Mathematische Modelle

angefertigt

im mathematischen Institut des k. Polytechnikums in München.

Abtheilung II. Unter Leitung von Prof. Dr. Brill.

IV.

Die geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoid.

Modellirt von stud. math. K. Rohn.

Die geodätischen Linien können durch die Bewegung eines äusseren Einwirkungen entzogenen materiellen Punktes auf der Fläche beschrieben werden. Im vorliegenden Falle, wo es sich um die Bewegung auf einer Rotationsfläche handelt, lassen sich die Lagrange'schen Differentialgleichungen durch das Integral der lebendigen Kraft und das Integral der Flächenräume in Bezug auf die Rotationsaxe ersetzen. Das erste Integral liefert: $\frac{v^2}{2} = h$; wo v die Geschwindigkeit und h die Integrationsconstante ist. Das zweite Integral ergibt die Gleichung: $r^2 \varphi' = \text{Const.}$, wenn r und φ die Polarcoordinaten in der Aequatorialebene sind. Nun treffen wir folgende Bestimmungen für die Anfangslage des Punktes: für $\varphi = 0$ und $r = r_0$ sei $v = v_0$ und zwar parallel der Aequatorialebene gerichtet. Hieraus bestimmt sich unmittelbar:

$$h = \frac{v_0^2}{2}; \quad \text{Const.} = r_0 \cdot v_0;$$

und man erhält:

$$r^2 \varphi' = r_0 v_0;$$

$$v^2 = r'^2 + r^2 \varphi'^2 + z'^2 = v_0^2;$$

wo noch die Gleichung der Fläche: $z - F(r) = 0$ hinzu kommt.

Die Integration ergibt:

$$t = \int \frac{dr\sqrt{1+F'^2}}{v_0\sqrt{1-\frac{r_0^2}{r^2}}};$$

$$\varphi = r_0 \int \frac{dr\sqrt{1+F'^2}}{r\sqrt{r^2-r_0^2}}.$$

Ist die Rotationsfläche ein Ellipsoid, also:

$$F(r) = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-r^2},$$

so sind t und φ gegeben durch die Gleichungen:

$$t = -\frac{1}{v_0}\int \frac{dz\sqrt{a^2-e^2z^2}}{\sqrt{z_0^2-z^2}};$$

$$\varphi = -\frac{a}{b}\sqrt{a^2-z_0^2}\int \frac{dz\,.\sqrt{a^2-e^2z^2}}{(a^2-z^2)\sqrt{z_0^2-z^2}};$$

wobei $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ die numerische Excentricität ist.

Die weitere Behandlung dieser Integrale besteht zunächst in der Zurückführung auf die Normalform und dann in der Einführung der Θ-Funktionen, durch welche φ und z schliesslich dargestellt erscheinen. Den ersten Zweck erreichen wir durch die Substitution:

$$\frac{z}{z_0} = x, \qquad \frac{e^2 z_0^2}{a^2} = k^2,$$

wobei $k^2 < 1$ und positiv, ferner:

$$\frac{1}{e^2} = \frac{1}{\Delta^2 am(\alpha, k')} = \sin^2 am(i\alpha + K, k).$$

Die Gleichung für t ist für unseren Zweck nicht weiter von Interesse, die Gleichung für φ wird:

$$\varphi = -\frac{\sqrt{a^2-z_0^2}}{b}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2.1-k^2x^2}} + i\int \frac{k^2x^2dx\sin am(i\alpha+K)\cos am(i\alpha+K)\Delta am(i\alpha+K)}{[1-k^2\sin^2 am(i\alpha+K)x^2]\sqrt{1-x^2.1-k^2x^2}}$$

Bezeichnet man das Integral erster Gattung mit u, das Integral dritter Gattung in der Jacobi'schen Normalform mit $\Pi(u, \alpha)$, so kommt:

$$\varphi = -\frac{\sqrt{a^2-z_0^2}}{b}\int_K^u du + i\int d\,(\Pi(u, i\alpha+K)).$$

Für $\varphi = 0$ nimmt u den Werth K, also z den Werth z_0 an, d. h. der Winkel φ wird vom höchsten Punkte der geodätischen Linie aus gerechnet.

Ist ferner $\varphi = 0$ für $u = 0$ oder $z = 0$, so ist:

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{\sqrt{a^2-z_0^2}}{b}u + i\,\Pi(u, i\alpha+K),$$

oder:
$$i \lg \sqrt{\frac{\Theta_1(u-i\alpha)}{\Theta_1(u+i\alpha)}} = \varphi - \varphi_0 - i\frac{H'(i\alpha)}{H(i\alpha)}u = \psi,$$

wenn man Θ-Funktionen einführt, welche durch die Gleichungen definirt sind:

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - \ldots\ldots;$$

$$\Theta_1(u) = 1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots\ldots;$$

$$H(u) = 2q^{\frac{1}{4}}\left(\sin\frac{\pi u}{K} - q^2\sin\frac{3\pi u}{K} + \ldots\ldots\right);$$

$$H_1(u) = 2q^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi u}{K} + q^2\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots\ldots\right).$$

Um von der zuletzt abgeleiteten Formel Gebrauch machen zu können, müssen noch die imaginären Argumente durch reelle ersetzt werden. Man erreicht diess dadurch, dass man $\operatorname{tg}\psi$ bildet, wodurch die Gleichung übergeht in:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{i}\frac{\Theta_1(u+i\alpha) - \Theta_1(u-i\alpha)}{\Theta_1(u+i\alpha) + \Theta_1(u-i\alpha)}.$$

Die rechte Seite kann nach Jakobi (Sur la rotation d'un corps solide) durch einen reellen Ausdruck ersetzt werden, so dass:

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{q^{1-l}(1-q^{2l})\sin 2v + q^{4-2l}(1-q^{4l}\sin 4v) + \ldots\ldots}{1 + q^{1-l}(1+q^{2l})\cos 2v + q^{4-2l}(1+q^{4l}\cos 4v) + \ldots\ldots};$$

hierbei ist:
$$l = \frac{\alpha}{K}; \quad v = \frac{\pi u}{2K}.$$

Nun ist aber:
$$\psi + \varphi - \varphi_0 - i\frac{H'(i\alpha)}{H(i\alpha)}u = \varphi - \varphi_0 - \left[\frac{H'\left(\frac{K\alpha}{K'}, q'\right)}{H\left(\frac{K\alpha}{K'}, q'\right)} + \frac{\pi\alpha}{2KK'}\right]u;$$

also:
$$\operatorname{tg}\left(\varphi - \varphi_0 - \left[\frac{H'\left(\frac{K\alpha}{K'}, q'\right)}{H\left(\frac{K\alpha}{K'}, q'\right)} + \frac{\pi\alpha}{2KK'}\right]u\right) = -\frac{q^{1-l}(1-q^{2l})\sin 2v + \ldots}{1 + q^{1-l}(1+q^{2l})\cos 2v + \ldots}.$$

Für $z = z_0$ ist $u = K$ und $\varphi = 0$; es ergiebt sich demnach der Werth von φ_0, wenn man in die letzte Gleichung für u den Werth K einführt. Wir erhalten so als Schlussgleichungen unserer Aufgabe:

$$z = z_0 \cdot \sin am\, u = \frac{z_0}{\sqrt{k}} \cdot \frac{H(u)}{\Theta(u)};$$

und:
$$\operatorname{tg}\left(\varphi + \left[\frac{H'\left(\frac{K\alpha}{K'}, q'\right)}{H\left(\frac{K\alpha}{K'}, q'\right)} + \frac{\pi\alpha}{2KK'}\right](K-u)\right) = -\frac{q^{1-l}(1-q^{2l})\sin 2v + \ldots}{1 + q^{1-l}(1+q^{2l})\cos 2v + \ldots}.$$

Diese Gleichungen stellen z und φ als Funktionen der einen Variabeln u dar.

Numerische Berechnung der Werthe der Coordinaten einer geodätischen Linie.

Die Achsen des Ellipsoids seien: $a = 3$, $b = 2$, also $e^2 = \frac{5}{9}$; ferner sei $z_0 = 2$, dann kommt:

$$k = 0{,}4969; \quad k' = 0{,}8678;$$
$$K = 1{,}684; \quad K' = 2{,}162; \quad q = 0{,}0177;$$
$$\alpha = 0{,}9695;$$
$$z = \frac{a\sqrt{k}}{e} \cdot 2q^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\sin v - q^2 \sin 3v}{1 - 2q\cos 2v};$$

Diese Anzahl Glieder genügt, um z auf 4 Decimalen genau zu erhalten.

u	K	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{18}$	0
φ	2,000	1,990	1,693	1,390	0,991	0,616	0,347	0,000

$$\operatorname{tg}(\varphi + 1{,}2950\,(K - u)) = -\frac{q^{1-l}(1 - q^{2l})\sin 2v}{1 + q^{1-l}(1 + q^{2l})\cos 2v};$$

u	K	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{18}$	0
φ	0	9° 49′	53° 4′	72° 35′	90° 48′	104° 41′	113° 45′	$\varphi_0 = 124°\,57'$

Die Schlussgleichungen sind in solcher Form gegeben, dass die Maxima der geodätischen Linien auf gleichem Meridian $\varphi = 0$ liegen. Die eine Grenzlage derselben bildet der dazu senkrechte Meridian. Lassen wir das Maximum immer tiefer sinken bis es mit $z = 0$ zusammenfällt, so geht die geodätische Linie in den Aequatorialkreis, d. h. in ihre andere Grenzlage über. Welches Stück des Kreises nun als Periode aufzufassen ist, erkennen wir ebenfalls aus den obigen Gleichungen, wenn wir nur zur Grenze übergehen und dann den Werth von 2φ bestimmen.

Es wird: $k = 0$, $k' = 1$, $K = \frac{\pi}{2}$; $K' = \infty$; $q = 0$, . $q' = 1$;

$$\alpha = \int_0^{\frac{\sqrt{1-e^2}}{k'}} \frac{dx}{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} \lg \frac{a + b}{a - b};$$

$-\varphi_0 = \frac{\pi i}{2} \cdot \frac{H'(i\alpha)}{H(i\alpha)} = \frac{\pi}{2} i \cdot \frac{\cos(i\alpha)}{\sin(i\alpha)}$, da sich die Reihen von $H'(i\alpha)$ und $H(i\alpha)$ auf das erste Glied reduciren, indem $q = 0$ ist.

$$-\varphi_0 = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Da der Radius des Aequatorial-Kreises $= b$ ist, so ist dasjenige Stück desselben, das als Periode aufzufassen ist $= a \cdot \pi$. Es ist dies die grösste Bogenlänge des Aequators, die noch die Eigenschaft besitzt, kürzeste Linie zu sein (Jacobi Dynamik, p. 46.)

Druck von H. Brill in Darmstadt.