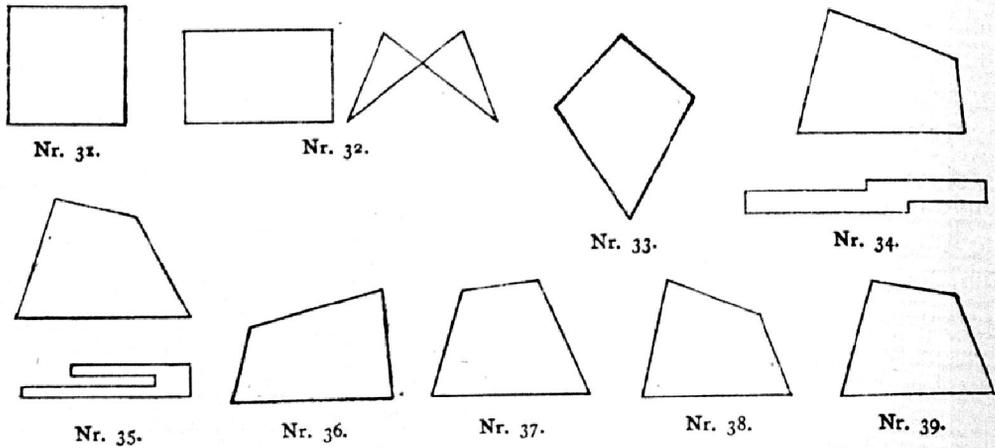


## Gelenksysteme.

### X. Reihe: Gelenkvierecke.

Gesamtpreis bei gleichzeitigem Bezug aller 10 Modelle  $\mathcal{M}$  60,—.



Schema der Gelenkvierecke (Maßstab der Stablängen 1 : 25).

Einzelpreise: Modell Nr. 31  $\mathcal{M}$  6,—; Nr. 32—39 jedes Modell  $\mathcal{M}$  5,50. Der Halter mit Klammern, Führungsstift und Kurvenzeichner  $\mathcal{M}$  12,—. Nr. 40  $\mathcal{M}$  7,—.

Die Modelle 31—39 sind aus Birnbaumholz gefertigt. Nr. 40 aus Metallstäben mit eingespannten Fäden.

Eine zugehörige Abhandlung wird nach ihrem Erscheinen den Abnehmern der Modelle frei zugestellt.

#### A. Die Gelenkvierecke.

I.  $D = 0, D' = 0, D'' = 0$ . Gelenkviereck mit gleichzeitigem Durchschlag aller vier Gelenke auf drei Weisen (vgl. unten).

31. **Rhombus.** Die eine Weise geknickt in allen vier Gelenken (alle vier Stäbe lassen sich aufeinanderklappen), die beiden anderen Weisen gemischt.

II.  $D = 0, D' = 0, D'' \neq 0$ . Gelenkvierecke mit gleichzeitigem Durchschlag aller vier Gelenke auf zwei Weisen.

32. **Parallelogramm und Zwilling.** Beide Weisen gemischt.

33. **Gleichschenkliges Viereck.** Die eine Weise geknickt in allen vier Gelenken, die andere gemischt.

III.  $D = 0, D' \neq 0, D'' \neq 0$ . Gelenkvierecke mit gleichzeitigem Durchschlag aller vier Gelenke auf nur eine Weise.

34. **Kreistangentenviereck** mit gemischtem gleichzeitigem Durchschlag.  
35. **Kreistangentenviereck** mit gleichzeitigem geknicktem Durchschlag.

IV.  $D < 0$ .

- 36 u. 37. **REULEAUX Fall.** Die an der kürzesten Seite anliegenden Gelenke bilden Kurbeln, die beiden anderen Schwingen.

V.  $D > 0$ .

- 38 u. 39. **GRASHOFS Fall.** Alle vier Gelenke sind Schwingen, die an der längsten Seite anliegenden haben einen geknickten, die beiden anderen einen gestreckten Durchschlag.

In Nr. 36 und 38 liegen die längste und eine mittlere Seite einander gegenüber und sind als Steg zu benutzen, in Nr. 37 und 39 die längste und die kürzeste Seite.

**HALTER UND KURVENZEICHNER.** Zur Verdeutlichung der verschiedenartigen Vorgänge an „Kurbeln“ und „Schwingen“, bei „gestrecktem“ und „geknicktem Durchschlag“ (s. u.), sowie des gleichzeitigen Durchschlagens aller vier Gelenke wird ein Stab des Gelenkvierecks als „Steg“ festgehalten, und mit dem gegenüberliegenden, der „Koppel“, werden die möglichen Bewegungen ausgeführt. Dazu dient der am Tisch oder an der Wandtafel festzuschraubende Halter, der an einem Querbalken zwei Federn trägt, in die jedes der neun Gelenkvierecke eingespannt werden kann. Damit die Bewegung ungehindert vor sich gehen kann, müssen die drei übrigen Glieder des Gelenkvierecks vor dem eingespannten Gelenk liegen; dies ist bei jedem auf zwei Arten möglich. Der Kurvenzeichner dient dazu, Koppelkurven mit Kreide auf die Wandtafel zu zeichnen. Die Kreide steckt in einer Hülse, die an dem Gelenk zweier gelenkig verbundener Stäbe befestigt ist, während diese an die Endpunkte der Koppel eines jeden der neun Modelle angeschraubt werden können.

## B. Anhang.

40. **Gelenkrhombus,** parallel den Seiten mit roten und gelben Fäden bespannt. Dieses Modell gehört in den Unterricht der Darstellenden Geometrie und dient zur Darstellung der Ebene im Grund- und Aufrißverfahren. Zwei Seiten des Rhombus werden in die beiden miteinander senkrecht verbundenen Tafeln hineingelegt, dann zeigen die Fäden die Hauptlinien (Spurparallelen, Tafelparallelen) erster und zweiter Art, und zwar in den beiden Fällen, wo man im Grund- und Aufriß auf dieselbe oder auf verschiedene Seiten der Ebene sieht. Unter Festhalten der einen Spur kann die Ebene stetig aus der Lage des ersten Falles in die des zweiten übergeführt werden.

## Zur Theorie der Gelenkvierecke.

Das Gelenkviereck, das eines der einfachsten zwangsläufigen Gelenksysteme ist, wird von REULEAUX als „das wichtigste Getriebe“ bezeichnet. Über seine Wirkungsweisen lassen sich einige bemerkenswerte aber auf ganz elementaren Überlegungen beruhende Sätze aufstellen, die zur Unterscheidung der in der obigen Übersicht angegebenen Fälle führen. Wenn die beiden in einem Gelenk zusammenstoßenden Stäbe (Glieder) in eine Gerade fallen, so sei dies als ein Durchschlag dieses Gelenkes bezeichnet, und zwar als gestreckter oder geknickter Durchschlag, je nachdem die beiden Stäbe einen gestreckten Winkel oder den Winkel null miteinander bilden. Kommen nun an einem Gelenk des Gelenkvierecks beiderlei Durchschläge vor, so nennt man das Gelenk eine Kurbel, im anderen Fall eine

Schwinge. Dem von REULEAUX allein betrachteten Fall, daß ein Gelenkviereck an zwei Nachbargliedern eine Kurbel, an den beiden anderen eine Schwinge besitzt (Nr. 36 u. 37), stellt GRASHOF einen zweiten Fall gegenüber, bei dem alle vier Gelenke Schwingen bilden (Nr. 38 u. 39). Der erste Fall tritt nach GRASHOF ein, wenn die Summe der Längen des längsten und kürzesten Gliedes kleiner, der zweite Fall, wenn sie größer ist als die Summe der beiden mittleren Gliedlängen. GRASHOF hat einen für den REULEAUXschen Fall geltenden Satz aufgestellt, der ergänzt und auf den GRASHOFschen Fall erweitert hier so ausgesprochen werden soll, daß er eine Übersicht über alle möglichen Lagen von beiderlei Gelenkvierecken gewährt:

1. Im REULEAUXschen Fall sind die beiden Gelenke, die dem kürzesten Glied anliegen, Kurbeln, die beiden anderen Schwingen ohne Durchschlag.
2. Im GRASHOFschen Fall sind die beiden Gelenke, die dem längsten Glied anliegen, Schwingen mit geknicktem Durchschlag, die beiden anderen Schwingen mit gestrecktem Durchschlag.

Außerdem unterscheiden sich die Fälle dadurch, daß im ersten zu jeder einmal erreichten Lage des Gelenkvierecks auch die symmetrische Lage vorkommt, im zweiten Fall aber nicht.

Die erwähnten Sätze enthalten weder etwas über die Reihenfolge, in der die Glieder ihrer Größe nach geordnet sind, noch auch etwas darüber, welches von den Gliedern festgehalten werden soll, welche Glieder an dieses anschließen, und welches ihm gegenüberliegt, während für die Maschinenlehre eine solche Festsetzung wichtig ist und in der Benennung dieser Glieder als „Steg“, „Arme“ und „Koppel“ ihren Ausdruck findet.

Die Unterscheidung der beiden Fälle weist auf den Sonderfall hin, in dem die Summe zweier Gliedlängen gleich der Summe der beiden andern ist. Das Viereck erhält dann einen gleichzeitigen Durchschlag aller vier Gelenke<sup>1)</sup>, und man hat dabei zwei Unterfälle zu unterscheiden, weil der gleichzeitige Durchschlag aller vier Gelenke entweder an allen vieren geknickt oder bei zweien (und zwar gegenüberliegenden) geknickt, bei den anderen gestreckt sein kann (gemischter gleichzeitiger Durchschlag). Die hierbei entstehenden Vierecke, mit deren gelenkiger Veränderung sich schon J. STEINER beschäftigt hat (Gesammelte Werke, 2. Bd., S. 383), sind Kreistangentenvierecke. STEINER unterscheidet drei Fälle, von denen aber zwei in allen ihren Lagen und Übergängen übereinstimmen, also nicht zu unterscheiden sind, und außerdem fehlt bei ihm ein allgemein geltendes Verfahren für die Bestimmung des Mittelpunktes des den vier Seiten eingeschriebenen Kreises. Ein solches liefert der Satz: Je nachdem ein Gelenk in der Lage des gleichzeitigen Durchschlags einen geknickten oder gestreckten Durchschlag hat, halbiere man in beliebiger Lage den Winkel zwischen den Gliedern des Gelenkes oder den Nebenwinkel, um eine durch den gesuchten Kreismittelpunkt gehende Gerade zu erhalten.

1) BURMESTER nennt dieses Vorkommnis einen Durchschlag, da er das Wort auf das ganze Gelenkviereck, nicht auf ein einzelnes Gelenk bezieht.

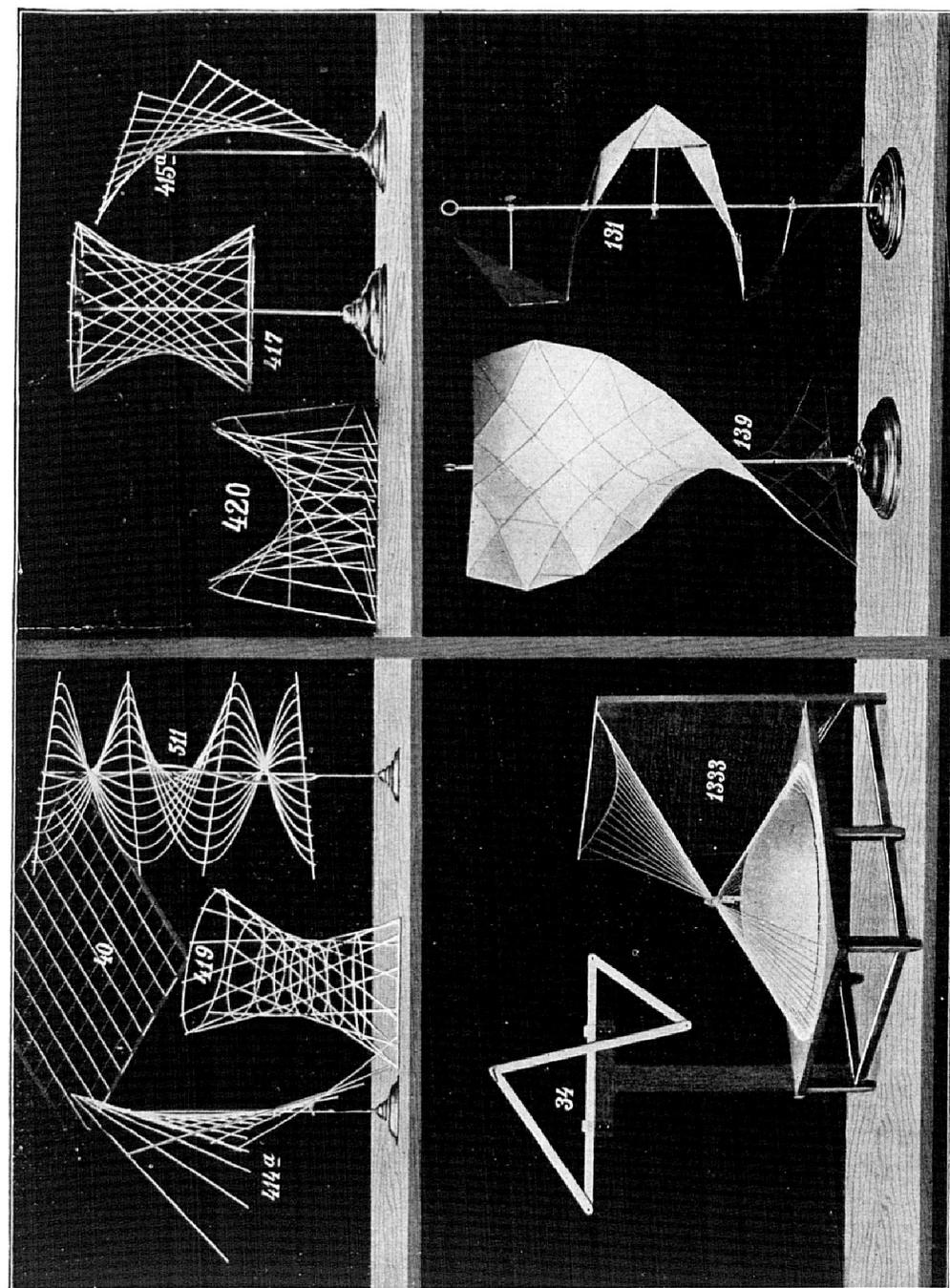
Weitere Sonderfälle treten auf, wenn zweimal oder dreimal die Summe zweier Gliedlängen gleich der Summe der beiden andern ist, wenn also auf zwei oder drei Weisen alle vier Gelenke gleichzeitig durchschlagen. Dann werden zwei Paare Seiten bzw. alle vier Seiten einander gleich.

Sind zweimal zwei Nachbarseiten einander gleich<sup>1)</sup>, so erhält man das gleichschenklige Viereck (Nr. 33), sind es zweimal zwei Gegenseiten, das Parallelogramm, das auch zum Zwillings, d. h. zu einem überschlagenen Viereck durchgeschlagen werden kann (Nr. 32). Für das letztere und für das gleichschenklige Viereck sieht man ohne weiteres ein, daß ihm (entsprechend dem gleichzeitigen Durchschlag auf zwei Weisen) zwei Kreise eingeschrieben werden können, deren Mittelpunkte man nach der angegebenen Regel findet. Wendet man die Regel auch auf das Parallelogramm an, so findet man, daß die berührenden Kreise der Viereckseiten in ein und dasselbe Punktepaar zerfallen, das auf der unendlich fernen Geraden durch die beiden Paare paralleler Seiten ausgeschnitten wird, während die Mittelpunkte beider Kreise verschiedene unendlich ferne Punkte sind, die nämlich auf den Winkelhalbierenden der spitzen oder stumpfen Winkel des Parallelogramms liegen.

Bei gleicher Länge aller Seiten (Rhombus Nr. 31) gibt es drei Weisen des gleichzeitigen Durchschlags aller vier Gelenke, die eine mit vier geknickten Durchschlägen, zwei andere mit gemischten Durchschlägen; eine besondere Anordnung des Modells 31 gestattet es, alle drei Weisen zu verwirklichen. Von den drei Kreisen, die diesen Weisen entsprechen, verläuft der eine im Innern des Rhombus, die beiden anderen zerfallen wie vorhin in ein unendlich fernes Punktepaar.

Wenn man nach DARBOUX, der schon vor REULEAUX und GRASHOF die Theorie des Gelenkvierecks in einer umfassenden Arbeit entwickelt hat, von den aufgezählten Fällen alle diejenigen in eine Klasse zusammenfaßt, die durch Umstecken der Stäbe aus einander hervorgehen, so erhält man im allgemeinen Fall zwei Klassen (die REULEAUXS und GRASHOFS), IV und V der obigen Aufzählung, und für die Sonderfälle die drei Klassen I, II und III. Bezeichnet man mit  $D$  die Summe der größten und kleinsten Gliedlänge weniger der Summe der beiden mittleren Gliedlängen, so kann man aus den vier Gliedlängen noch zwei weitere solche Differenzen  $D'$  und  $D''$  bilden und erhält so die obenangegebenen Kennzeichen für die Fälle I—V. Die Fälle I—III sind daher durch das Verschwinden dreier, zweier oder einer der drei „Invarianten“  $D, D', D''$  des Gelenkvierecks gekennzeichnet, während die Unterscheidung der weiteren Unterfälle der Fälle I—III auf den verschiedenen Arten des gleichzeitigen Durchschlags aller vier Gelenke beruht, also nicht mehr wie die DARBOUXSche Unterscheidung von der Anordnung der Stäbe unabhängig ist.

1) Wird in diesem Fall eine der kürzeren Seiten zum Steg gemacht, so erhält man einen „Tourenverdoppler“, d. h. der kürzere Arm beschreibt einen vollen Winkel, wenn der längere einen gestreckten beschreibt.



Maßstab etwa 1 : 14.