Stereoscopische Photographien

des Modelles

einer Fläche dritter Ordnung

mit 27 reellen Geraden.

Mit erläuterndem Texte.

Von

Dr. Christian Wiener,
Professor am Polytechnikum zu Carlsruhe.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1869.

Als ich im September 1867 die Naturforscherversammlung in Frankfurt a/M. besuchte, stellten auf Anregung des Herrn Prof. Dr. Clebsch die Mitglieder der mathematischen Section das Ersuchen an mich, ich möchte von den 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung ein Modell anfertigen. Hierdurch veranlasst und in der Erwägung, dass das Interesse der Mathematiker gegenwärtig in hohem Grade auf diese Fläche gerichtet ist, dass sie insbesondere auch den Stoff zu einer vor nicht langer Zeit gestellten Preisaufgabe der Berliner Akademie der Wissenschaften bildete, habe ich gerne die fragliche Arbeit übernommen. Im Winter 1867/68 construirte ich die 27 Geraden und dann auch die Kegelschnitte, welche durch eine jener Geraden auf der Fläche gelegt, als Erzeugende derselben betrachtet werden können. Es war dabei die grösstmöglichste Genauigkeit der Zeichnung nothwendig, da jede Gerade 10 andere schneiden und da 16 Durchschnittspunkte von Geraden mit der Ebene eines jener Kegelschnitte auf einer solchen Kurve liegen mussten, — Forderungen, deren Gewicht Jeder, der sich mit geometrischen Constructionen abgegeben hat, zu würdigen wissen wird. Nachdem die erforderliche Genauigkeit erreicht war, fertigte ich zwei Modelle der Fläche durch Zusammenfügen von Cartonplatten, welche nach jenen Kegelschnitten und der in ihrer Ebene enthaltenen Geraden ausgeschnitten waren, wobei die Theile des Cartons, welche bei dem einen Modelle weggenommen wurden und die leeren Räume übrig liessen, die vollen Räume des anderen Modelles bildeten. Begrenzt wurde das Modell durch die Flächen eines Würfels von 0,46 Meter Seite, und die Geraden wurden durch gespannte Seidefäden von dreierlei Farbe, je nachdem die Geraden nach Schläfli's Weise mit a, b oder c bezeichnet waren, dargestellt. Da aber verschiedene Anfragen nach einem solchen Modelle an mich gerichtet wurden, so liess ich dasselbe in Gyps formen, worauf die Geraden eingeritzt und mit Farben bezeichnet, die als Erzeugende zu betrachtenden Kegelschnitte nur eingeritzt wurden*). Von diesem Modelle liess ich zwei stereoskopische Photographien anfertigen, welche ich der mathematischen Lesewelt in der Erwartung, dass sie für dieselbe von einigem Interesse sein dürften, nebst der Darstellung der Construction des Modelles in Folgendem vorlege.

Construction des Modelles.

1. Bestimmende Eigenschaften der 27 Geraden. Die Construction der 27 Geraden stützt sich auf die Eigenschaften der von Schläfli eingeführten „Doppelsechs". Bezeichnet man mit ihm die 27 Geraden durch

*) Derartige Gypsabgüsse des Modelles auf einer polirten Grundplatte, deren Preis 50 fl. beträgt, bin ich bereit zu übermitteln.

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, & b_6, \end{array}$$
$$\begin{array}{ccccc} c_{12}, & c_{13}, & c_{14}, & c_{15}, & c_{16}, \\ c_{23}, & c_{24}, & c_{25}, & c_{26}, & c_{34}, \\ c_{35}, & c_{36}, & c_{45}, & c_{46}, & c_{56}, \end{array}$$

so bilden die 6 a und die 6 b zusammen eine Doppelsechs, wenn man sie so auswählt, dass die a sich untereinander nicht schneiden und ebenso nicht die b, dass dagegen jede a jede b trifft ausser derjenigen mit gleicher Kennziffer und umgekehrt, so also, dass z. B. b_3 die a_1, a_2, a_4, a_5, a_6 und keine andere Gerade der Doppelsechs trifft. Jede c schneidet dagegen diejenigen a und b, welche die bei c stehenden Kennziffern besitzen; z. B. trifft c_{23} ($= c_{32}$) die a_2, a_3, b_2, b_3; und da a_2, b_3, sowie a_3, b_2 sich schneiden, so ist c_{23} der Durchschnitt der Ebenen $a_2\ b_3$ und $a_3\ b_2$.

2. Die Construction der 27 Geraden wurde dann nach G. Salmon (Analytic Geometry of three dimensions. 1862. p. 390.) ausgeführt. Nimmt man eine Gerade der Doppelsechs, im Modelle a_1, willkürlich an, und b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 derart, dass sie a_1 schneiden, so ist die Fläche 3. Ordnung bestimmt, welche diese 6 Geraden enthalten soll. Dann legt man eine solche Fläche durch 4 Punkte der a_1 und durch je 3 Punkte der fünf b, so ist sie durch diese 19 Punkte ganz bestimmt und enthält von jeder der Geraden 4 Punkte, also die Geraden ganz. Jede andere a construire man als diejenige Gerade, welche 4 der gegebenen b schneidet. 4 sich nicht schneidende Geraden werden bekanntlich von 2 Geraden getroffen, deren Construction nachher angegeben werden soll. Von den beiden Geraden, welche jenen vier b begegnen, ist a_1 schon gegeben, so dass jede andere a sich eindeutig ergibt. So findet man z. B. a_2 als die Gerade, welche neben a_1 die b_3, b_4, b_5, b_6 schneidet. Darauf construire man b_1 als die Gerade, welche vier und dann auch die fünfte der Geraden a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 trifft. Aus der Doppelsechs erhält man dann die c in der vorhin angegebenen Weise, z. B. c_{23} als Durchschnitt der Ebenen $a_2\ b_3$ und $a_3\ b_2$.

3. Die Aufgabe „eine Gerade zu legen, welche vier sich nicht schneidende Geraden a, b, c, d **trifft"** ist unter Andern von Steiner (systematische Entwicklung S. 243) gelöst worden. Ich will hier eine Lösung angeben, an welche sich diejenige Lösung der folgenden Aufgabe, die ich bei der Construction der 27 Geraden anwandte, als besonderer Fall anschliesst.

Man denke sich durch 3 der gegebenen 4 Geraden, etwa durch a, b, c ein einfaches Hyperboloid gelegt, schneide dasselbe durch die 4. Gerade d in den Punkten M und N, so sind die beiden Erzeugenden m und n des Hyperboloids, welche durch M und N gehen, Geraden, welche die 3 Leitgeraden a, b, c des Hyperboloids und die 4. Gerade d schneiden, oder es sind die beiden Auflösungen der Aufgabe. Zur Ausführung in der Zeichnung lege durch die Gerade d eine Hilfsebene, welche das Hyperboloid in einem Kegelschnitte treffen wird. Von demselben können zuerst die 3 Punkte angegeben werden, in welchen die Hilfsebenen die Leitgeraden a, b, c des Hyperboloids schneidet, und zwei weitere ergeben sich als Durchschnitte mit zwei Erzeugenden des Hyperboloids, also zweien Geraden, welche a, b, c treffen. Die beiden Durchschnittspunkte der Geraden *d* und des mit *d* in derselben Hilfsebene befindlichen, jetzt durch 5 Punkte gegebenen Kegelschnitts, welche in bekannter Weise construirt werden, sind die Punkte *M* und *N*. Bei der Construction der 27 Geraden tritt der besondere Fall der eben gelösten Aufgabe ein, dass eine der beiden Geraden *m* und *n*, welche die 4 Geraden *a*, *b*, *c*, *d* treffen, schon gegeben ist. Sei dies *m*, so ergeben sich in der durch *d* gelegten Hilfsebene sogleich als 4 Punkte ihres Durchschnittes mit dem Hyperboloide *a*, *b*, *c* die Schnittpunkte der Hilfsebene mit *a*, *b*, *c*, *m*; einen 5. Punkt sucht man wie vorher durch eine neue Erzeugende. Da nun *d* die *m* schneidet, oder durch *M* geht, so ist nur die Aufgabe zu lösen, den zweiten Durchnittspunkt *N* eines durch 5 Punkte gegebenen Kegelschnittes mit einer durch einen dieser Punkte, *M*, gehenden Geraden *d* zu finden, was leicht vermittelst des Pascal'schen Sechsecks ausgeführt werden kann.

4. Construction der Erzeugenden der Fläche. Als Erzeugende wählte ich, wie schon erwähnt, Kegelschnitte. Da nämlich jede Ebene die Fläche dritter Ordnung in Linien dritter Ordnung schneidet, so zerfällt letztere, wenn die Ebene durch eine Gerade der Fläche geht, in diese Gerade und einen Kegelschnitt. Ich legte daher durch eine der 27 Geraden (a_1) Ebenen und betrachtete die in denselben befindlichen Kegelschnitte der

Fläche als Erzeugende derselben. Die 26 nicht in einer solchen Ebene befindlichen Geraden schneiden dieselbe in 26 Punkten, wovon 10 auf der in der Ebene befindlichen Geraden a_1 liegen, da jede Gerade von 10 anderen getroffen wird. Die übrigen 16 Punkte gehören aber dem erzeugenden Kegelschnitte an, welcher durch dieselben überschüssig bestimmt ist. Bei der Ausführung der Zeichnung wurden unter diesen 16 Punkten die 5 zur Construction dienenden immer möglichst weit auseinander liegend und unter denen gewählt, welche sich nicht durch einen schiefen Schnitt und deswegen weniger sicher ergeben hatten. Ich legte 16 solche Erzeugende in gleichen Winkelabständen ihrer Ebenen.

6. Die Begrenzung des Modelles stellte ich durch die Flächen eines Würfels her, den ich so wählte, dass alle 27 Geraden durch denselben durchgehen und dass man den Verlauf der Fläche ausserhalb desselben gegen das Unendliche deutlich erkennen kann. Die Durchschnitte der Würfelflächen mit der Fläche 3. Ordnung sind Kurven 3. Ordnung, welche durch die Durchschnittspunkte der 27 Geraden und der 16 erzeugenden Kegelschnitte mit den Wüfelflächen gezogen werden konnten.

Ausser den 27 Geraden, den 16 Erzeugenden und den Schnittlinien der Fläche mit den Würfelflächen sind noch die Kurven 3. Ordnung eingezeichnet, in welchen die Fläche von dreien mit der Grundfläche des Würfels parallelen und in gleichen Abständen gelegten Zwischenebenen geschnitten wird.