

Mathematische Modelle

angefertigt

im mathematischen Institut des k. Polytechnikums zu München.

Abtheilung I. Unter Leitung von Prof. Dr. Klein.

VI.

Drei Modelle der Kummer'schen Fläche.

Modellirt von stud. math. K. Rohn.

Bei Untersuchung der Strahlensysteme zweiter Ordnung wurde Kummer bekanntlich zu einer merkwürdigen Fläche vierter Ordnung und vierter Classe geführt, welche 16 Knotenpunkte und 16 singuläre Tangentialebenen besitzt. Es sind specielle Fälle dieser Fläche, welche in Plücker's Untersuchung der Complexe zweiten Grades als Complexflächen bezeichnet sind und von denen Plücker eine grössere Reihe von Modellen anfertigen liess. Es hat dann später Klein eine Serie von vier Modellen erscheinen lassen (Cöln, Eigel-Sohn), welche den allgemeinen Fall der Kummer'schen Fläche mit 16 reellen Knotenpunkten und ausserdem die drei wichtigsten Arten der Complexflächen versinnlichen. Das erste dieser Modelle ist jetzt mit Aufzeichnung der Berührungscurven neu hergestellt worden und ausserdem wurden zwei andere Fälle der Kummer'schen Fläche hinzugefügt, welche bloss 8 resp. 4 reelle Knotenpunkte besitzen. Nimmt man noch ein Modell der Fresnel'schen Wellenfläche hinzu, so hat man alle Gestalten, welche überhaupt bei der allgemeinen Kummer'schen Fläche auftreten.

Die 16 Knotenpunkte der Kummer'schen Fläche liegen zu je 6 auf den Berührungskegelschnitten der 16 Doppelebenen und dualistisch: die Doppelebenen umhüllen zu je 6 die Berührungskegel der 16 Knoten-

punkte. Weiter sei bemerkt, dass die Doppelverhältnisse der 6 auf einem Kegelschnitt liegenden Knotenpunkte für alle 16 Doppelebenen und auch die Doppelverhältnisse von 6 einen Kegel berührenden Doppelebenen für alle 16 Knotenpunkte dieselben sind.

Sind alle 16 Knotenpunkte und folglich auch alle Doppelebenen reell, so erhält man eine aus 8 tetraëderartigen Theilen bestehende Fläche, wie es das erste Modell zeigt.

Lässt man 2 der 6 auf einem Kegelschnitte liegenden Knotenpunkte zusammenrücken, so muss Gleiches auf allen Kegelschnitten geschehen und auch von den 6 Doppelebenen, welche den Berührungskegel eines Knotenpunktes tangiren, müssen 2 zusammenfallen. Man erhält dann die allgemeine Plücker'sche Complexfläche mit reellen Singularitäten; sie besteht nur noch aus 6 Theilen, von welchen zweimal je 2 längs eines Stückes der Doppelgeraden an einander stossen; zwei der 8 Flächentheile der Kummer'schen Fläche sind in isolirte Stücke der Doppelgeraden übergegangen.

Lässt man weiter die zusammengefallenen Knotenpunkte imaginär werden, so erhält man eine Kummer'sche Fläche mit 8 reellen Knotenpunkten und 8 reellen Doppelebenen; in jeder Doppelebene liegen 4 Knotenpunkte, durch jeden Knotenpunkt gehen 4 Doppelebenen. Die Fläche besteht nur noch aus 4 Theilen, sie ist der Gegenstand des zweiten Modells. Die Plücker'sche Complexfläche (mit durchaus reellen Singularitäten) bildet den Uebergang von der zuerst erwähnten Fläche zu dieser.

Fallen von 4 in einer Doppelebene liegenden Punkten wieder zwei zusammen, so erhalten wir eine Complexfläche mit nur 4 reellen Doppelunkten und Doppelebenen. Die Fläche besteht aus 3 Theilen, wovon zwei längs eines Stückes der Doppelgeraden an einander stossen; das andere isolirte Stück der Doppelgeraden ist aus dem einen nun verschwundenen Flächentheil gebildet worden.

Werden jetzt die beiden zusammengefallenen Knotenpunkte wieder imaginär, so besitzt die Fläche nur noch 4 reelle Knotenpunkte und 4 Doppelebenen. Die Knotenpunkte und Doppelebenen lassen sich auf eine einzige Weise in Paare theilen, so dass das Punktpaar auf der Schnittlinie des zugehörigen Paares von Doppelebenen liegt. Die Fläche besteht nur noch aus 2 Theilen und wird durch das dritte Modell dargestellt.

Noch sei eines speciellen Falles der Kummer'schen Fläche gedacht, welcher geeignet ist, ein richtiges Licht auf die dargestellten Flächen zu werfen. Im allgemeinen Falle liegen 12 Knotenpunkte auf einer Fläche zweiten Grades; rückt noch einer der 4 weiteren Knotenpunkte auf diese Fläche, so thun diess auch die 3 anderen und eben diese Fläche bildet doppelt zählend die Kummer'sche Fläche; die Knotenpunkte werden durch die Durchschnitte von 4 Erzeugenden der ersten und 4 der zweiten Art

gebildet, während die Kegelschnitte in diese Erzeugenden übergegangen sind. Die 8 Theile der mit reellen Singularitäten gedachten ursprünglichen Fläche werden vollständig flach und überdecken 8 der 16 Theile, in welche das Hyperboloid durch die Erzeugenden zerfällt, doppelt, während die anderen 8 Theile frei bleiben. Fallen 2 Erzeugende zusammen, so hat man die allgemeine Plücker'sche Complexfläche, werden sie imaginär, die Kummer'sche Fläche mit 8 reellen Knotenpunkten; fallen jetzt 2 Erzeugende der andern Art zusammen, so kommt die Complexfläche mit 4 Knotenpunkten und werden endlich auch diese imaginär, die Kummer'sche Fläche mit 4 reellen Knotenpunkten. Nimmt man ein Ellipsoid und 4 Paar conjugirt imaginäre Erzeugenden und damit also 4 Punkte auf dem Ellipsoide an, welche Knotenpunkte sind, denkt sich dasselbe doppelt überdeckt, so hat man die Fresnel'sche Fläche.

Zuletzt sei noch Einiges über die Konstruktion der Fläche erwähnt. Man wähle 4 Doppelebenen, welche ein Tetraëder bilden, beliebig aus und in der einen den Berührungskegelschnitt, seine Schnittpunkte mit dreien der 3 Kanten sind 6 Knotenpunkte; auf einer der 3 übrigen Kanten darf man noch einen Knotenpunkt beliebig annehmen und erhält die weiteren 5 Knotenpunkte auf den Kanten dadurch, dass sich die Verbindungslinien zweier Punkte einer Doppelebene und der entsprechenden Punkte einer anderen Doppelebene schneiden müssen. Damit sind dann alle 16 Doppelebenen und folglich auch die letzten 4 Knotenpunkte, sowie die Berührungskegelschnitte bestimmt. Sind die Knotenpunkte zum Theil imaginär, so nimmt man die zugehörige Involution zu Hilfe und construirt so die Berührungskegelschnitte. Die einzelnen Flächentheile sind in 12 resp. 8 oder 4 Doppelebenen eingeschlossen und da in diesen Ebenen Stücke von Berührungskegelschnitten liegen, so kann man aus diesen eckigen Körpern leicht die Flächentheile selbst ausschälen.

München, im Juni 1877.