungslinien sind.

Die Fläche besteht, wie schon ihre Erzeugungsweise sagt, wieder aus kongruenten Flächenschalen, nur bildet hier die Richtung der Periodizität mit den Koordinatenachsen schiefe Winkel. Bei der konformen Abbildung auf die Ebene wird jede einzelne Flächenschale nur auf die Halbebene abgebildet, so dass erst beide Schalen, aus denen das Modell besteht, zusammen als, um so zu sagen, Elementareinheit aufzufassen sind.

Das wären die wichtigsten Eigenschaften dieser Fläche.

Noch eine Fläche wollen wir kurz besprechen, und zwar die

<u>Minimalfläche mit Lemniskaten als geod. Linien.</u>

Ihre Gleichungen sind

$$x_1 = \mathfrak{R}\left\{\sqrt{2} \cdot \cos\frac{t}{3} \cdot \sqrt{\cos\frac{2t}{3}}\right\}$$

$$x_2 = \mathfrak{R}\left\{-\sqrt{2} \cdot \sin\frac{t}{3} \cdot \sqrt{\cos\frac{2t}{3}}\right\}$$

$$x_3 = \mathfrak{R}\left\{-\frac{i\sqrt{2}}{3} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{\cos\frac{2t}{3}}}\right\};$$

sie lassen sich sofort auf elliptische Funktionen zurückführen. Die vorgeschriebene Lemniskate liegt in der Ebene $x_3 = 0$. Das Modell veranschaulicht aber nur die halbe Fläche: symmetrisch hat man sich noch einen kongruenten Flächenmantel vorzustellen.

der den gegebenen in der Ebene $x_1 = 0$ durchdringt und mit ihm die x_3-Achse gemeinsam hat, die also Doppelgerade der Fläche ist. Damit wäre auch die Lemniskate vollständig.

Die Fläche ist periodisch in der Richtung x_3; die Periode beträgt

$$\omega = 2 \cdot \int_0^1 \frac{d\vartheta}{\sqrt{(1-\vartheta^2)(1-\frac{1}{2}\vartheta^2)}} = 2 \cdot 1{,}8540747 \ldots .$$

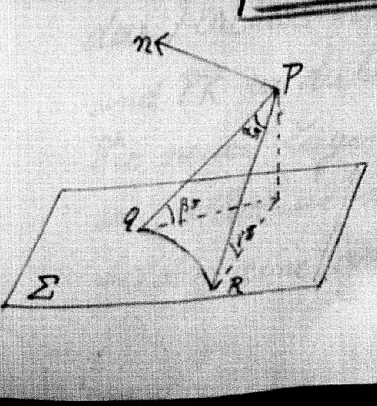
Der dargestellte Flächenteil erstreckt sich von $x_3 = -\frac{\omega}{2}$ bis $x_3 = +\frac{\omega}{2}$. Die Ebenen $x_3 = \pm n \cdot \frac{\omega}{2}$ sind offenbar Symmetrieebenen der Fläche, ebenso wie die Ebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$.

Die gelben Kurven sind Krümmungslinien, die blauen Asymptotenkurven; grün sind die Meridiane und die Parallelkurven gezeichnet, worunter nach der allgemeinen Mindingschen Definition jene Kurven auf der Fläche zu verstehen sind, längs welchen die Flächennormalen einer vertikalen Ebene parallel sind, bzw. mit der Vertikalen konstante Winkel einschliessen. Rot sind jene Meridiane und Parallelkurven gezeichnet, die gleichzeitig Krümmungs oder Asymptotenlinien sind.

Die Schar der associerten, und insbesondre die konjugierte Fläche sind mit der ursprünglichen Fläche kongruent. Bei der Abwickelung dieser Fläche auf sich selbst bleibt die mit L bezeichnete Kurve unbewegt. Sollen insbesondre die Asymptotenlinien in Krümmungslinien übergehen und umgekehrt, so ist nur eine Umklappung um L nötig. Die Linie L schneidet, wie man sieht, die Asymptoten und Krümmungslinien unter konstanten Winkel, und zwar unter $67\frac{1}{2}^\circ$ bzw. unter $22\frac{1}{2}^\circ$.

III.

Fläche von Neovius



Die Neovius'sche Fläche wird durch eine spezielle Schwarz'sche Kette bestimmt, bestehend aus den sich schneidenden Geraden PQ und PR und der Ebene Σ. Der Winkel den die

die beiden Geraden miteinander bilden, möge mit $\alpha\pi$ bezeichnet werden, die Winkel der Geraden mit der Ebene bzw. $\beta\pi$ und $\gamma\pi$. Die in P auf beide Geraden errichtete Normale bezeichnen wir mit $\underline{n}$.

Wir wollen uns auch hier nicht länger bei den analytischen Ausführungen aufhalten. Das Problem besteht bekanntlich in der konformen Abbildung eines Kreisbogendreiecks auf die Halbebene, und ist mit Hilfe der hypergeometrischen Reihe ohne Schwierigkeiten durchführbar. Uns interessiert vielmehr folgendes Problem: das Flächenstück PQR – wir wollen es mit $\underline{f}$ bezeichnen – ist offenbar nur ein Teil einer zusammenhängenden Minimalfläche; wir wollen die Gestalt dieser ganzen Fläche zu ermitteln suchen.

Zunächst stossen wir dabei auf eine überaus überraschende Tatsache: *im **Allgemeinem** setzt sich das Flächenstück f durch Spiegelungen und Umklappungen an Symmetrieebenen oder Geraden unendlich oft fort, so zwar, dass in einem endlichen Raumteil unendlich viele kongruente Wiederholungen zu liegen kommen,* die nicht zusammen fallen.

In der Tat: Die Behauptung wird fast evident falls der Winkel $\alpha\pi$ in einem irrationalen Verhältnis zu π steht. Denn aus den bekannten Symmetrieeigenschaften der Fläche folgt, dass sie durch eine Drehung um $2\alpha\pi$ um die Gerade $\underline{n}$ in sich übergeführt wird.

Aber selbst wenn alle Grössen α, β und γ rational sind gibt es nur eine recht beschränkte Anzahl von Anordnungen bei denen es im Endlichen nur eine Endliche Anzahl von Wiederholungen des Flächenstücks gibt. Man braucht, um dies einzusehen, das Flächenstück nur um 180° um die Symmetriegeraden PQ und PR zu drehen, wobei die Fläche in sich übergeführt wird. Die neuen Lagen der Ebene Σ sind wieder Symmetrieebenen; wir wollen sie mit Σ_1 und Σ_2 bezeichnen. Diese drei Ebenen bilden eine dreiseitige räumliche Ecke, und es soll nun die

Anzahl der durch Spiegelungen an den Symmetrieebenen entstehenden kongruenten Wiederholungen dieser Ecke eine endliche sein. Das trifft aber, wie Steiner gezeigt hat, dann und nur dann zu, wenn die Ebenen Symmetrieebenen eines regulären Polyeders sind.

Aber noch mehr! Wir wollen zeigen, dass von diesen fünf Polyedern noch zwei, nämlich das Ikosaeder und das Dodekaeder ausgeschlossen sind. Zu dem Zweck bemerken wir zunächst, dass die Fläche periodisch ist, d.h. Translationen zulässt, welche sie in sich überführen. Durch Spiegelung an der Ebene Σ erhalten wir nämlich ein räumliches Vierseit, welches wir um eine Seite um 180° umklappen; das neue Vierseit klappen wir um die gegenüber liegende Seite wieder um, und fahren so fort, bis das neue Vierseit dem ursprünglichen ~~nicht~~ parallel wird, was ja wegen der Rationalität der Grössen α, β und γ eintreten muss. So erhalten wir sogar zwei erlaubte Translationen, indem wir nämlich dasselbe Verfahren auf die Seiten PQ und PR anwenden. Ferner ergibt die Zusammensetzung von einer erlaubten Translation mit einer Drehung um $\underline{\pi}$ um einen Winkel $2k\cdot\alpha\pi$ $(k=1,2,..)$ wieder eine erlaubte Translation.

Wir zeigen nun, dass ~~der Wert~~ die Grösse $\underline{\alpha}$ die Zahl $\underline{5}$ nicht im Nenner enthalten kann. Denn angenommen es sei $\alpha = \frac{1}{5}$, so wären die fünf Translationen die sich aus einer gegebenen durch Drehungen um $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}$ bzw $\frac{8\pi}{5}$ ergeben, durch die Seiten einer regulären fünfseitigen Pyramide dargestellt. Nun sind Summe und Differenz erlaubter Translationen wieder erlaubte Translationen, und die Seiten und Diagonalen der Basis stellen somit wieder erlaubte Translationen dar. Es ist aber immer eine der Diagonalen mit einer Seite parallel, während ihr Verhältnis ein irrationales ist. Es würden sich also durch wiederholte Zusammensetzung dieser Translationen, Translationen beliebiger Kleinheit ergeben. Das steht aber in Widerspruch mit unserem Postulat.

Dieselbe Schlussweise können wir auf β und γ anwenden, da doch beim vollständigen Vierseit keine Ecke bevorzugt ist. Keine der Grössen α, β und γ kann somit die Zahl $\underline{5}$ im Nenner enthalten, und es sind somit das Ikosaeder und das Dodekaeder von unseren Betrachtungen ausgeschlossen.

Alle übrigen Möglichkeiten ergeben Anordnungen, welche allein am Würfel dargestellt werden durch seine Symmetrieebenen und den Kanten oder Diagonalen der Seitenflächen. Numerisch sind das die folgenden fünf Möglichkeiten:

$\underline{I}$.	$\pi\alpha = 90°$	$\pi\beta = 45°$	$\pi\gamma = 30°$
$\underline{II}$.	$\pi\alpha = 90°$	$\pi\beta = 30°$	$\pi\gamma = 30°$
$\underline{III}$.	$\pi\alpha = 60°$	$\pi\beta = 45°$	$\pi\gamma = 45°$
$\underline{IV}$.	$\pi\alpha = 60°$	$\pi\beta = 30°$	$\pi\gamma = 30°$
$\underline{V}$.	$\pi\alpha = 45°$	$\pi\beta = 45°$	$\pi\gamma = 30°$

Es ergibt sich dass die Fälle $\underline{I}$ und $\underline{IV}$ die Schwarzsche Fläche ergeben, desgleichen die Fälle $\underline{II}$ und $\underline{III}$ ihre Konjugierte. Der Fall $\underline{V}$ gibt unsre Neovius'sche Fläche. Diese fünf Anordnungen sind demnach die einzigen möglichen, und es gibt im ganzen drei Flächen die unsrer Umrandung angepasst werden können, und bei denen im Endlichen auch nur ein endliches Flächenstück liegt.

Eine Beschreibung der Fläche durch Worte scheint unmöglich: man möge die Lichtbilder in der anfangs zitierten Arbeit vergleichen, woselbst sich auch das Bild der Konjugierten Fläche befindet.

Der tiefere Grund dieses merkwürdigen Sachverhalts scheint mir darin zu liegen, dass die Asymptotenlinien normalerweise senkrecht zueinander stehen müssen; nun ist bei der Schwarzschen Umrandung der Winkel der Geraden, die ja Asymptotenlinien sein müssen, beliebig vorgegeben. Die Fläche muss sich daher die Orthogonalität mit Gewalt erkämpfen, und wenn auch der Weg zu Ziel unendlich lang wird.