Modelle zur Darstellung von regulären Gebietstheilungen des Raumes.

Von

Dr. A. Schoenflies,

Privatdocent an der Universität zu Göttingen.

(Zu Serie XIX.)

1. Sind Φ_i und Φ_k irgend zwei Bereiche einer regulären Raumtheilung, so sind sie der Annahme nach von den Nachbarbereichen auf analoge Weise umgeben. Es ist daher möglich, die Gesammtheit der Bereiche so in sich überzuführen, dass nicht allein Φ_i auf Φ_k fällt, sondern jeder Bereich mit irgend einem der Bereiche zur Deckung gelangt. Alle räumlichen Operationen, welche die Raumtheilungsbereiche untereinander zur Deckung bringen, bilden eine Gruppe. Diese Gruppe besteht entweder aus Bewegungen oder aus Bewegungen und solchen Transformationen des Raumes, welche jeden Gegenstand in sein Spiegelbild verwandeln; die letzteren sollen Operationen zweiter Art heissen.

Ist die Gruppe eine Gruppe von Bewegungen, so sind alle Bereiche untereinander congruent, wenn dagegen die Gruppe auch Operationen zweiter Art enthält, so zerfallen die Bereiche in zwei verschiedene Arten; sie sind einander theils congruent, theils spiegelbildlich gleich. Sind Φ_i und Φ_k zwei congruente Bereiche, so sind sie auf völlig identische Art von den Nachbarbereichen umgeben; sind dagegen Φ_i und Φ_k einander spiegelbildlich gleich, so zeigt auch die Anordnung der um sie herum liegenden Nachbarbereiche denjenigen Unterschied, welcher die Differenz zwischen einem Körper und seinem Spiegelbild kennzeichnet.

2. Zu jeder Gruppe Γ von Transformationen des Raumes in sich gehört ein Fundamentalbereich. Ist P irgend ein Punkt des Raumes, und nennt man alle Punkte, die aus P in Folge der Operationen der Gruppe Γ hervorgehen, gleichwerthige Punkte, so ist der Fundamentalbereich so definirt, dass er von jeder Art gleichwerthiger Punkte mindestens einen enthält, dass aber in seinem Innern keine zwei gleichwerthigen Punkte liegen. Hieraus folgt, dass keine Drehungsaxe und keine Sym-

312

metrieebene von Γ in das Innere des Fundamentalbereiches dringt, vielmehr gehören alle diese Axen und Ebenen den Oberflächen der Fundamentalbereiche an. Wir bezeichnen den Fundamentalbereich durch S. Er kann für die hier in Frage stehenden Gruppen stets einfach zusammenhängend gewählt werden.

Es sei P' ein Punkt der Oberfläche von S. Jeder Punkt der Oberfläche von S gehört gleichzeitig einem Nachbarbereich S_1 von S an. Nun sei $\mathfrak{R}$ diejenige Operation der Gruppe Γ, welche den Bereich S_1 in S überführt, während S durch sie in S_1' übergehen mag. Im Allgemeinen werden die Bereiche S_1' und S_1 verschieden sein. Wird nun der Punkt P', insofern er als Punkt von S_1 betrachtet wird, durch Q_1 bezeichnet, so liegt der aus Q_1 durch die Operation $\mathfrak{R}$ hervorgehende Punkt Q auf der gemeinsamen Grenze von S und S_1'. Der Bereich S enthält also auf seiner Oberfläche die zwei gleichwerthigen Punkte $Q_1 = P'$ und Q. Diese Punkte sind im Allgemeinen verschieden, sie fallen nur dann zusammen, wenn $\mathfrak{R}$ eine Drehung um eine durch P' gehende Axe oder eine Spiegelung an einer durch P' gehenden Ebene ist. Die auf der Oberfläche von S gelegenen Punkte paaren sich daher gegenseitig; zu jedem Stück σ der Grenzfläche von S gibt es — wenn nicht etwa σ in eine Symmetrieebene der Gruppe Γ fällt — ein mit σ gleichwerthiges, aber von σ verschiedenes Flächenstück σ_1 von S.

3. Die einfachste Raumtheilung, welche durch alle der Gruppe Γ angehörigen Raumtransformationen in sich übergeht, erhalten wir, wenn der Fundamentalbereich S der Gruppe als Fundamentalbereich Φ der Raumtheilung gewählt wird; jeder dieser Bereiche ist von der Gesammtheit aller Bereiche auf analoge Weise umgeben. Man kann aber auch mehrere Fundamentalbereiche S der Gruppe Γ benutzen, um mit ihnen einen Bereich Φ zu bilden, der eine regelmässige Raumtheilung liefert. Ein solcher Bereich Φ hat stets die Natur eines symmetrischen Polyeders; er setzt sich aus den einzelnen Bereichen S, die er enthält, so zusammen, dass seine Symmetrie-Axen und Symmetrie-Ebenen zugleich Symmetrie-Axen und Symmetrie-Ebenen der Gruppe Γ sind. Es ist ersichtlich, dass auch für derartige Bereiche die oben erhärtete Thatsache gilt, dass ihre Begrenzungsfläche in solche gleichwerthigen Theilstücke σ und σ_1 zerfällt, wie wir sie oben betrachtet haben.

4. Die einander entsprechenden Flächenstücke σ und σ_1 sind an den Modellen kenntlich gemacht worden. Um das Aussehen der grösseren Blöcke nicht zu stören, ist dies allerdings nur an den kleineren Steinen geschehen, welche die Fundamentalbereiche darstellen. Die auf ihnen verlaufenden Linien sind einerseits die Grenzlinien der bezüglichen Flächenstücke σ, andrerseits die der Gruppe Γ zugehörigen Symmetrie-Axen. Die letzteren sind dadurch kenntlich, dass sie die bezüglichen Gebiete in symmetrischer Weise durchsetzen.

Um das richtige Ansetzen der einzelnen Steine an den grösseren Block eines jeden Typus zu erleichtern, enthält jeder Block diejenigen Linien, in denen die ihn bildenden Einzelbereiche zusammenstossen. Mittelst dieser Trennungslinien wird es im Allgemeinen ohne Mühe gelingen, sich vorzustellen, in welcher Art der Block in seine Bestandtheile aufzulösen ist, und demgemäss die Einzelsteine in passender Weise anzufügen. Wie sich aus den Erörterungen von 2. ergibt, sind die Steine so anzufügen, dass ihre gleichwerthigen Flächengebiete aufeinander fallen. Um sich die Uebersicht hierüber zu erleichtern, empfiehlt es sich, bei jedem Stein in erster Linie diejenigen Kanten ins Auge zu fassen, an welchen Flächenwinkel von 120° resp. 60° liegen; sie sind in allen Fällen Symmetrieaxen der Gruppe und zwar diejenigen, welche der Richtung nach mit den Körperdiagonalen eines Würfels übereinstimmen. In ihnen stossen stets gleichwerthige Flächen zusammen.

5. Die Modelle 1—6 stellen solche Raumtheilungen dar, welche sich aus lauter congruenten Bereichen zusammensetzen. Für sie ist die Art, in welcher die einzelnen Steine an den Block anzufügen sind, aus der Form der Bereiche und dem an dem Block selbst hervortretenden Gesetz des Aufbaues leicht zu entnehmen. In Folge dessen ist davon Abstand genommen worden, hierfür besondere Zeichen einzuführen, und dies umsomehr, als das Aussehen der Steine dadurch nicht gewonnen hätte. Jeder der Steine 1—6 stellt einen einfachen Fundamentalbereich einer Gruppe Γ in dem oben unter 3. angegebenen Sinne dar. Für 1 bis 5 sind die Bereiche Φ — was sich in den meisten Fällen ermöglichen lässt — so gewählt worden, dass sie eigene Symmetrie besitzen; sie bestehen aus zwei resp. vier kleineren Bestandtheilen, die ihrerseits den einfachen Fundamentalbereich einer Gruppe Γ' höherer Symmetrie vorstellen; und zwar ist die Gruppe Γ' so definirt, dass sie sich durch Multiplication von Γ mit derjenigen Gruppe ergibt, welche die Symmetrie der bezüglichen Steine Φ darstellt. Die Steine liefern daher in dem oben unter 3. angegebenen Sinn gleichzeitig eine Raumtheilung, deren Deckoperationen durch die Operationen der Gruppe Γ' repräsentirt werden. Das Verhältniss der Gruppen Γ und Γ' zur Raumtheilung ist daher ein solches, dass Γ' alle Deckoperationen der Raumtheilung enthält, während in Γ nur diejenigen auftreten, welche jeden Bereich S mit einem von S verschiedenen Bereich zur Coincidenz führen.

6. Die Modelle 7, 8, 9 beziehen sich auf solche Raumtheilungen, welche nur zur Hälfte aus congruenten Bereichen bestehen, zur andern Hälfte aus solchen, die den ersteren spiegelbildlich gleich sind. Jeder Bereich hat Nachbarbereiche beiderlei Art, er stösst also mit einzelnen Begrenzungsgebieten an congruente Bereiche, mit andern dagegen an Bereiche, die ihm spiegelbildlich gleich sind. In diesem Fall ist das Gesetz des Aufbaues nicht so unmittelbar aus dem Block und der Form der ein-

314

zelnen Steine zu entnehmen; es schien daher nöthig, diejenigen Flächentheile eines jeden Steines, an welche congruente resp. spiegelbildlich gleiche Steine angrenzen, durch Zeichen kenntlich zu machen. Zu diesem Zweck ist für die ersteren Flächentheile ein **c**, für die letzteren ein **s** gewählt worden, und zwar so, dass die gleichwerthigen Flächen mit Buchstaben von gleicher Farbe versehen sind. Weitere Anhaltspunkte für die besondere Art des Aufbaues werden auch in diesem Fall durch die auf den Steinen verlaufenden Linien an die Hand gegeben, sowie durch Bevorzugung derjenigen Kanten, an denen Flächenwinkel von 120° liegen.

Zu jedem der drei Blöcke 7, 8, 9 gehören je sechs lose Steine, drei der einen, und drei der andern Art.

7. Die Modelle 10, 11, 12 sind bestimmt, zu zeigen, wie mannigfaltige Formen sich aus einer Grundform ableiten lassen. Die Modelle 10a, 10b, 10c stellen den Fundamentalbereich einer Translationsgruppe dar. Je zwei entsprechende Flächen eines solchen Bereiches sind parallel. Die einfachste Form der drei Modelle 10 ist der Körper 10a; er besteht aus vier congruenten Bestandtheilen. Fügt man diese vier Bestandtheile so zusammen, wie es in 10b und 10c geschehen, so bilden auch diese Körper Fundamentalbereiche einer Raumtheilung.

Die Modelle 11 und 12 benutzen als Grundform diejenige, welche sich durch Zusammenfügung von zwei Fundamentalbereichen des Typus 4 ergibt. Der Stein 4 zeigt bereits eine Art der Zerlegung dieser Grundform. Die Steine 11 zeigen eine zweite Zerlegung in je zwei Einzelbestandtheile, endlich stellt Nr. 12 eine Zerlegung in vier congruente Steine dar. Um aus ihnen die Grundform zu erhalten, hat man diejenigen Flächen zusammenzusetzen, welche mit dem Zeichen + versehen sind. Setzt man nun zwei, drei oder vier dieser Steine in anderer Art zusammen, so kann man dadurch neue Fundamentalbereiche für Raumtheilungen erhalten; wie aus 5 hervorgeht, ist dies z. B. immer der Fall, wenn ein mit Symmetrie behafteter Körper gebildet wird. Nach solchen Gesichtspunkten sind übrigens auch die Modelle 1—9 angefertigt worden. Es wird nicht schwer sein, die Beziehung der einzelnen Theilbestandtheile der bezüglichen Steine zum Würfel, resp. Quadratoctaeder zu erkennen. Am einfachsten tritt dies an Nr. 6 hervor; der Fundamentalbereich von Nr. 6 besteht aus zwei dreiseitigen Pyramiden, die je der dritte Theil eines Würfels sind.

Bezüglich einer genaueren Erörterung der einschlägigen theoretischen Fragen verweise ich auf die in den math. Annalen enthaltenen Arbeiten über Transformationsgruppen (Bd. 28, S. 319, Bd. 29, S. 50, und Bd. 34, S. 172), sowie auf die in den Nachrichten der Göttinger Ges. d. Wiss. erschienene Abhandlung über reguläre Gebietstheilungen des Raumes, 1888, S. 223.

Göttingen, im Mai 1891.